التوافقيات

جولة إرشادية

المنظمة العربية للترجمة

ديفيد ر. مازور

التوافقيات

جولة إرشادية

ترجمة

ميرفت سلمان

مراجعة

هيثم الناهي　　　　حسن الشريف

الفهرسة أثناء النشر - إعداد المنظمة العربية للترجمة
مازور، ديفيد ر.
التوافقيات: جولة إرشادية/ديفيد ر. مازور؛ ترجمة ميرفت سلمان؛ مراجعة هيثم الناهي وحسن الشريف.
937 ص. - (اللجنة العلمية لسلسلة التقنيات الاستراتيجية والمتقدمة؛ 2)
ببليوغرافيا: 927 - 932.
يشتمل على فهرس.
ISBN 978-614-434-084-4
1. الفيزياء. 2. الرياضيات. أ. العنوان. ب. سلمان، ميرفت (مترجم). ج. الناهي، هيثم (مراجع). د. الشريف، حسن (مراجع). هـ. السلسلة.
621

«الآراء الواردة في هذا الكتاب لا تعبّر بالضرورة
عن اتجاهات تتبناها المنظمة العربية للترجمة»


المنظمة العربية للترجمة

بناية «بيت النهضة»، شارع البصرة، ص. ب: 5996-113
الحمراء - بيروت 2090 1103 - لبنان
هاتف: 753031 - 753024 (9611) / فاكس: 753032 (9611)
e-mail: info@aot.org.lb - Web Site: http://www.aot.org.lb

توزيع: مركز دراسات الوحدة العربية
بناية «بيت النهضة»، شارع البصرة، ص. ب: 6001 - 113
الحمراء - بيروت 2407 2034 - لبنان
تلفون: 750084 - 750085 - 750086 (9611)
برقياً: «مرعربي» - بيروت / فاكس: 750088 (9611)
e-mail: info@caus.org.lb - Web Site: http://www.caus.org.lb

الطبعة الأولى: بيروت، كانون الثاني (يناير) 2016

يمكنكم شراء هذا الكتاب عبر الموقع الالكتروني: www.caus.org.lb

المحتويات

تقديم

سلسلة كتب التقنيات الاستراتيجية والمتقدمة
ضمن مبادرة الملك عبد اللّه للمحتوى العربي

يطيب لي أن أقدم لهذه السلسلة التي انتُقيت في مجالات تقنية ذات أولوية للقارئ العربي في عصر أصبحت فيه المعرفة محركاً أساسياً للنمو الاقتصادي والاجتماعي والتقني. ويأتي نشر هذه السلسلة بالتعاون بين مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية والمنظمة العربية للترجمة تلبية للسياسات والتوصيات التي تعنى باللغة العربية والعلوم ومنها:

أولاً: البيان الختامي لمؤتمر القمة العربي المنعقد في الرياض 1428هـ (2007م) الذي يؤكد ضرورة الاهتمام باللغة العربية، وأن تكون هي لغة البحث العلمي والمعاملات حيث نصّ على الآتي: «تعزيز حضور اللغة العربية في جميع الميادين بما في ذلك وسائل الاتصال والإعلام والإنترنت، وفي مجالي العلوم والتقنية».

ثانياً: «السياسة الوطنية للعلوم والتقنية» في المملكة العربية السعودية التي انبثق عنها اعتماد خمس عشرة تقنية استراتيجية هي: المياه، والبترول، والغاز، والبتروكيميائيات، والتقنيات المتناهية الصغر (النانو)، والتقنية الحيوية، وتقنية المعلومات، والإلكترونيات والاتصالات والضوئيات، والفضاء، والطيران، والطاقة، والمواد المتقدمة، والبيئة، والرياضيات، والفيزياء، والطبية، والصحية، والزراعية، والبناء، والتشييد.

ثالثاً: مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي التي تُفعّل أيضاً ما جاء في البند أولاً عن حضور اللغة العربية على الإنترنت، حيث تهدف إلى إثراء المحتوى العربي عبر عدد من المشاريع التي تنفذها مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية بالتعاون مع

جهات عديدة داخل المملكة وخارجها. ومن هذه المشاريع ما يتعلق برقمنة المحتوى العربي القائم على شكل ورقي وإتاحته على شبكة الإنترنت، ومنها ما يتعلق بترجمة الكتب المهمة، خاصة العلمية منها، مما يساعد على إثراء المحتوى العلمي بالترجمة من اللغات الأخرى إلى اللغة العربية بهدف تزويد القارئ العربي بعلم نافع يُعمل به.

تشتمل السلسلة التي بين أيدينا على ثلاثة كتب في كل من التقنيات المعتمدة ضمن «السياسة الوطنية للعلوم والتقنية» وقد اختيرت بحيث يكون الأول مرجعاً عالمياً معروفاً في تلك التقنية، ويكون الثاني كتاباً جامعياً، والثالث كتاباً عاماً موجهاً إلى عامة المهتمين، وقد يغطي ذلك كتاب واحد أو أكثر. وقد تم بفضل الله الانتهاء من المجموعة الأولى من السلسلة وعددها ثلاثة وثلاثون كتاباً شملت التقنيات الإحدى عشرة الأولى إضافة إلى كتاب إضافي منفرد للمصطلحات العلمية والتقنية المعتمدة في هذه السلسلة. وها نحن ندشن المجموعة الثانية التي تغطي بقية التقنيات الخمس عشرة.

ولقد جرى انتقاء الكتب وفق معايير، منها أن يكون الكتاب من أمهات الكتب في تلك التقنية، ولمؤلفين يشهد لهم عالمياً، وأنه قد صدر بعد عام 2000م، وألا يكون ضيِّق الاختصاص بحيث يخاطب فئة محدودة، وأن تكون النسخة التي سيترجم عنها مكتوبة باللغة التي ألّف بها الكتاب وليست مترجمة عن لغة أخرى، وأخيراً أن يكون موضوع الكتاب ونهجه عملياً تطبيقياً يصبّ في جهود نقل التقنية والابتكار، ويساهم في عملية التنمية الاقتصادية من خلال زيادة المحتوى المعرفي العربي.

إن مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية سعيدة بصدور المجموعة الثانية من هذه السلسلة، وأود أن أشكر المنظمة العربية للترجمة على الجهود التي بذلتها لتحقيق الجودة العالية في الترجمة والمراجعة والتحرير والإخراج، وعلى حسن انتقائها للمترجمين المتخصصين، وعلى سرعة الإنجاز. كما أشكر اللجنة العلمية للسلسلة التي أنيط بها الإشراف على إنجازها في المنظمة وكذلك زملائي في مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية الذين يتابعون تنفيذ مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي.

رئيس

مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية

مقدمة المترجمة

تعلمنا حساب التوافيق البسيطة في مرحلة الدراسة الثانوية، لعدّ حالات بسيطة كمعرفة عدد الفرق المكونة من 3 أشخاص والتي يمكن تكوينها من مجموعة من 15 طالباً. لكن في عالم اليوم حيث غدت التكنولوجيا عاملاً مسيطراً على جوانب الحياة كافّة، أصبحت مسائل العد أكثر تعقيداً، ما تطلب وجود قوانين ومبادئ حسابية ملائمة. فبوجود مئات السواتل الفضائية حول الأرض مثلاً، والتي تقوم بمهام تقنية مختلفة، أصبحنا بحاجة إلى طرق عدّ الرسائل ذات المحتوى الخاطئ مما تبثّه هذه السواتل، كما أصبحنا بحاجة لطرق عدّ أوسع وأشمل من حساب التوافيق والتباديل البسيطة لتكوين جدول مباريات لبطولة يشترك فيها 20 فريقاً، على سبيل المثال. من هنا، خرج علماء الرياضيات بطرق مختلفة وشاملة لتلبية هذه الحاجات العلمية والعملية المتزايدة. فوضعت العديد من الطرق النظرية العامة الفعالة في القرن العشرين ما ساهم في تأطير حساب التوافقيات كفرع مستقل في الرياضيات.

ظهرت المسائل التوافقية في عدد من المجالات كالجبر والهندسة ونظرية الاحتمالات والطوبولوجيا، كما أن لها تطبيقات عديدة منها الأَمْثَلة الرياضية وعلوم الحاسوب والفيزياء الإحصائية وغيرها. هذا يدعم أهمية التركيز على حسابات التوافيق المتقدمة وربطها مع الحقول الرياضية الأخرى كالجبر التجريدي والهندسة الجبرية وتطبيقها على النحو الأمثل لإيجاد حلول للمسائل المختلفة والإجابة عن التساؤلات ذات العلاقة.

وضع هذا الكتاب في ثمانية فصول تغطي أهم طرق حساب التوافقيات المتقدمة والنظريات المرتبطة بها كعائلات الأعداد ونظرية المخططات ونظرية الزمر وشيفرات تصحيح الخطأ، مدعّمة بمسائل عملية للطلاب الذين سيطالعون الكتاب ضمن منهج دراسي جامعي أو كمرجع ثانوي. حرص المؤلف على صياغة النص بأسلوب سهل مبسط بعيد عن الأسلوب التقليدي الذي قد يسبب الملل للطلاب، وقد حرصت في ترجمته على استخدام أسلوب الخطاب المباشر مع القارئ، ما يشعره بنوع من الألفة في القراءة والتصفح ومتابعة التمارين كما روعيت كتابة المعادلات والصيغ الرياضية باستخدام الرموز المعتمدة في الكتابة الرياضية المألوفة للطلاب من دون ترجمتها، لتجنب التناقض الذي قد يحدث بسبب اعتماد أساليب مختلفة لكتابة الرموز الرياضية المعرّبة من دولة إلى أخرى.

والله ولي التوفيق

المترجمة ميرفت سلمان

إلى دانيال

المقدمة

يوفّر هذا الكتاب رحلة في تعريف التوافقيات، حيث يمكن للقارئ استخدامها خلال فصل دراسي أو خلال فصلين دراسيين، أو في أثناء دراسة مستقلة أو تحضيرات الدراسة الذاتية. لم يُقدّم هذا الكتاب كموسوعة. بل هو عبارة عن دراسات استقصائية للتوافقيات حسب تطورها خلال العقد الأخير، مع التركيز على ميزتها في الأسلوب الجديد في التفكير وترابطه مع حقول الرياضيات الأخرى، فضلاً عن بعض تطبيقاته.

يمكن أن تسمّى التوافقيات عن حق برياضيات العدّ. وبتخصيص أكثر، هي رياضيات التعداد والتواجد والبناء والأسئلة حول الاستمثال للمجموعات المحدودة. فيما يلي بعض التوضيحات الموجزة:

- **تعداد: كم عددها؟** كم عدد لوحات السودوكو الممكنة التي حجمها 9×9. تم حساب هذا العدد على وجه الدقة، وهو رقم فلكي؛ إذ يبلغ حوالي 6.6 مرفوعة للقوة 21. إن تحديد هذا الرقم بوضع قائمة بكل الاحتمالات الممكنة أمر غير قابل للتطبيق. حيث تتضمن التوافقيات تقنيات رياضية لتحديد الإجابة عن سؤال عدّ دون وضع قائمة بالأشياء التي يتم عدّها.

- **التواجد: هل هو ممكن؟** خذ أي 25 شخصاً في هذا العالم. من بين أعضاء هذه المجموعة، هل ستتمكّن دائماً من إيجاد أربعة أشخاص يعرف كلٌ منهم الأعضاء الآخرين أو خمسة أشخاص لا يعرف أي منهم أيَّ عضو آخر؟ نعم، هذا الأمر محسوم بغض النظر عن المجموعة المكونة من 25 شخصاً التي ستختارها. بصرف النظر عن

طبيعة هذه الأسئلة البريئة، لم تتم الإجابة عن هذا السؤال حتى عام 1993، وتطلّب ذلك تحليلاً توافقياً حذراً واستغرق الأمر آلاف ساعات العمل باستخدام الحاسوب.

- **البناء: هل يمكن بناؤه؟** وضعت المركبة الفضائية مارينر 9 في مدار كوكب المريخ عامي 1972–1971 وأرسلت صوراً أعطت فكرة كاملة عن سطح الكوكب. مشغل الأقراص الضوئية يشغّل القرص بسلاسة ومن دون أخطاء على الرغم من وجود خدوش عرضية على سطح القرص. يتضمن هذان التطبيقان استخدام شيفرات تصحيح الخطأ التي ترسل معلومات ذات دقة 100٪، بغض النظر عن الأخطاء التي تحدث عرضياً في الإرسال. وتستخدم العديد من طرق بناء العديد من شيفرات تصحيح الخطأ، التوافقيات.

- **الاستمثال: ما هي أفضل طريقة؟** يجد نظام الملاحة في سيارتك GPS أفضل طريق من النقطة أ إلى النقطة ب بسرعة. فهو يحلّ حالات مسائل استمثال توافقية تعرف بمسائل أقصر مسار، والتي ليست سوى نوع واحد من طائفة واسعة من مسائل استمثال الشبكات، والتي لها تطبيقات حديثة واسعة النطاق.

سنتناول في هذا الكتاب أسئلة التعداد والتواجد والبناء.

تقترح الأمثلة أعلاه أن للتوافقيات تطبيقات حديثة عديدة. لا يمكن الاستغناء عن تقنيات العدّ في الاحتمالات التطبيقية عندما يكون الفضاء العيني محدوداً والمخرجات متشابهة الاحتمالات. نشأت نظرية تصميم التوافقيات من حاجة الإحصائيين إلى بناء تصاميم تجريبية صالحة للاستخدام. وتزخر علوم الحاسوب بالتطبيقات مثل التفكير التوافقي الذي يشير إلى كفاءة الخوارزميات وهيكليات البيانات إضافة إلى إجراءات تصحيح العمليات التكرارية. كما أن البرمجة الخطية والاستمثال التوافيقي هي مجالات نشأت من مشكلات التخطيط اللوجستي الواسعة النطاق في أثناء الحرب العالمية الثانية حيث تتضمن في الوقت الحالي تطبيقات تصميم شبكات النقل والاتصالات، وغيرها. بحوث العمليات وعلوم الإدارة والهندسة الصناعية هي مجالات أخرى يستخدم فيها تحليل التوافقيات لحل المشاكل العملية المهمة.

بخلاف الأمثلة والمسائل المحددة، يمكن إلقاء نظرة أوسع على فائدة التفكير التوافقي وتطبيقاته في العديد من المجالات الرياضية والإحصائية وعلوم الحاسوب والهندسة. وتعتبر كل من رابطة الرياضيات في أمريكا (Mathematical Association

(Association for Computing Machin- ورابطة الآلات الحاسوبية of America)
(ery من كبرى الجمعيات المهنية العاملة في حقلي الرياضيات وعلم الحاسوب، تنصح هاتان الرابطتان أن التخصص في الرياضيات وعلوم الحاسوب، سواء كان تخصصاً أساسياً أم فرعياً، يتطلب برامج دراسية تتضمن مناهج مختلفة جيدة في الرياضيات المتقطعة والتوافقيات.

تتشابك التوافقيات الآن مع الرياضيات الحديثة. وفي الماضي القريب، كان ينظر للتوافيق كمجموعة مفيدة من الأدوات التي تقوم مقام حقول معرفية أخرى. أما الآن فقد تبلورت في إطار متماسك، ومن الجيد أن نرى كيف يمكن أن تستخدم الحقول الأخرى كالتفاضل والتكامل والتحليل ونظرية الأعداد والجبر الخطي والتجريدي هذه الأدوات لحل مسائل توافقية بحتة. يشار إلى أن بعض هذه النتائج قد برزت باعتبارها حقائق رياضية مهمة.

ما الذي تتضمنه هذه الجولة وما الذي لا تتضمنه

كما ذكرنا سابقاً، يعطي هذا الكتاب مسحاً أولياً لأسئلة التعداد والتواجد والبناء. وينصب التركيز على التعداد وتوفر الفصول الخمسة الأولى مادة أساسية على تقنيات العدّ وعائلات الأعداد. وتتناول الفصول الباقية المخططات والتصميم التوافقي وشيفرات تصحيح الخطأ والزمر المرتبة جزئياً.

سنبدأ في الفصل الأول بتصنيف وتحليل أسئلة العدّ الأساسية. كما سنرسي أساسيات للفصول التالية بتعريف خمسة مبادئ توافقية أساسية: مبدأي الجمع والضرب، مبدأ التناظر، مبدأ التكافؤ، مبدأ برج الحمام. ويتعلق المبدأ الأخير بإمكانية التواجد أكثر من كونه مبدأ عدّ.

في الفصل الثاني، سنتناول دراسة مسائل التوزيع. معظم أسئلة العدّ مكافئة لأسئلة عد طرق توزيع «أشياء» على «مستقبلات [أو متلقيات]». من خلال مسائل التوزيع سنتعامل مع العديد من الأدوار الأساسية مثل: معاملات ذات الحدين وأعداد ستيرلينغ وأعداد تقسيم الأعداد الصحيحة. كما سنقدم ونركز على البراهين التوافقية وعلى تقنية التكرار: تحليل مسألة كبيرة إلى مسائل فرعية أصغر من نفس النوع.

في الفصل الثالث، سنقدّم مبادئ التضمين – الإقصاء والاستقراء الرياضي

والاقترانات المولدة والعلاقات التكرارية. وتختلف هذه التقنيات الجبرية عن التقنيات التوافقية الواردة في الفصول السابقة. وتتضمن الاقترانات المولدة تقنيات حل العلاقات التكرارية.

في الفصل الرابع، سنستخدم التقنيات الواردة في الفصول السابقة لإعطاء دراسة أكثر عمقاً عن معاملات ذات الحدين ومعاملات كثيرات الحدود وأعداد فيبوناتشي وأعداد ستيرلينغ من النوعين الأول والثاني وأعداد تقسيم الأعداد الصحيحة. ومن بين أمور الاستقصاء، سنشتق اقترانات مولدة لعائلات الأعداد هذه وتثليث العدّ للمضلعات المنتظمة المكونة من n حد، وسنعطي براهين توافقية لأعداد فيبوناتشي باستخدام فكرة التبليط، وسنشتق صيغة رائعة لأعداد بيل وسنكتشف صيغ وتقدير مقارب لأعداد تقسيم الأعداد الصحيحة.

في الفصل الخامس، سنغطي مسائل العد بما فيها حساب التكافؤ والتناظر. النتائج الرئيسية هي مبرهنة كاوتشي – فروبينيوس – بيرنسايد ومبرهنة تعداد بوليا. على الرغم من أن مبرهنة بوليا قد ظهرت من تطبيق تعداد المركبات الكيميائية، إلا أنها مذّاك أثبتت أنها أداة قوية ومتعددة الاستعمالات في تطبيقات أخرى عديدة. سنبدأ الفصل بتعريف جوانب نظرية الزمر اللازمة لفهم المبرهنات وسنوفّر توضيحات كثيرة لكيفية تطبيقها.

في الفصل السادس، سنعطي لمحة صغيرة عن بعض المسائل التوافقية في نظرية المخططات. وتتضمن تعداد الشجرات المرمزة وشجرات البحث الثنائية والتلوين ومتعددات الحدود اللونية ومقدمة لنظرية رامزي. على الرغم من أنه يمكن تقديم نظرية رامزي من دون مساعدة المخططات، إلا أن التفسير اللوني مناسب ومتماسك. يغطي القسم الأول من هذا الفصل مفاهيم نظرية المخططات الأساسية للقارئ غير المطّلع بالمخططات.

في الفصل السابع، سنغطي اثنين من أكثر تطبيقات التوافيق صعوبة، ألا وهما التصاميم التوافقية وشيفرات تصحيح الخطأ. علاوة على ذلك، تعتبر الأسئلة الرياضية المتعلّقة بهذه التطبيقات بنفس صعوبة هذه التطبيقات إن لم تكن أكثر. في الأقسام الثلاثة المتعلقة بالتصاميم، سنغطي مناهج الوجود (الاحتمالات) والبناء، والتصاميم المتماثلة والنظم الثلاثية. في القسمين المتعلقين بشيفرات تصحيح الخطأ، سنبني عائلة شيفرات

هامينغ الثنائية ونشتق خصائصها المصححة للخطأ، وسندرس التفاعل بين الشيفرات والتصاميم، وسنناقش نتائج مدهشة حول وجود الشيفرات الكاملة.

في الفصل الثامن، سنختتم رحلتنا بدراسة العلاقات الكامنة وراء معظم التوافقيات: المجموعات المرتبة جزئياً. سندرس معظم النتائج الكلاسيكية (مبرهنة سبنسر ومبرهنة ديلوورث) ومبدأ بُعد المجموعات المرتبة جزئياً. في القسمين الأخيرين، سنقدم نظرية تحويل موبيوس الانعكاسي لهدف ذي شقين: إعطاء إطار عمل موحّد للعديد من الأفكار التوافقية وتجهيز القارئ للمزيد من الدراسة.

ثمة العديد من المواضيع المهمة غير المشمولة في هذا الكتاب. مثلاً ركزت تغطية نظرية المخططات في الفصل السادس، على الرغم من وجود قسم تقديمي، بشكل ضيق على المواضيع المذكورة سابقاً. ومن الجدير بالذكر أننا تركنا أحد أهم فروع التوافقيات خارج نطاق الكتاب ألا وهو الاستمثال التوافقي. إضافة إلى ذلك، قُيّدت تغطية التصاميم والشيفرات بتطبيقات معينة. لذا لن نشمل المستويات الإسقاطية أو الهندسة التوافقية أو المربعات اللاتينية.

خصائص هذا الكتاب

أسئلة القراءة: ما يجعل هذا الكتاب دليلاً موجّهاً هو وجود ما يقارب 350 سؤالاً موزّعة في الفصول الثمانية. تتيح هذه الأسئلة للقارئ أن يكون ممارساً نشطاً فعالاً في النقاشات وتوفر انعكاساً إيجابياً لعملية تعلُّم الرياضيات. قراءة كتاب رياضيات دون ممارسة بالورقة والقلم تشبه البقاء في فندق دون الاستمتاع بالمناظر الخارجية من النافذة، لكن المتعة الأكبر تكمن في مغادرة الفندق والتجوّل سيراً على الأقدام.

البراهين التوافقية: لعدّ قطيع من الأبقار في حقل، يمكنك إما أن تعدّ رؤوس البقرات أو أن تعدّ سيقانها وتقسم المجموع على أربعة. في البرهان التوافقي، يسأل المرء سؤالاً عن العد ويجيب عنه بصورة صحيحة باستخدام منهجيتين مختلفتين. تقودنا هذه الفكرة الصغيرة إلى بعض البراهين الممتعة الجديرة بالذكر. حيثما أمكن، سنقدم براهين توافقية لأنها تنمّي طرق الفهم وتبني مهارات التفكير التوافقي.

تصنيف مسائل العدّ: الجزء الأصعب في العد هو تحديد نوع الأشياء التي يتم عدّها. سنتعلّم في القسم 1.1 كيفية التفريق بين القوائم، والقوائم التي لا تحتوي

تكرارات (التباديل) والمجموعات الجزئية (المجاميع) والمجموعات المتعددة (المجاميع مع تكرارات) بدلاً من دراستها في أقسام متفرقة كلاً على حدة.

الأسلوب التحاوري، بعض الأمثلة الكبيرة: حاولت الحفاظ على لهجة الحوار والصيغ غير الرسمية في هذا الكتاب. في بعض الحالات، ضحّيت بالإيجاز بهدف توفير المزيد من التوضيح. إضافة إلى ذلك، كانت بعض الأمثلة الصغيرة و/ أو البسيطة لبعض المفاهيم الجديدة الصعبة محبطة. في بعض الحالات، أدخلت أمثلة أكبر إذا كانت مساعدة. من هذه الأمثلة يمكنك مطالعة الشكل 3.1 والشكل 7.2.

ترابط مع الرياضيات المستمرة: في بعض السياقات، ارتأيت الإشارة إلى التفاضل والتكامل والمعادلات التفاضلية والجبر الخطي وغيرها حيثما كان الأمر ملائماً ومفيداً في موضوع التوافقيات. يفيد هذا في تبديد فكرة أن التوافقيات عبارة عن حقل «منفصل بذاته».

مرونة المحاضِر: يساعد إكمال قراءة الأسئلة قبل بدء الحصة الدراسية المحاضِر في التحرر من تدريس المادة الأساسية. وبذا يمكن استغلال مدة الحصة الدراسية في توضيح الصعوبات والتركيز على المواضيع المتقدمة والتحاور حول المسائل المعقدة أو تخصيص أعمال جماعية. كما يتيح ذلك مراجعة تقنيات البراهين والجبر الخطي ومتسلسلات القوى وحساب الوحدات، إن تطلّب الأمر. طالع ما يأتي للمتطلبات المسبقة الاختيارية.

مساقات دراسية وطرق استخدام هذا الكتاب

ثمة استخدامان لهذا الكتاب. الأول أنه يستخدم كمنهج دراسي لمادة التوافقيات في مستويات السنة الجامعية الثانية أو الأولى أو المتقدمة. يمكن تغطية معظم المادة في فصل دراسي كامل، أو في فصلي عام دراسي. الاستخدام الآخر هو كمادة للدراسة الذاتية أو مساق قراءة، الكتاب جيد من حيث إنه يدعم فكرة العمل «خارج الصندوق». استخدم المؤلف إصدارات مختلفة من المخطوطات لهاتين الغايتين. الكتاب ملائم لبعض مناهج مقدمات الدراسات العليا في الرياضيات التطبيقية أو برامج بحوث العمليات. في هذه الحالة، يمكن شمول معظم المادة في فصل واحد إن اختيرت التمارين الملائمة فحسب. إضافة إلى ذلك، النص ملائم لأي شخص فضولي حول التوافقيات وللأشخاص الذين يرغبون في تعلّم شيء عن هذا الموضوع.

ستتضمن المواضيع الأساسية في كل مادة ما يلي:

- الأقسام 1.1–5.1: مبادئ العد والتواجد الأساسية
- الأقسام 1.2–4.2: مسائل التوزيع وبراهين التوافيق
- الأقسام 1.3–3.3، 5.3: التضمين والإقصاء، الدوال المولدة، العلاقات التكرارية
- الأقسام 1.5–4.5، 6.5: نظرية بوليا في العد
- الأقسام 1.7–5.7: التصاميم التوافقية وشيفرات تصحيح الخطأ
- يمكن اختيار مادة إضافية من
- القسم 2.3: الاستقراء الرياضي (إذا تطلب الأمر مراجعة)
- القسم 6.3: صيغ حلول العلاقات التكرارية الخطية من الرتبة الأولى والثانية
- الأقسام 1.4–4.4: دراسة إضافية لمعاملات ذات الحدين ومتعددات الحدود وأعداد فيبوناتشي وأعداد ستيرلينغ وأعداد تقسيم الأعداد الصحيحة.
- القسم 5.5: برهان مبرهنة كوتشي– فروبينيوس– برنسايد
- الأقسام 1.6–4.6: مواضيع نظرية المخططات
- الأقسام 1.8–6.8: المجموعات المرتبة جزئياً وتحويل موبيوس العكسي

المتطلبات المسبقة

يجب أن يكون القارئ الذي يشرع في قراءة هذا الكتاب مطلعاً على تحليل التفاضل والتكامل لمتغيّر واحد والمجموعات وترميز المجموعات وتقنيات البراهين، إضافة إلى حساب الوحدات. باختصار، يجب أن يكون القارئ قد أكمل سنة دراسية في علم تحليل التفاضل والتكامل ومساقات انتقالية. وهذا يشمل عادةً طلاب السنة الأولى أو الثانية ويشمل أيضاً المختصين في علوم الرياضيات كالإحصائيين والمختصين في علوم الحاسوب وبعض المهندسين.

نناقش فيما يلي بعض المتطلبات المسبقة الاختيارية.

اختياري: الاستقراء الرياضي. تناول القسم 2.3 موضوع الاستقراء ـ معظم القراء الذين يحققون هذا المتطلب المسبق سيكونون على علم مسبق بالاستقراء. يفيد هذا القسم كمقدمة تعريفية للمرة الأولى على الرغم من أن الهدف منه هو التركيز على كيفية استخدام الاستقراء في التوافقيات.

اختياري: الجبر الخطي: هذا الموضوع ليس متطلباً مسبقاً أساسياً لمعظم مواضيع الكتاب. لكن الفهم الأساسي للنظم الخطية وجبر المصفوفات ومفاهيم الفضاء المتجهي سيحسّن من المادة، خاصة. الفصل السابع المخصص بمعظمه للتصاميم التوافقية وشيفرات تصحيح الخطأ، وهي بنظر المؤلّف تمثل أكثر أجزاء المادة إثارةً للإعجاب في هذا الكتاب. لابدّ أن يكون معظم القراء الذين تنطبق عليهم المتطلبات المسبقة قد أكملوا مادة الجبر الخطي أو أنهم يأخذونها بالتزامن مع هذه المادة. ورد الجبر الخطي بإيجاز في القسم 4.3 في أعداد ستيرلينغ، وفي قسمين في الفصل السادس جنباً إلى جنب مع المصفوفات وفي نهاية الفصل الثامن في تحويل موبيس العكسي.

اختياري: نظرية المخطوطات: تحققنا في الفصل السادس من بعض مسائل التعداد والوجود المتصلة بالمخططات. لا يفترض وجود معرفة مسبقة بنظرية المخططات، فالقسم 1.6 يعرّف الفكرة الضرورية لبقية مادة الفصل. ستكون هذه المادة التقديمية مألوفة للطلاب الذين يتضمن منهج الانتقال لديهم نظرية المخططات، كما هو متعارف عليه في المناهج الحالية.

اختياري: الجبر التجريدي. يقدّم الفصل الخامس، نظرية بوليا في العد، ذروة التعداد. لا يفترض وجود أي خبرة مسبقة في الجبر الخطي لكن سنقدم نظرية الزمر فقط باعتبارها متطلباً لفهم النتائج وحل المسائل. سيجد الطلاب الذين درسوا مساقاً في الجبر التجريدي المزيد من المعلومات في هذا الفصل لكن معرفتهم السابقة ليست ضرورية. إضافة لما تقدم، فقد ذُكرت حقول محدودة في القسم 5.7.

شكــر وإقرارات

بغض النظر عما تعمل، اعمله بقلبك، أخلص النية لله، وليس للعباد. ... Colossians 3:23

المجد لله والحمد لله على هذا المشروع! لم تكن لدي أدنى فكرة عن حجم المشروع الذي تعهدته، لكنّه تم بحمد الله. أحمد الله وأشكر فضله كلما فكرّت في هذه الرحلة التي استغرقت ثمان سنوات في كتابة محتوى الكتاب.

في الجامعة، درّسني مادة التوافقيات أستاذان رائعان، إد شينرمان وألان غولدمان. لقد كان تأثيرهما وتشجيعهما ملهماً لي كلما واجهت مشكلة في هذا المشروع الرائع.

وضعت مسوّدة أول فصلين صيف عام 2001 بفضل منحة حصلت عليها من كلية ويسترن نيو إنجلاند. أقدم شكري لكل من آن بوروت وجيري هيرتش لاهتمامهما بالمشروع، ولكل من دينيس لوتشيانو وديك بيلوسي لدعمهما طلب الحصول على المنحة. ساعد طلابي كارا آكين، نيكولاس برونداج، هولي كولمان، جيسون دين، بريندان كيتشام، باول لويس في وضع مخطوطة الكتاب خريف عام 2001. أشكرهم لتقديم ملاحظات قيّمة ساهمت في تدارك بعض الأمور. أقدم شكري أيضاً للسيد جيسون موليتيرنو من جامعة Sacred Heart لقراءته المخطوطات نفسها وإبداء الرأي والنصح والاقتراحات.

في أثناء خريف عام 2005، استغرقت أيام السبت لإجراء تعديلات وكتابة الفصلين الأخيرين. خلال خريف عام 2006، قدّم طلابي التالية أسماؤهم ملاحظات مهمة جداً: مايك بواسو، كيتلين كريللي، كيفين دوثرايت، كيفين دواير، كوري إيغيرت، سي.جيه إلسدون، مارك فراتيني، دان جوك، لورين كليسكا، روبرت مالوتشي، سارا بيك، غيسيل بايل، بي جيه ستراتون، جيمس تيرني. كان تدريس هؤلاء الطلاب متعة حقيقية. كما أقدم شكري لدايان ستورتيفانت للمساعدة في كشف بعض الأخطاء بعد أن كنت أعتقد أن المخطوط أُنجز.

شجعني زافين كاريان، محرر كتب الرابطة الرياضية في أمريكا، أيما تشجيع لإنهاء وتسليم المسوّدة الثانية لمراجعتها بعد مراجعة مخطوطي الأول. كانت لملاحظاتهم جميعاً أكبر الأثر في محتوى هذا الكتاب. الشكر الجزيل أيضاً لدون فان أوسدول لتشجيعي على إرسال هذا الكتاب لرابطة الرياضيات في أمريكا، ولإيلين بيدريرا وبيف رودي في إدارة رابطة الرياضيات في أمريكا للمساعدة في إنتاج الكتاب بسرعة وودية.

لم يبخل علي زملائي وأصدقائي في إدارة الرياضيات بالدعم والتشجيع على مدى السنوات التي استغرقها إخراج هذا الكتاب. الصديق إينام هوق أعطاني الدعم

والنصحية إذ كان شاهداً على الإحباط اليومي. أمضى دينيس لوتشيانو وديك بيلوسي وقتاً في مراجعة بعض الفصول وأعطيا ملاحظات قيمة. كما أقدم الشكر لدينيس وسعيد قهرماني، عميدنا، لتوفير بيئة عمل لطيفة. وقد أعطى سعيد العديد من الاقتراحات المفيدة لنشرة الكتاب الإعلامية.

أخيراً، أدين بامتنان كبير لزوجتي الرائعة داني ولأولادي سوزي وغرايسي ودايفي. فقد كانوا مصدر دعم كبير، وقد وفروا لي الوقت للعمل على إنجاز الكتاب في العطل والأمسيات وعطل نهاية الأسبوع. الآن وقد أنجز العمل، سأفتقد سؤال سوزي لي ما إذا كنت أعمل بموجب «اقتران موبيوس»، لكنني أتطلع قُدُماً لقضاء المزيد من الوقت مع الأشخاص الذين أحبهم.

سبرينغفيلد، ماساشوستس

آب (أغسطس) 2009.

قبل البدء

إن الأسئلة الواردة في أثناء القراءة، من السؤال 1 إلى السؤال 365، هي جزء تكاملي من هذا الكتاب، لذلك احتفظ بقلم وورقة في أثناء القراءة لتكون جاهزاً لحل كل سؤال تواجهه. بعض هذه الأسئلة بسيطة، وبعضها يطلب حل مسألة شبيهة بمثال، وبعضها الآخر يطلب تعميماً بسيطاً لفكرة جديدة. أسئلة أخرى تتطلب تفسيراً، أو تذكيراً بمفهوم تم ذكره في كتاب آخر، أو تبريراً لخطوة في إثبات ما، وقد تتطلب أسئلة أخرى إثباتاً كاملاً ولكن في حال كانت الفكرة الأساسية موضحة جيداً.

تشتمل الأقسام، بدءاً من القسم 5.1، على ملاحظات تضفي لوناً على مادة القسم من خلال قصص ممتعة ومسائل مفتوحة وسرد مستوى التطور الراهن واقتراحات لمزيد من القراءة عن موضوع ما ومعلومات أساسية عن الرياضيين المسؤولين عن الاكتشافات.

تم أيضاً تضمين تلميحات وإجابات لأسئلة مختارة من الأسئلة الواردة في نهاية الأقسام في نهاية الكتاب لتقوم بالاستعانة بها إذا تعثرت بعض أمورك. أعطيت الإجابات لتتحقق من حلّك ولكن تذكر أمرين: الأول، إن المسائل التوافقية تسمح عادة بطرق عدة للحل، لذلك فإن الإجابات التي تبدو مختلفة قد تكون متشابهة في الحقيقة. الثاني، الإجابة لوحدها عادةً لا تكفي فالطريقة التي تستخدمها لتحليل المسألة هي المفتاح الحقيقي للحل.

أثمّن لك أيها القارئ تصحيحاتك وتعليقاتك وأي نتائج أخرى حول هذا الكتاب، لذلك راسلني من فضلك عبر البريد الإلكتروني dmazur@wnec.edu.
يمكنك أيضاً زيارة الموقع الخاص بالكتاب من خلال اتباع الرابط التالي على صفحتي الرئيسية:

mars.wnec.edu/~dmazur

وذلك للاطلاع على التطورات والأخطاء والمراجع الأخرى.

استمتع برحلتك!

الفصل الأول

مبادئ حساب التوافيق

تبدأ رحلتنا بالعدّ لأن التوافيق، جزئياً، هي رياضيات العدّ. ماذا يعني العدّ؟ العدّ هو تحديد العدد الدقيق لمجموعة من الأشياء يُشار لها بالسؤال "كم؟" ما يجعل الأسئلة المثارة حول العدّ جذابة هو أنها تظهر في أنواع الوضعيات كافة، في حين تبني الإجابات عن هذه الأسئلة مهارات حل المسائل؛ هذه الإجابات تبدو أخّاذة في حجمها.

سندرس في هذا الفصل مبادئ العدّ التي تعتبر أساساً للحسابات التوافقية، إذ سنستخدمها في الفصول الأخرى كافة. في القسمين الأوليين، سنتدرب على تصنيف أسئلة العدّ الأساسية والإجابة عنها. في القسمين التاليين، سندرس مبدأين: مبدأ التناظر (Bijection)، ومبدأ التكافؤ (Equivalence Principle)، وهما مهمّان لتحليل المسائل الأكثر صعوبة. في القسم الأخير، سنقدم مسائل موجودة بمبدأ التصنيف.

العدّ مقابل الإحصاء العددي

بدايةً، لنوضّح الفرق بين العدّ (Enumerating) والإحصاء العددي. إحدى طرائق العدّ الممكنة هي أن يتم إعداد قائمة كاملة ومنظمة بالأشياء التي يتم عدّها. تعرف هذه الطريقة بـ **الإحصاء العددي الكامل** (Complete Enumeration)، أو **الإحصاء العددي** (Enumeration). على سبيل المثال، إذا أردنا معرفة عدد الأعداد الصحيحة التي تقع بين 1 و 100 (ضمناً) والتي تقبل القسمة على 5 أو 6، فإنه يمكن نظمها في قائمة كما يلي:

35	30	25	24	20	18	15	12	10	6	5
66	65	60	55	54	50	48	45	42	40	36
100	96	95	90	85	84	80	78	75	72	70

إذن عدد تلك الأعداد هو 33.

الإحصاء العددي الكامل هو تقنية عدّ تُطبّق في حلّ المسائل الصغيرة، لكنها لا تستخدم للمسائل الكبيرة. إذا أردنا عدّ عدد طرق حل لوحة السودوكو[1] ذات 9×9، فإنه لا ينبغي علينا أن نضع قائمة لأن العدد سيكون تحديداً 6,670,903,752,021,072,936,960 طريقة، أي حوالي 6.6 سكستليشن*

(1) لمزيد من المعلومات حول السودوكو، طالع: https://en.wikipedia.org/wiki/Sudoku.

(*) يعني مليون مضروب في نفسه ست مرات أي 1036. (المترجم).

(Sextillion) طريقة. حتى الحاسوب الذي يمكنه إنشاء 100 بليون لوحة سودوكو في الثانية الواحدة سيستغرق ما يزيد عن 20,000 سنة لإعداد قائمة لكل لوحة لوحدها. أيضاً إذا أردت طباعة كل لوحة على قطعة ورق مربعة طولها 3 أقدام سيتطلب الأمر استخدام 15 تريليون ميل مربع من الورق، أي ما يكفي لتغطية كوكب المشتري 625 مرة.

ما نحتاجه هو معادلة تتيح لنا إيجاد الإجابة من دون الحاجة إلى إعداد قوائم كاملة، سنجد العديد منها في هذا الفصل وفي غيره. لكن الإحصاء العددي مهم لسببين؛ الأول أن استخدام الإحصاء العددي لحل مسألة صغيرة مشابهة لمسألة أكبر سيعطي تصوراً عن كيفية حل تلك المسائل الأكبر. يجب أن نستفيد من هذا الفصل على النحو الأمثل. أما السبب الآخر فهو وجود بعض المسائل الكبيرة أو المعقدة والتي يتضمن حلّها استخدام الإحصاء العددي الكامل (بواسطة الحاسوب) لبعض المسائل الفرعية المختصرة.

1.1 مسائل عدّ نموذجية ومبدأ الضرب

هدفنا في أول قسمين من هذا الفصل هو تحديد بعض أنواع مسائل العدّ المهمة ومن ثَمَّ إجراء تمارين عديدة لحلّها. فيما يلي أربع من هذه المسائل:

س1: كم عدد كلمات السر المكونة من 8 رموز الممكن استخدامها إذا كان كل رمز عبارة عن حرف من الأحرف الكبيرة A-Z أو حرف من الأحرف الصغيرة a-z أو رقم من 0-9؟

س2: بوجود تسعة لاعبين، بكم طريقة مختلفة يمكن لمدير الفريق تنظيم صفٍّ ترتيبي؟

س3: إذا كنت تلعب لعبة مطلوب فيها سحب 6 بطاقات، بتحديد ستة أرقام مختلفة تقع بين 1-40. كم بطاقة مختلفة يمكن أن تسحب؟

س4: يعرض متجر حلوى 30 نوعاً مختلفاً من الكعك، ما هو عدد الاحتمالات التي يمكن أن يرتّب بها البائع دزينة من الكعك؟

الخطوة الأولى هي تحديد الخصائص الأساسية للأشياء التي يتم عدها. بعد ذلك تضع صيغة عامة للحل.

السؤال الأول: خمّن ترتيباً للأسئلة من أصغر إجابة إلى أكبر إجابة.

في هذا الكتاب، نستخدم الرمز $[n]$ للرمز إلى المجموعة المكونة من أول n من الأعداد الصحيحة الموجبة. مثال ذلك، [4] = {1، 2، 3، 4} و [1] = {1}.

نستخدم $\mathbb{Z}$ للرمز إلى مجموعة الأعداد الصحيحة، و $\mathbb{N}$ للرمز إلى مجموعة الأعداد الطبيعية (الأعداد الصحيحة الموجبة)، و $\mathbb{Q}$ للرمز لمجموعة الأعداد النسبية، و $\mathbb{R}$ للرمز للأعداد الحقيقية.

السؤال س1: عدّ قوائم وكلمات

إن حل مسائل متشابهة لكن بصيغة مُصغّرة هو تقنية مهمة لحل المسائل. هذه صيغة مصغّرة للسؤال س1: كم عدد كلمات السر المكونة من 3 رموز الممكن تكوينها، بشرط أن يكون أول رمزين فيها إما A أو B أو g والرمز الأخير إما 5 أو 6؟

من الحلول التي سنعدّها ستظهر مثل BA5، AA6، gA6. دعنا نفكر باختيار الرموز واحداً تلو الآخر ولنرَ عدد الخيارات لكل منها، بحيث نستخلص عدد الكلمات الممكنة. الرمز الأول يجب أن يكون إما A أو B أو g؛ وعليه فإن أي كلمة ستبدأ بإحدى الطرائق الثلاث التالية:

A__	B__	g__

الرمز التالي يجب أن يكون إما A أو B أو g، إذن فإن هذا يزيد الاحتمالات بمقدار 3:

AA_	BA_	gA_
AB_	BB_	gB_
Ag_	Bg_	gg_

أما الرمز الأخير فإما أن يكون 5 أو 6، وهذا يزيد الاحتمالات بمقدار 2:

AA5	AA6	BA5	BA6	gA5	gA6
AB5	AB6	BB5	BB6	gB5	gB6
Ag5	Ag6	Bg5	Bg6	gg5	gg6

من التعداد الكامل أعلاه، نرى أن هناك 18 كلمة سر ممكنة. وقد كان ممكن الحصول على هذه النتيجة بضرب عدد الاحتمالات لكل من الرموز الثلاثة ببعضها: ‎.18 = 2 . 3 .3

السؤال 2: كم عدد كلمات السر المكونة من 4 رموز الممكن تكوينها إذا كان كل من الرموز الثلاثة الأولى إما A أو B أو g أو x والرمز الأخير عدد موجب؟

ثمة طريقة لطيفة لتصوّر حل للسؤال الأول الأصغر، وذلك باستخدام مخطط الشجرة الموضّح في الشكل 1.1. إذا كتبنا كلمة السر بالصيغة $l_1 l_2 l_3$ فإن التفرّعات على الجهة اليمنى لكل دائرة تحمل الرمز l_1 أو l_2 أو l_3 تمثّل اختيارات الرمز بعد أن يكون الرمز السابق قد تحدّد.

ينطبق نفس مبدأ العدّ على السؤال الأصلي (س1)، حيث نرغب أن تكون كلمة السر مكونة من 8 رموز مع أخذ حالة الأحرف (كبيرة وصغيرة) بالاعتبار، مثل: rQ8xt9Pb أو V93Vvd99. يمكن تمثيل كل رمز من الرموز الثمانية بإحدى 62 طريقة (26 حرفاً كبيراً، و26 حرفاً صغيراً و10 أعداد). وعليه فإن عدد كلمات السر الممكنة:

$$62 . 62 . 62 . 62 . 62 . 62 . 62 . 62 = 62^8 = 218,340,105,584,896$$

أي أن التعداد الكامل يبلغ حوالي 218 تريليون كلمة سر بلا شك.

السؤال 3: أيهما أكبر، عدد كلمات السر المكونة من أربعة رموز حيث كل رمز هو حرف من A-H، أم عدد كلمات السر المكونة من ثمانية رموز حيث كل رمز هو حرف من A-D؟

كيف يمكن عدّ القوائم أو الكلمات

كلمات السر التي قمنا بعدّها هي أمثلة على القوائم. **القائمة** (List) هي تسلسل ترتيبي للأشياء، و**القائمة**-k هي قائمة طولها k (أي أنها تتضمن عدد k من العناصر) في القائمة، الترتيب الذي تظهر به الأشياء أمر مهم. والشيء يمكن أن يظهر أكثر من مرة في القائمة إلا إذا كان ذلك ممنوعاً حسب محدّدات وشروط المسألة. كما أن القوائم تسمّى **كلمات** (Words).

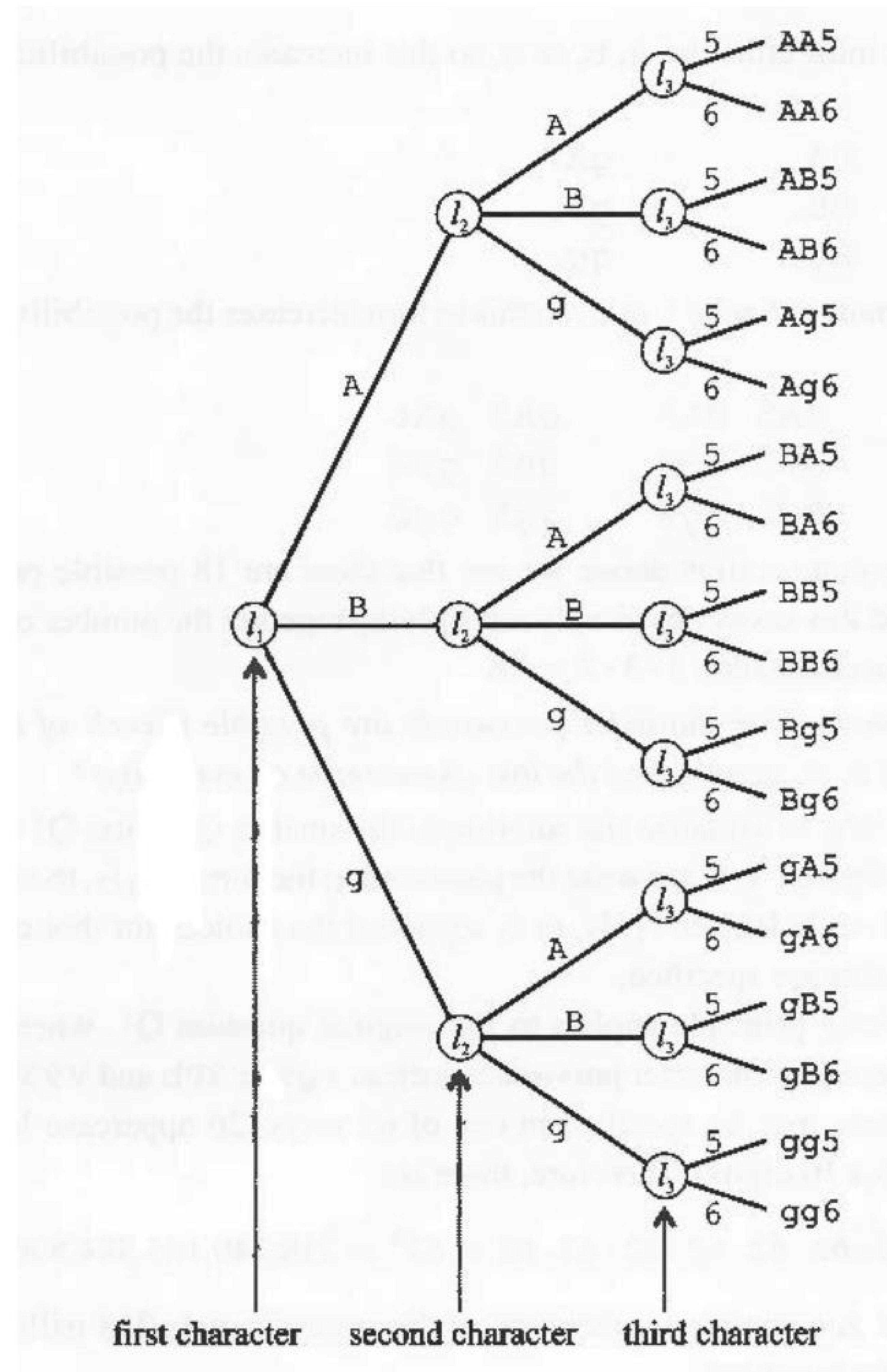
للتوضيح، تكتب القوائم أحياناً بوضع الترتيب بين أقواس وفصل عناصرها بالفاصلة. على سبيل المثال، (V, 9, 3, V, v, d, 9, 9) هي طريقة مكافئة لكتابة كلمة السر V93Vvd99.

الزوج المرتب (−3، 2) هو قائمة من عنصرين والثلاثي المرتب (x, y, z) هو قائمة من ثلاثة عناصر.

فكما نستخدم القائمة المكونة من k عنصر، كاختصار للقائمة التي طولها k ، فإننا نستخدم **المجموعة-n** كاختصار للمجموعة التي حجمها n. في السؤال س1،

كل كلمة سر هي قائمة مكونة من 8 عناصر، حيث ينتمي كل عنصر في هذه القائمة إلى المجموعة المكونة من 63 عنصراً:

$$\{A, B, C, \ldots, Z, a, b, c, \ldots, z, 0, 1, 2, \ldots, 9\}$$



الشكل 1.1: مخطط شجرة لعدّ كلمات السر المكونة من 3 رموز $l_1l_2l_3$.

في هذه الحالة، فإننا ببساطة نقول إن كل كلمة سر هي "قائمة مكونة من 8 عناصر مأخوذة من المجموعة المكونة من 62 عنصراً".

فيما يلي ملخص لما تعلمناه عن عدّ القوائم.

عد القوائم:

• مجموعة الرموز: n^k تساوي عدد القوائم المكونة من k عنصر المأخوذة من مجموعة العناصر n.

• الخصائص الأساسية: الترتيب مهم، تكرار العناصر مسموح به.

• السؤال النموذجي: بكم طريقة يمكن تكوين كلمة مكونة من k من الأحرف حيث إن عدد الخيارات لكل حرف يساوي n؟

• المعادلة:

$$n^k = n \times n \times \ldots \times n$$

وضعنا معادلة لـ n^k لأنه من المهم التمييز بين العناصر التي عددها n^k وكيفية حساب n^k. سيصبح الفرق واضحاً في نهاية هذا القسم.

السؤال 4: كوّن سؤال عدّ يكون جوابه 3^m.

مبدأ الضرب

مبدأ الضرب (Product Principle) هو طريقة عامّة للعد تُعالج مسائل العدّ التي أجبنا عليها مسبقاً. فهي طريقة مرنة وأكثر القواعد الأساسية المستخدمة على نطاق واسع في الرياضيات التوافقية.

مبدأ الضرب: عند عد القوائم المكونة من k عنصر والتي صيغتها $(l_1, l_2, \dots, l_k)$، إذا:

- يوجد c_1 طريقة لتحديد العنصر l_1 من القائمة، وكل تحديد يقود إلى قائمة مكونة من k عنصر مختلفة؛ و
- لكل عنصر l_i آخر في المجموعة، يوجد c_i طريقة لتحديد ذلك العنصر بغض النظر عن تحديد العناصر السابقة $l_1. \dots, l_{i-1}$، وأن كل عملية تحديد للعنصر l_i تقود إلى قائمة مكونة من k عنصر مختلفة،

وعليه يوجد $c_1 c_2 \dots c_k$

في سياق المخطط الشجري الشبيه بالشكل 1.1، ينطبق مبدأ الضرب عندما يكون عدد الفروع في الجهة اليمنى من كل دائرة عنوانها l_i هو نفسه، لكل i.

عدّ الأعداد الثنائية

العدد الثنائي (Binary Number) هو ترتيب من الأرقام قيمة كل منها إما 1 أو 0. كم عدد ثنائي مكون من n رقم يوجد؟

العدد الثنائي المكون من n رقم هو عدد يكون بصورة $d_1 d_2 \dots d_n$ حيث كل d_i هو 0 أو 1.

وبذا فهو مجموعة مكونة من n عنصر أُخذت من مجموعة-2، تحديداً $\{0,1\}$ وعليه فإنه يوجد 2^n عدد.

السؤال 5: كم رقم ثنائي مكون من n خانة لا تبدأ بالرقم 0؟

عدّ المجموعات الجزئية الممكنة كافة

كم مجموعة جزئية يوجد في المجموعة المكونة من n عنصر؟

فضلاً عن أنه يجيب على سؤال العدّ الأساسي، تكمن أهمية هذا المثال في طريقة استعمالنا للقوائم (الترتيب الذي يهمنا) لعد المجموعات (التي لا يهم ترتيبها). تكمن الفكرة في ترميز كل المجموعات الجزئية بعدد ثنائي عدد أرقامه n يحدد إذا كان كل عنصر في المجموعة n ينتمي إلى مجموعة جزئية.

على سبيل المثال، عندما تكون $n = 3$، والمجموعة -3 (set3-) تساوي [3]، فإننا نربط كل مجموعة جزئية من [3] بعدد ثنائي من 3 خانات كما يلي:

$\emptyset \to 000$	$\{1,2\} \to 110$
$\{1\} \to 100$	$\{1,3\} \to 101$
$\{2\} \to 010$	$\{2,3\} \to 011$
$\{3\} \to 001$	$\{1,2,3\} \to 111$

وهذا يعني أن كل مجموعة جزئية ترتبط بعدد ثنائي من 3 أرقام $d_1d_2d_3$، حيث $d_i = 1$ إذا كانت i عنصراً في المجموعة الفرعية و $d_i = 0$. يبيّن هذا أن هناك

عدد من المجموعات الجزئية للمجموعة [3] عددها مساوٍ للأعداد الثنائية المكونة من 3 أرقام، تحديداً 2^3. بشكلٍ عام، يوجد مجموعات جزئية للمجموعة المكونة من n عنصر، عددها مساوٍ لعدد الأعداد الثنائية المكونة من n أرقام وعليه يكون عدد المجموعات الجزئية 2^n للمجموعة مكوّن من n عنصر.

مجموعة جميع المجموعات الجزئية لمجموعة A تسمى بمجموعة القوى لـ A ونرمز لها برمز خاص 2^A. وسبب هذا الترميز هو جعلها بارزة $|2^A| = 2^{|A|}$، على سبيل المثال $|2^{[n]}| = 2^n$

السؤال 6: لنفرض أن $X = [100]$ وY هي مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية. جِد قيمة $|2^{X \cap Y}|$

السؤال س2: عدّ القوائم من دون تكرار

ننتقل الآن إلى السؤال س2: لنفترض وجود تسعة لاعبين، بكم طريقة مختلفة يمكن لمدير الفريق تنظيم صفّ ترتيبي؟

لنجب عن نسخة مصغّرة من السؤال أولاً، بافتراض وجود أربعة لاعبين. إذا كان اللاعبون هم A، B، C، D، فإن الترتيب سيرتبط بقائمة -4، بحيث يظهر كل حرف من هذه الأحرف مرةً واحدة على وجه التحديد. وعليه فإن القائمة ستبدأ بالطرائق الأربع التالية:

A___ B___ C___ D___

اللاعب الثاني في الصف يمكن أن يكون أي شخص غير اللاعب الأول، وهذا يزيد الاحتمالات بـ 3:

AB..	BA..	CA..	DA..
AC..	BC..	CB..	DB__
AD..	BD..	CD..	DC..

اللاعب الثالث يمكن أن يكون أي شخص غير اللاعبين الأول والثاني، وعليه فإن الاحتمالات تزيد بـ 2:

ABD-	ABC-	BAD-	BAC-	CAD-	CAB-	DAB-	DAC-
ACB-	ACD-	BCA-	BCD-	CBA-	CBD-	DBA-	DBC-
ADB-	ADC-	BDA-	BDC-	CDA-	CDB-	DCA-	DCB-

أما اللاعب الأخير فيجب أن يكون اللاعب (الوحيد)

المتبقي الذي لم يدرج في القائمة، فإكمال النمط الذي استخدم في ترتيب القائمة،

سنقول بأن الاحتمالات المتبقية تزيد بمقدار 1:

ABCD	ABDC	BACD	BADC	CABD	CADB	DABC	DACB
BCAD	BCDA	BCAD	BCDA	CBAD	CBDA	DBAC	DBCA
ADBC	ADCB	BDAC	BDCA	CDAB	CDBA	DCAB	DCBA

وإذن ثمة 24 طريقة ممكنة لترتيب صف من أربعة لاعبين.

يقترح الحساب التوافقي بأنه يمكن حساب ذلك كـ 4 . 3 . 2 . 1 = 24.

يرمز لعملية ضرب 4 . 3 . 2 . 1 بـ !4 ويُقرأ "مضروب 4".

السؤال 7: لديك مجموعة كتب مكونة من 6 كتب مختلفة. بكم طريقة يمكنك ترتيب ثلاثة منها على رفّ؟ مع الأخذ بالاعتبار أن ترتيب الكتب من اليسار إلى اليمين مهم.

يمكننا تطبيق نفس الطريقة المستخدمة في السؤال س2. يوجد تسعة خيارات للاعب الأول، وثمانية خيارات للاعب الثاني وسبعة خيارات للاعب الثالث وهكذا. إجمالاً، يوجد:

$9! = 9 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 362{,}880$ طريقة مختلفة.

بشكلٍ عام، ترمز $n!$ لحاصل ضرب الأعداد الصحيحة الواقعة بين 1 و n. علماً بأن !0 دائماً يساوي 1.

عدّ كلمات السر مرة أخرى

كم عدد كلمات السر في السؤال س1 والتي لا يوجد فيها رموز مكررة؟

هذا يعني أن كلمة سر كـ Gh64Fh4Z لن يسمح بها، لكن كلمة سر كـ oqwei9VQ ستبقى في القائمة. لايزال لدينا 62 خياراً لاحتمالية الرمز الأول، لكن خيارات احتمالية الرمز الثاني ستصبح 61 (أي رمز غير الرمز الأول)، و60 خياراً لاحتماليات الرمز الثالث (أي رمز غير الرمزين الأول والثاني) وهكذا. إجمالاً سيكون عدد كلمات السر:

$$62 \,.\, 61 \,.\, 60 \,.\, 59 \,.\, 58 \,.\, 57 \,.\, 56 \,.\, 55 = 136{,}325{,}893{,}334{,}400$$

يرمز لعملية الضرب في الجهة اليسرى $(62)_8$ ويعني أخذ العناصر الثمانية الأولى$62^{(*)}$! بدءاً بـ 62. في هذه الحالة فإننا نعدّ قوائم من ثمانية عناصر دون تكرار من مجموعة−62. يمكن التعبير عن ذلك بطريقة أخرى كما يلي:

$$(62)_8 = \frac{62!}{(62-8)!} = \frac{62!}{54!}$$

بشكلٍ عام، $(n)_k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$، أو بصورة مكافئة $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$. لاحظ أن $(n)_n = n!$

السؤال 8: لدى مدرب فريق كرة طائرة 14 لاعباً، لكنه يريد اختيار 10 لاعبين فقط. كم عدد احتمالات المجموعات الممكن تكوينها؟

(*) 62! تقرأ عاملي (Factorial) (المترجم).

عدّ مهام الفريق

يتضمن فريق جمباز من سبعة أعضاء. يجب أن يُخصص المدرب عضواً واحداً للمنافسة في كل ألعاب المنافسات النهائية الأربع (الحركات الأرضية، عارضة التوازن، حصان القفز، المتوازي مختلف الارتفاعات). ما هو عدد التخصيصات الممكنة إذا سُمح باشتراك اللاعب الواحد في أكثر من لعبة؟ كم عدد التخصيصات الممكنة إذا كان لا يسمح لأي لاعب بالمنافسة في أكثر من لعبة؟

رقّم أعضاء الفريق من A إلى G، ثم حدد التخصيصات بقائمة-4 مثل $DCGC$، حيث يرمز الرمز الأول للاعب الذي سينافس في الحركات الأرضية (أي D حسب المثال)، ويرمز للاعب الذي سينافس في عارضة التوازن بـ (C)، ويرمز للاعب الذي سينافس في حصان القفز بـ (G)، ويرمز للاعب الذي سينافس في المتوازي مختلف الارتفاعات بـ (C) أيضاً. الإجابة عن السؤال الأول هي 7^4، إذ إن أي تخصيص سيكون قائمة-4 مأخوذة من مجموعة-7. الإجابة عن السؤال الثاني هي $(7)_4$، إذ إن أي تخصيص هو قائمة-4 دون تكرار مأخوذة من مجموعة-7. أما القيم الدقيقة فهي:

$$7^4 = 2401 \quad \text{و} \quad (7)_4 = 7\,.\,6\,.\,5\,.\,4 = 840$$

كيفية عدّ القوائم بدون تكرار

تُعرف القوائم التي لا تتضمن تكراراً **بالتبادل (Permutation)** أحياناً. إذا كان لدينا قائمة طولها k، فإنها تكون تبادل-k. عندما عددنا كلمات السر في السؤال

س1 والتي لا تتضمن رموزاً متكررة، فقد عددنا تبادل-8 من المجموعة-26. التبادل-n من المجموعة مكونة من n عنصر يُسمّى **تبادل في مجموعة (Permutation of the Set)**. هذا "تبادل كامل" في المجموعة، كما في حالة ترتيب مجموعات من أربعة لاعبين، حيث تكون تبادلات المجموعة {A, B, C, D}. فيما يلي ملخص لذلك:

عدّ القوائم بدون تكرار:

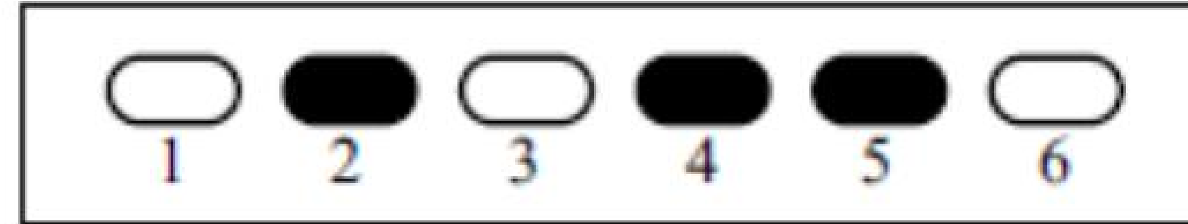
- الرمز: $(n)_k$ يساوي عدد القوائم المكوّنة من عدد k من العناصر دون تكرار، مأخوذة من المجموعة مكونة من n من العناصر.
- الخصائص الأساسية: الترتيب مهم، تكرار العناصر غير مسموحٍ به.
- السؤال النموذجي: بكم طريقة يمكن تكوين كلمة مكونة من عدد k من الأحرف، حيث إن عدد الخيارات لكل حرف يساوي n ولا يظهر أي حرف أكثر من مرة.
- المعادلات:
- $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ أو $(n)_k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$

كحالة خاصة، $n!$ يساوي عدد القوائم ذات عدد عناصر-n دون تكرار مأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n. وعليه تساوي عدد التبادلات للمجموعة مكونة من n عنصر.

السؤال س3: عدّ المجموعات الجزئية من مجموعة

يمكننا الآن الإجابة عن السؤال س3: لنفرض أنك تلعب لعبةً مطلوب فيها سحب 6 بطاقات، بتحديد ستة أرقام مختلفة تقع بين 1-40. كم بطاقة مختلفة يمكن أن تسحب؟

بدايةً نختبر حالة سحب ثلاث بطاقات تتضمن أرقاماً من 1-6. للتوضيح، لا يهم الترتيب الذي ترتّب فيه الأرقام. على سبيل المثال، لسحب الأرقام 2-4-5، عليك أن تملأ هذه الأشكال البيضاوية على البطاقة:



وعليه فإن البطاقة تكون مجموعة جزئية حجمها 3 من المجموعة {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

فيما يلي تبادل كامل لكلّ البطاقات الممكنة. لضمان أننا لن نغفل أي بطاقة، نتبع طريقة منظّمة لترتيب كل البطاقات التي تتضمن الرقم 1 كأقل قيمة:

{1, 3, 4}	{1, 2, 6}	{1, 2, 5}	{1, 2, 4}	{1, 2, 3}
{1, 5, 6}	{1, 4, 6}	{1, 4, 5}	{1, 3, 6}	{1, 3, 5}

ثم ضع البطاقات التي تتضمن الرقم 2 كأقل قيمة:

{2, 3, 4} {2, 3, 5} {2, 3, 6} {2, 4, 5} {2, 4, 6} {2, 5, 6}

ثم ضع البطاقات التي تتضمن الرقم 3 كأقل قيمة:

{3, 4, 5} {3, 4, 6} {3, 5, 6}

أخيراً، ضع البطاقات التي تتضمن الرقم 4 كأقل قيمة: {4, 5, 6}. إجمالي عدد البطاقات هو 20.

الرمز $\binom{n}{k}$ ويُقرأ "n فوق k" إلى عدد المجموعات الجزئية k من المجموعة مكونة من n عنصر. وعليه فإن جواب سؤال سحب البطاقات البسيط هو $\binom{6}{3}$ وتساوي 20 بالتبادل الكامل. الصيغة العامة هي:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ أو } \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$$

فيما يلي تبرير موجز. دعنا نعدّ تباديل-k لمجموعة مكونة من n عنصر. يوجد $(n)_k$ منها. ثمة طريقة بديلة لعدها تتضمن تحديد عناصر k للمجموعة-n في التباديل (يوجد $\binom{n}{k}$ طريقة لعمل ذلك). باستخدام مبدأ الضرب، يوجد $\binom{n}{k}.k!$ من هذه التباديل. وعليه فإن $(n)_k = \binom{n}{k}.k!$ أو $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$. راجع القسم 4.1 للتعرّف على طريقة مختلفة نوعاً ما.

يمكننا الآن إكمال السؤال س3. الإجابة هي $\binom{40}{6}$ لأن أي بطاقة ترتبط بحجم المجموعة الجزئية السداسية من [40]. وعليه يوجد حوالي 3.8 مليون بطاقة:

$$\binom{40}{6} = \frac{(40)_6}{6!} = \frac{40\,.\,39\,.\,38\,.\,37\,.\,36\,.\,35}{6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1} = 3{,}838{,}380$$

السؤال 9: لنفترض أنك وزّعت لكل لاعب خمس بطاقات من مجموعة أوراق لعب معيارية من 52 بطاقة. كم عدد الاحتمالات المختلفة؟ (ترتيب استلام البطاقات غير مهم).

عد الأعداد الثنائية

كم عدد الأعداد الثنائية المكونة من n خانة التي تكون فيها k الرقم 1؟

فيما يلي إحصاء كامل للأعداد الثنائية من 5 خانات التي تحتوي رقمي 1:

11000	10100	10010	10001	01100
01010	01001	00110	00101	00011

لتحديد العدد، يلزم تحديد مواقع رقمي 1 فقط لأن كل الخانات الباقية تكون 0. باستخدام مجموعة-2 لتتبّع مواضع الرقم 1 نحصل على التطابقات التالية:

11000→{1,2}	01010→{2,4}
10100→{1,3}	01001→{2,5}
10010→{1,4}	00110→{3,4}
10001→{1,5}	00101→{3,5}
01100→{2,3}	00011→{4,5}

وعليه يوجد أعداد ثنائية مكونة من 5 خانات تتضمن رقمي 1 تحديداً بعدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من المجموعة-5، إذن يوجد $10 = \binom{5}{2}$.

بشكلٍ عام، عدد الأعداد الثنائية المكونة من n خانة التي يتكرر فيها الرقم 1 عدد k من المرات تحديداً يساوي $\binom{n}{k}$.

السؤال 10: فسّر لماذا يساوي عدد الأعداد الثنائية المكونة من 10 خانات يتكرر فيها الرقم 1 ثلاث مرات تماماً، عدد الأعداد الثنائية المكونة من 10 خانات يتكرر فيها الرقم 1 سبع مرات تماماً.

كيفية عدّ المجموعات الجزئية من مجموعة

تسمّى الأعداد $\binom{n}{k}$ **معاملات ثنائية الحد** (Bionomial Coefficients)، نسبة إلى مبرهنة ذات الحدين (Bionomial Theorem) (طالع نظرية 2.2.2 في صفحة 63). يستخدم مصطلح الاتحاد (Combination) أحياناً للإشارة إلى مجموعة جزئية أو للإشارة إلى مجموعة غير مرتبة من الأشياء المختلفة.

عدّ المجموعات الجزئية:

- الترميز: $\binom{n}{k}$ تساوي المجموعات الجزئية المكونة من عناصر-k المأخوذة من مجموعة العناصر-n.
- الخصائص الأساسية: الترتيب غير مهم، تكرار العناصر غير مسموح به.
- أسئلة نموذجية: كم عدد الأعداد الثنائية المكونة من عدد n من العناصر يتكرر فيها الرقم 1 عدد k من المرات؟ بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة من k أشخاص من مجموعة تتكون من n أشخاص؟
- المعادلات:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{أو} \quad \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$$

السؤال 11: بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة من 20 شخصاً من مجموعة تتكون من 435 شخصاً؟

السؤال س4: عدّ المجموعات التكرارية

بالنسبة إلى السؤال س4: يعرض متجر 30 نوعاً مختلفاً من كعك الدونات، بكم ترتيبٍ مختلف يمكن تشكيل دزينة من الدونات؟

أولاً نختزل المسألة إلى نسخة أصغر تتضمن ترتيباً من 3 كعكات من متجر يعرض 4 أنواع مختلفة. عند ترتيب الدونات، كل ما يهمّنا هو عدد الدونات من كل نوعٍ نريده. أما تسلسلها فلا يهم. كما نفترض عدم وجود اختلافات بين الدونات من نوعٍ محدد. وعليه فإن المسألة تنص على أن الترتيب غير مهم (كمجموعة وليس كقائمة)، لكن التكرار مسموح به (كقائمة وليس كمجموعة).

دعنا نقول أن المتجر يعرض الأنواع التالية: الكريمة (B)، الشوكولاتة (C)، الكاسترد (G)، المربّى (M)، إذن الترتيبات الممكنة هي:

{B,B,B}	{B,C,C}	{B,C,M}	{C,C,M}	{G,G,G}
{B,B,C}	{B,G,G}	{B,G,M}	{C,G,G}	{G,G,M}
{B,B,G}	{B,M,M}	{C,C,C}	{C,M,M}	{G,M,M}
{B,B,M}	{B,C,G}	{C,C,G}	{C,G,M}	{M,M,M}

تُعرف هذه بالمجموعات التكرارية، وهي مجموعات يكون فيها التكرار مسموحاً. نستخدم الأقواس المعقوفة نفسها { } لتحديد المجموعات ولتحديد

المجموعات التكرارية. يجب أن يكون وجود المجموعة التكرارية واضحاً من السياق[2].

يرمز $\left(\binom{n}{k}\right)$ إلى عدد المجموعات التكرارية k المأخوذة من مجموعة مكونة من n عنصر. يشير هذا التعبير الأخير إلى أن العناصر k في المجموعة الجزئية وكل عنصر ينتمي إلى مجموعة مكونة من n عنصر محدّدة. الإجابة عن النسخة المصغّرة من سؤال كعك الدونات الذي ورد أعلاه هو $\left(\binom{4}{3}\right)$ ويساوي 20 بالعدّ الكامل. الصيغة العامة هي:

$$\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{k+n-1}{k}$$

ثانياً نفسّر الصيغة للحالة الخاصة $n = 4$ و $k = 3$.

اختبر الترابطات التالية بين الأعداد الثنائية وترتيب كعك الدونات.

العدد الثنائي	ترتيب الدونات	العدد الثنائي	ترتيب الدونات
000111	{B,B,B}	100011	{C,C,C}
001011	{B,B,C}	100101	{C,C,G}
001101	{B,B,G}	100110	{C,C,M}
001110	{B,B,M}	101001	{C,G,G}
010011	{B,C,C}	101100	{C,M,M}
011001	{B,G,G}	101010	{C,G,M}
011100	{B,M,M}	110001	{G,G,G}

(2) يستخدم بعض المؤلفين محدّدات مختلفة كـ < > أو [ ] للرمز للمجموعات التكرارية.

{G,G,M}	110010	{B,C,G}	010101
{G,M,M}	110100	{B,C,M}	010110
{M,M,M}	111000	{B,G,M}	011010

لاحظ أنه تمّ إدراج جميع المجموعات التكرارية الثلاثية من المجموعة الرباعية {B,C,G,M}، بالإضافة إلى جميع الأعداد الثنائية المكونة من 6 خانات والتي يتكرر فيها 0 ثلاث مرات. في أي عدد ثنائي شبيه، يكون عدد الأصفار التي وردت قبل أول رقم 1 يساوي عدد B في الترتيب، عدد الأصفار التي تقع بين الرقمين الأول والثاني، يساوي عدد C في الترتيب، وهكذا دواليك. على سبيل المثال، 101100 ليس فيه أصفار قبل الرقم 1 الأول (وعليه لا يوجد B في الترتيب)، في حين يوجد 0 واحد يقع بين الرقمين الأول والثاني (أي C واحدة)، ولا يوجد أصفار بين الرقمين 1 الثاني والثالث (لا يوجد G)، ويوجد صفران بعد الرقم الثالث (يوجد M اثنين).

وبناءً على ذلك، ترتبط بالمجموعة {C,M,M}.

إذن كل عدد ثنائي فيه k تساوي 3 أصفار و$n-1=4-1$ من الرقم 1. يرتبط عدد الأصفار بعدد كعكات الدونات الأرقام 1 يرتبط بالفواصل بين الكعكات من الأنواع المختلفة.

(لاحظ أننا استخدمنا فواصل أقل من عدد الأنواع المتوفرة). يوجد $\binom{3+4-1}{3}=\binom{k+n-1}{k}$ عدداً ثنائياً فيه $k+n-1=6$ خانات و$k=3$ أصفار

تحديداً، وبناءً عليه سيكون عدد ترتيبات قطع الدونات كبيراً. تنطبق الفكرة ذاتها بشكلٍ عام لبيان أن $\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{k+n-1}{k}$.

السؤال 12: إذا أُعطيت العدد الثنائي 10001101010011، كوّن مجموعة جزئية يمكن أن يرتبط بها العدد ضمن نوع الارتباط الذي أوضحناه تواً.

إجابة السؤال س4 هي $\left(\binom{30}{12}\right)$ لأن أي ترتيب يرتبط بمجموعة جزئية مأخوذة من المجموعة [30] حجمها 12. وعليه يكون عدد الترتيبات 7.9 بليون ترتيب.

$$\left(\binom{30}{12}\right) = \binom{12+30-1}{12} = \binom{41}{12} = 7{,}898{,}654{,}920$$

السؤال 13: لنفترض أن صديقك طلب منك الذهاب إلى نفس المتجر لشراء دزينة من كعك الدونات، وطلب شراء 3 قطع من دونات الكريمة في حين ترك أمر اختيار الأنواع الباقية لك. كم عدد الترتيبات المختلفة الممكنة؟

توزيع الحلوى

لنفترض أن معك ثمان قطع حلوى حمراء اللون تريد توزيعها على 12 طفلاً. بكم طريقة يمكنك توزيعها؟

سجّل كيفية توزيعنا للحلوى باستخدام المجموعات المتعددة (Multiset). على سبيل المثال، المجموعة $\{2, 2, 5, 5, 5, 5, 10, 12\}$ تعني أننا نعطي قطعتي حلوى

للطفل 2 وأربع قطع للطفل 5 وقطعة واحدة لكل من الطفلين 10 و12. بهذه الطريقة، أي توزيع هو عبارة عن مجموعة متعددة من 8 عناصر مأخوذة من المجموعة ذات 12 عنصراً. عدد طرق توزيع قطع الحلوى هو

$$\left(\binom{12}{8}\right) = \binom{8+12-1}{8} = \binom{19}{8} = 75{,}582$$

كيفية عدّ المجموعات المتعددة

الرمز $\left(\binom{n}{k}\right)$ مفيد، إذ إن الأقواس المزدوجة تذكّرنا بأن التكرار مسموح به.

عدّ المجموعات المتعددة:

- **الرمز**: $\left(\binom{n}{k}\right)$ يساوي عدد المجموعات المتعددة المكوّنة من عدد عناصر k، مأخوذة من مجموعة مكونة من n من العناصر.

- **خصائص أساسية**: الترتيب غير مهم، تكرار العناصر مسموح به.

- **الأسئلة النموذجية**: بكم طريقة يمكننا وضع ترتيب لقطع الدونات عددها k إذا كان المتجر يبيع أنواعاً مختلفة عددها n؟ بكم طريقة يمكننا توزيع قطع حلوى متطابقة عددها k على أطفال عددهم n؟

- **المعادلة**:

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{k+n-1}{k}$$

التجميع معاً

دعنا نتعرّض للمزيد من أسئلة العدّ باستخدام ما نعرفه حتى الآن. في هذا السياق، المهارة الجوهرية هي القدرة على تحديد ما إذا كنّا بحاجة لعدّ قوائم أو تباديل أو مجموعات جزئية أو مجموعات متعددة.

(أ) يتنافس أربعة مرشحين للحصول على منصب عضو مجلس بلدي في مدينة. إذا كان عدد الناخبين المؤهلين للتصويت 1180، كم عدد الأصوات النهائية المختلفة التي يمكن التصريح عنها في الأخبار؟

⇐ لنسمِّ المرشحين A وB وC وD. واحدة من طرق تسجيل الأصوات النهائية استخدام مجموعة متعددة حجمها 1180، حيث يكون كل عنصر إما A أو B أو C أو D. في الحقيقة، ترتبط مثل هذه المجموعة المتعددة بصندوق يحتوى على 1180 ورقة اقتراع تحديداً، حيث إن كل ورقة تحمل الرمز A أو B أو C أو D فقط. وعليه فإن عدد الأصوات النهائي يساوي عدد المجموعات المتعددة المكونة من 1180 عنصراً المأخوذة من مجموعة من 4 عناصر، وهذا يساوي:

$$\left(\!\binom{4}{1180}\!\right) = \binom{1180+4-1}{1180} = \binom{1183}{1180} = 275{,}233{,}231$$

(ب) في عصر ما قبل الهواتف الخلوية، كم كان عدد أرقام الهواتف المكونة من 10 خانات في الولايات المتحدة؟ تتكون هذه الأرقام من 3 خانات هي رمز المنطقة، متبوعة بـ 3 خانات رمز البدالة متبوعة بالرقم المكون من 4 خانات. لا يمكن أن يبدأ رمز المنطقة أو رمز البدالة بـ 0 أو 1، لكن الخانة الوسطى من رمز المنطقة يجب أن تكون إما 0 أو 1.

⇐ في رقم الهاتف، الترتيب مهم وتكرار الأرقام مسموح. اكتب رقم هاتف بشكل قائمة من 10 عناصر $a_1a_2a_3e_1e_2e_3d_1d_2d_3d_4$. يوجد 8 اختيارات لـ a_1 (أي رقم بين 2 و 9)، وخياران لـ a_2 (0 أو 1) و 10 خيارات لـ a_3 و 8 خيارات لـ e_1 و 10 خيارات لكل من الأرقام الستة الباقية. يوجد:

$$8 . 2 . 10 . 8 . 10^6 = 1{,}280{,}000{,}000$$

وهذا يساوي 1.28 بليون رقم هاتف.

السؤال 14: رمز المنطقة لمدينة سبرينغ فيلد في ماساشوستس هو 413، كم عدد البدالات المختلفة، كحد أدنى، الذي يضمن أن أن يحصل كل مواطن من المواطنين وعددهم 160,000 في المدينة على رقم هاتف خاص به؟

(ج) لنفترض أن k و n عددان صحيحان يحققان $1 \leq k \leq n$. كم عدد المجموعات الجزئية $[n]$ التي فيها k أكبر عنصر؟

⇐ انظر أولاً لحالة خاصة، مثل $n = 6$ و $k = 4$. وهذه هي المجموعات الجزئية من المجموعة [6] التي تحتوي 4 كأكبر عناصرها:

{4} {1,4} {2,4} {3,4}

{1,2,4} {1,3,4} {2,3,4} {1,2,3,4}

بإهمال العنصر 4 الذي يجب أن يكون موجوداً في كل مجموعة جزئية، نرى أننا قد قمنا بإدراج جميع المجموعات الجزئية من [3] ببساطة، بحيث يوجد فيها $2^3 = 8$. الإجابة عن السؤال الأصلي هي 2^{k-1}، لأن أي مجموعة جزئية من $[n]$ فيها k أكبر عنصر، تتكون من كل من k مع أي مجموعة جزئية من $[k-1]$.

(د) يتضمن قفل الأرقام من 0 إلى 29 مرتبة في دائرة تحيط بقرص. تتكون مجموعة الأقفال من أربعة أرقام، لكن لا يجوز أن يكون رقمان متجاوران أو متماثلان على القرص متعاقبين أو متسلسلين في الأرقام الأربعة (0 و 29 متعاقبين). كم عدد التجميعات (التوليفات) الممكنة لأرقام الأقفال؟

⇐ اكتب تجميعاً كقائمة من أربعة عناصر (d_1, d_2, d_3, d_4). يوجد 30 خياراً لـ d_1. لكلٍ من هذه الخيارات يوجد 27 خياراً لـ d_2 لأنها لا يمكن أن تساوي d_1 أو الرقمين المجاورين لها. بطريقة مشابهة يوجد 27 خياراً لكل من d_3 وd_4. وعليه فإن عدد التجميعات الممكنة يكون $30 \,.\, 27^3 = 590{,}490$.

(هـ) يتنافس خمسون عداءً في سباق الضاحية، لكن الصحف لا تنشر سوى أسماء العدائين الذين يكملون السباق ويحتلون المراكز الثلاثة الأولى. كم ترتيباً مختلفاً يمكن أن تنشر الصحيفة؟

⇐ إذا رقّمنا المتسابقين من 1 إلى 50، فإن قائمة من ثلاثة عناصر مثل (2، 34، 37) ستشير إلى أن المتسابق 34 ينهي السباق أولاً والمتسابق 37 ينهيه ثانياً والمتسابق 2 ينهيه ثالثاً. الترتيب الذي ينهون به السباق مهم، والتكرار غير مسموح به طالما أنه لا يمكن لأي متسابق أن ينهي السباق مرتين. وعليه فإننا نعدّ القوائم المكونة من ثلاثة عناصر من دون تكرار مأخوذة من مجموعة مكونة من 50. وعليه فإن عدد القوائم المختلفة الممكنة يكون $(50)_3 = 50 \,.\, 49 \,.\, 48 = 117{,}600$.

السؤال 15: إذا كانت الصحيفة ستنشر ترتيب وصول كل العدائين الذين ينهون السباق، كم ترتيب ممكن لذلك؟

(و) كم عدد كلمات التسلسلات المتناظرة المكونة من 7 أحرف التي يمكن تكوينها من الأحرف A-Z؟ إذ إن كلمات التسلسل المتناظر (Palindrome) هي ألفاظ لا تتغير إذا قُرأت طرداً أو عكساً، مثل *RACECAR* و*GHHTHHG*

⇐ تحدد كلمات التسلسل المتناظر تماماً بواسطة أحرفها الأربعة الأولى. يوجد 26 خياراً لكلٍ من الأحرف الأربعة الأولى، إذن يوجد $26^4 = 456{,}976$ كلمة تسلسل متناظر.

السؤال 16: أجب عن نفس السؤال لكن هذه المرة افترض أن كلمات التسلسلات المتناظرة تتكون من 8 أحرف. عمّم القاعدة للكلمات التي تتكون من n أحرف.

الرموز مقابل الأرقام

إن فهم ماهية عدّ n^k و $(n)_k$ و $\binom{n}{k}$ و$\left(\binom{n}{k}\right)$ أكثر أهمية من معرفة كيفية حسابها. على سبيل المثال، كتابة 62^8 مع الإجابة النهائية

218,340,105,584,896

تبيّن نوع الأشياء الأساسية التي يتم عدّها – قوائم من ثمانية عناصر مأخوذة من مجموعة مكونة من 62 عنصراً. وعليه فإن 62^8 يعطينا لمحة مهمة عن طريقة الحل. ومثال ذلك فإن كتابة $\binom{40}{6}$ مع 3,838,380 تبيّن أن المسألة محددة بعدّ مجموعات جزئية مكونة من 6 عناصر مأخوذة من مجموعة مكونة من 40 عنصراً. سنتّبع هذه الممارسة في فصول هذا الكتاب كلها.

ملخّص

في هذا القسم، قدّمنا أربع مسائل عدّ متعارف عليها. تتضمن كل مسألة ترتيب الأشياء k بحيث يتم اختيار كل عنصر من مجموعة محدّدة حجمها n. الترتيب قد

يكون مهماً أو غير مهم في تنظيم الأشياء، وقد يسمح بتكرار الأشياء أو قد لا يكون ذلك مسموحاً به. كما تمّ تقديم استخدام الرموز في هذا القسم. فيما يلي الإجابات عن كلٍ من المسائل الأربع.

	الترتيب مهم	الترتيب غير مهم
التكرار مسموح به	n^k	$\left(\binom{n}{k}\right)$
التكرار غير مسموح به	$(n)_k$	$\binom{n}{k}$

إن مفتاح تحليل مسائل العدّ الأساسية هو فهم أي من الحالات الأربع يمكن تطبيقها. سيكون مقبولاً، بل من الأفضل، ترك الإجابة عن مسألة عدّ بدلالة الرموز المبيّنة في الجدول.

تمارين

1. كم عدد التذاكر الممكنة في كل من عمليات اليانصيب التالية؟ وأي يانصيب منها يقدّم أفضل فرصة للفوز؟

(أ) اختيار ستة أرقام من 1-16، يمكن اختيار رقم أكثر من مرة واحدة، والترتيب لا يهم.

(ب) اختيار خمسة أرقام مختلفة من 1–25 والترتيب لا يهم.

(ج) اختيار أربعة أرقام مختلفة من 1–18 والترتيب الذي تحدد الأرقام به مهم.

2. إذا ألقيت قطعة نقود 20 مرة وسجّلت ترتيب ظهور الصورة والكتابة:

(أ) ما هو عدد الترتيبات التي يمكن الحصول فيها على الصورة (على الأقل) في عملية الإلقاء #1 و #4 و#7 و #13؟

(ب) ما هو عدد الترتيبات التي يظهر فيها نفس عدد الصور والكتابة؟

3. قم بعدّ الأعداد المكونة من n خانة من الأنواع التالية:

(أ) **الأعداد الثُلاثيّة**: كل خانة تكون إما 0 أو 1 أو 2.

(ب) **الأعداد الثُمانيّة**: كل خانة تكون إما 1، 2، 3، 4، 5، 6، أو 7.

(ج) **الأعداد السداسي عشرية**: كل خانة تكون إما 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، A، B، C، D، E أو F.

4. (راجع التمرين السابق)، كم عدد الأعداد السداسي عشرية المكونة من 16 خانة التي تبدأ وتنتهي بـ F؟ كم عدد الأعداد الثمانية المكونة من 8 خانات والتي تبدأ وتنتهي برقم زوجي؟

5. بكم طريقة يمكنك اختيار مجموعة من 15 قطعة نقود من كيس يحتوي قطع أنصاف الدينار، وأرباع الدينار، والعشرة قروش؟ (افترض أنه لا يمكن تمييز كل فئة من هذه الفئات).

6. في سحب اليانصيب المكوّن من 6 أرقام من مجموعة الأرقام 1–40، ستفوز بجائزة المباراة الرابعة إذا كانت 4 من الأرقام الستة التي تسحبها موجودة في التذكرة

الفائزة. في سحب اليانصيب، كم عدد التذاكر المختلفة التي يمكن أن تفوز بجائزة المبارة الرابعة؟

7. كم عدد كلمات السر المكونة من 4 رموز الممكن تكوينها إذا أُخذ كل رمز من مجموعة مكونة من n عناصر؟ ما هو أصغر n يضمن تكوين بليون كلمة سر مختلفة على الأقل؟ أجب عن نفس السؤالين لكن افترض أن كلمة السر تتكون من 8 رموز.

8. لنأخذ رقم الهاتف 3447–289. كم رقم هاتف حرفي يمكن تكوينه من هذا العدد باستخدام الأحرف الموجودة على أزرار الهاتف؟ مثلاً، BUY-EGGS هي إحدى الاحتمالات و ATX-DIGR احتمال آخر. أجب عن نفس السؤال إذا أتيحت لك فرصة عدم تغيير الأرقام، مثل C8Y-F4IP.

9. كم عدد المجموعات الجزئية من [20]...

(أ) التي فيها أصغر عنصر 4 وأكبر عنصر 15؟

(ب) التي لا تتضمن أي أرقام زوجية؟

(ج) التي حجمها 10 ولا تحتوي أي رقم أكبر من 17؟

10. تتكون لوحة أرقام السيارات في ولاية ماريلاند من 3 أحرف يتبعها 3 أرقام. كم عدد التوليفات الممكنة؟ تفترض قواعد اللياقة أن بعض تجميعات

الأحرف الثلاثة غير مسموح بها. لكل تجميعات الأحرف هذه غير المسموحة، كم عدد لوحات السيارات التي يجب أن تزال من التداول؟

11. قم برمي خمس قطع نرد سداسية الأوجه متطابقة، سجّل القيم التي تظهر من اليسار إلى اليمين. على سبيل المثال، 22245 تعني ظهور 2 ثلاث مرات و4 مرة واحدة و5 مرة واحدة. كم عدد النتائج الممكنة؟ كم عدد الحالات التي تظهر فيها كل الأرقام مختلفة؟

12. كم منطقة مختلفة يوجد في مخطط فين، التي تتضمن n مجموعات متقاطعة زوجية؟

13. كم عدد التباديل المكونة من 6 أرقام المأخوذة من مجموعة [15] تكون أرقامها مرتبة تزايدياً؟

14. كم عدد المسائل الحسابية الممكنة من الشكل التالي؟ عليك أن تستخدم الأرقام من 1 إلى 9، بحيث يجب أن تظهر بترتيب عددي من اليسار إلى اليمين ويمكنك استخدام أي تجميعات من حرف C ورمزي + و × كيفما تريد، طالما أن التجميع ينتج تعبيراً حسابياً منطقياً. على سبيل المثال، هذه ثلاثة احتمالات 1234+5×6×78+9 و123456+789 و123456789، لكن 1××234567+89 غير مسموح.

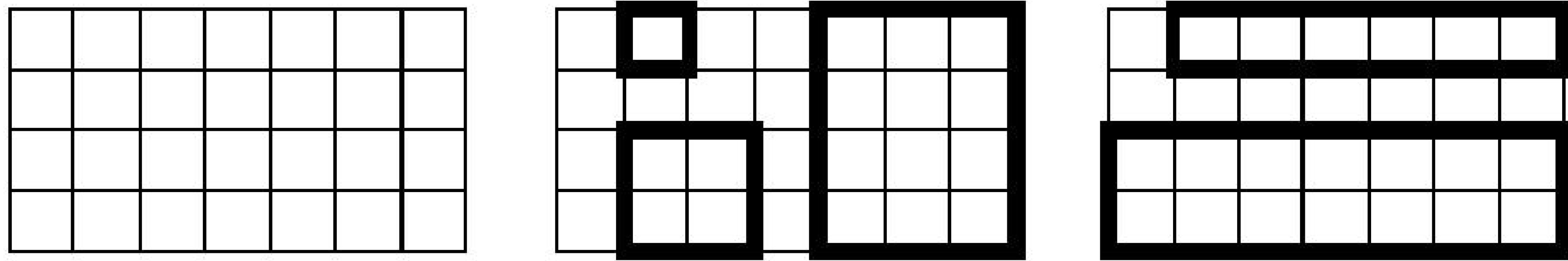
15. بكم طريقة يمكنك توزيع 16 قطعة حلوى متطابقة على 5 أطفال، بحيث يأخذ كل طفل قطعة واحدة على الأقل؟ عمّم الطريقة بدلالة عدد قطع الحلوى k وعدد الأطفال n.

16. كم عدد التباديل على المجموعة [9] لا يكون فيها أرقام فردية متجاورة؟ على سبيل المثال، 385164927 غير مسموح لأن 5 و1 متجاوران.

17. جد عدد القوائم المكونة من 3 عناصر على شكل (x_1, x_2, x_3)، حيث يكون كل x_n عدداً صحيحاً غير سالب و $x_1 + x_2 + x_3 = 10$.

18. تعقد أستاذة جامعية امتحاناً تطلب فيها من الطلاب الإجابة عن أي خمسة أسئلة من ثمانية أسئلة. بكم طريقة يمكن للطلاب اختيار الأسئلة؟

19. تظهر الصورة التالية لوحة شطرنج 4×7 إلى اليسار. كم مستطيلاً مختلفاً تحوي؟ ترى أيضاً في الشكلين إلى اليمين خمسة أمثلة مختلفة للمستطيلات المحتملة التي ينبغي عليك عدّها.



20. (من نظرية القياس التي قدّمها بول ر. هالموس (Paul R. Halmos) وسبرنغير – فيرلاغ (Springer-Verlag, 1950)، دعنا نفترض أن S مجموعة. ولنفترض أن s عنصر في S وأن T مجموعة جزئية من S وأن F مجموعة من

المجموعات الجزئية من S. كم عدد التعبيرات بشكل $X\ R\ Y$ الممكنة، حيث إن X و Y مأخوذتان من $\{S,s,T,F\}$ وR مأخوذة من $\{\in,\subseteq\}$؟ صنّف كل تعبير على أنه "دائماً صحيح" أو "قد يكون صحيحاً" أو "دائماً خاطئ".

2.1 العدّ، العدّ المفرط (Overcounting)، ومبدأ الجمع (The Sum Principle)

في هذا القسم، سنكمل دراستنا حول مسائل العدّ الأساسية، عن طريق مناقشة العديد من الأمثلة. ألقينا الضوء على حالتين شائعتين من حالات سوء تطبيق مبدأ الضرب. ثمّ عرّفنا تقنيتين مهمتين لإصلاح هذه المسائل واختبرنا المزيد من الأمثلة.

المزيد عن مبدأ الضرب

الأعداد الثلاثية

العدد الثلاثي (Ternary Numbers) هو تسلسل من الأرقام التي تكون إما 0 أو 1 أو 2. كم عدداً ثلاثياً مكوناً من 8 خانات تتضمن 3 واحدات؟

من الأمثلة على الأعداد الثلاثية ذات 8 خانات: 11102000 و02212101 و00011100. فكّر بتشكيل مثل هذا العدد على مرحلتين: (1) حدد موقع الواحدات الثلاثة، ثم (2) حدد الأرقام الباقية. يوجد $\binom{8}{3}$ طريقة لتحديد مواقع

الواحدات. أما الخانات الخمس الباقية فستكون إما 0 أو 2، وعليه فإن عدد طرق تحديدها يكون 2^5. يمكننا أن نطبق قاعدة الضرب وستكون الإجابة $1792 = \binom{8}{3} \times 2^5$.

السؤال 17: كم عدد الأرقام الثلاثية المكونة من n خانة التي فيها عدد الواحدات يساوي k؟

أسئلة امتحان

يتضمن امتحان من نوع الاختيار من متعدد 20 سؤالاً لكل منها 4 إجابات محتملة. كم عدد نماذج الامتحان المختلفة التي يمكن تحصيلها 70٪ من درجتها؟

يمكننا تتبع إجابات الطلاب باستخدام قائمة من 20 عنصراً مأخوذة من $\{a, b, c, d\}$ حيث تمثّل مجموعة الأحرف الإجابات المحتملة لكل سؤال. إذا كانت الدرجة 70٪ على سبيل المثال، فهذا يعني أن 14 سؤالاً صحيح من أصل 20. يوجد $\binom{20}{14}$ طريقة مختلفة لتحديد هذه الأسئلة الأربعة عشر. وعليه فإن كل الأسئلة الستة الباقية لا بد أن تكون إجاباتها خاطئة. وبما أن هناك ثلاث إجابات خاطئة لكل سؤال، يوجد 3^6 طريقة للإجابة عن الأسئلة الستة الباقية إجابات خاطئة. باستخدام مبدأ الضرب فإنه يوجد $3^6 \times \binom{20}{14} = 28{,}256{,}040$ طريقة للحصول على درجة 70٪ في الامتحان.

السؤال 18: قسّم عدد الطرق التي يمكن بها الحصول على درجة 70٪ على إجمالي عدد الطرق الممكنة لإكمال الامتحان. ما هي احتمالية حصولك على 70٪ بالتخمين فحسب؟

المتسلسلات المتناظرة

كم عدد المتسلسلات المتناظرة (Palindromes) التي يمكن تكوينها من الأعداد الصحيحة بين 1 و999999؟

المتسلسلة المتناظرة لا تتغير إذا قرئت طرداً أو عكساً. إذ يمكن اعتبار كل من 4 و555 و9889 متسلسلات متناظرة يمكننا شمولها بالعدّ. وهذا يعني أن المتسلسلة المتناظرة تحدد كاملةً من خلال نصفها الأول. على سبيل المثال، يوجد 9×10^2 متسلسلة متناظرة مكونة من 5 أرقام لأن أول خانة يمكن أن تكون أي رقم من 1 إلى 9، الخانة الثانية تكون أي رقم من 0–9 والثالثة تكون أي رقم من 0–9. بعد اختيار أرقام هذه الخانات، يمكن تحديد أرقام الخانات الرابعة والخامسة أوتوماتيكياً.

تتراوح الأعداد في مجموعة الأعداد الصحيحة من 1 إلى 999999 بين أعداد مكوّنة من خانة واحدة وأعداد من 6 خانات. يعتمد عدد المتسلسلات المتناظرة على عدد الخانات:

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
عدد المتسلسلات المكونة من k خانة	9	9	10×9	10×9	$10^2\times9$	$10^2\times9$

لعد المتسلسلات المتناظرة المطلوبة، أضفنا الإجابات لنحصل على:

$$9 + 9 + (9.10) + (9.10) + (9.10^2) + (9.10^2) = 1998$$

مبدأ الجمع

بالإجابة عن السؤال الأخير، قسمنا المتسلسلات المتناظرة إلى حالات على عدد الخانات، وعددنا كل حالة، ثم أضفنا الإجابات للحصول على المجموع النهائي. إن فكرة التقسيم إلى حالات لا مفرّ منها في حسابات التوافيق وتسمى بمبدأ الجمع.

مبدأ الجمع: افترض أن الأشياء في سؤال العدّ يمكن أن تقسّم إلى حالات مفكّكة ومستوعَبة (Disjoint and Exhaustive). إذا كان عدد الأشياء n_j في الحالة رقم j_{th}، لـ $j = 1,2, \dots, k$ فإن إجمالي عدد الأشياء يكون $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

الكلمة "مفككة" (Disjoint) تعني أنه لا يوجد تقاطع بين الحالات، والكلمة "مستوعَبة" تعني أن كل شيء يوجد في بعض الحالات. وكلتاهما معاً تعنيان أن كل شيء يقع في حالة واحدة وفي حالة واحدة فقط.

أسئلة الامتحان مرّة أخرى

يتكون امتحان من نوع اختيار من متعدد من 20 سؤالاً، لكل منها أربع إجابات محتملة. كم ورقة امتحان مختلفة يمكن أن تحصل على درجة 70٪ على الأقل؟

مرة أخرى سنستخدم قائمة من 20 عنصراً مأخوذة من المجموعة $\{a, b, c, d\}$ لمتابعة كل امتحان. الدرجة 70٪ على الأقل تعني الإجابة عن 14 – 20 سؤالاً إجابة صحيحة. نقسّم أوراق الامتحان إلى حالات حسب عدد الأسئلة الصحيحة، ثم نستخدم مبدأ الجمع. وجدنا مسبقاً أن $\binom{20}{14}3^6$. ورقة امتحان تحرز درجة 20٪ تحديداً. أما الحالات الأخرى فهي متشابهة والإجابة هي:

$$\binom{20}{14}3^6 + \binom{20}{15}3^5 + \binom{20}{16}3^4 + \cdots + \binom{20}{19}3^1 + \binom{20}{20}3^0$$

ويمكن كتابتها أيضاً بالصيغة $\sum_{k=14}^{20}\binom{20}{k}3^{20-k}$. وهذا يساوي 32,448,508.

السؤال 19: كم ورقة امتحان تحرز الدرجة 90٪ على الأقل؟

الإفراط في العدّ ومخاطر أخرى

ثمة نوعان من العبارات الرئيسية في مبدأ الضرب. سنكررها لاحقاً مع العبارات الأساسية بخط غامق.

مبدأ الضرب: في عدّ القوائم المكوّنة من k عناصر والتي تكون بصيغة $(l_1, l_2, \ldots, l_3)$، إذا كان:

• هناك c_1 طريقة لتحديد العنصر l_1 في القائمة، **وكل عملية تحديد تقودنا إلى قائمة مختلفة مكونة من k عناصر**.

• لكل عنصر آخر l_i في القائمة، يوجد c_i طريقة لتحديد ذلك العنصر بغض النظر عن تحديد العناصر السابقة $l_1, \ldots, l_{i-1}$، وإن كل عملية تحديد لـ l_i تقودنا إلى قائمة مختلفة مكونة من k عناصر.

إذن يوجد من هذه القوائم $c_1 c_2 \ldots c_k$.

ثم نوضّح كيف أن الفشل في جذب الانتباه إلى هذه التعبيرات يمكن أن يقودنا إلى عدٍ خاطئ.

تطبيق خاطئ لمبدأ العدّ

في لعبة الورق بلاك جاك، تم توزيع أوراق اللعب وحصلتَ على ورقتين. الأولى وجهها إلى الأسفل والثانية وجهها إلى الأعلى. كم عدد الحالات التي تكون فيها الورقة المقلوبة عبارة عن آص (واحد) والورقة التي وجهها إلى الأعلى تكون "قلب"؟

مثّل حالة ورقتي اللعب كقائمة من عنصرين (D, U) حيث D هي الورقة التي وجهها إلى الأسفل وU هي الورقة التي وجهها إلى الأعلى. يوجد أربع طرق لتحديد D، إذ يوجد أربع أوراق آص في أوراق اللعب. ثم يوجد 13 طريقة لتحديد

U، إذ يوجد 13 ورقة من فئة القلب في أوراق اللعب. باستخدام مبدأ الضرب نحصل على 4.13 = 52 حالة.

هذا التطبيق خاطئ لمبدأ الضرب، لأن عدد الطرق لتحديد U يعتمد على طريقة تحديد D. والمشكلة هي ورقة الآس من فئة القلب.

الورقة المختارة D	عدد الخيارات U
A♠	13
A♣	13
A♥	12
A♦	13

بكلمات أخرى، مبدأ الضرب لا ينطبق هنا لأنه يوجد 13 طريقة لتحديد D لكل خيارات U.

الحل:

بما أن الآس القلب هو المشكلة، دعنا نتعامل مع الحالة على حدة. إذا لم تكن D الآس القلب، إذا سيكون عدد طرق تحديدها ثلاث. لكل من هذه الطرق، يوجد 13 طريقة لتحديد U فيكون الإجمالي 3.13 = 39 حالة من بطاقتين. إذا كانت D الآس

القلب، فإنه يوجد 12 طريقة لتحديد U وعليه يكون الإجمالي 12 حالة من بطاقتين. باستخدام مبدأ الجمع نحصل على 3.13 + 13 = 51.

ثمة طريقة أخرى لإصلاح الوضع، وهي ببساطة الانتباه إلى أن الإجابة الأصلية غير الصحيحة 4.13 كبيرة جداً، لأن الفرق واحد فقط، لأنها تتضمن الحالة (A♥, A♥)، وعليه يوجد 4.13-1=51.

السؤال 20: كم حالة في توزيع ورق اللعب تكون فيها الورقة المقلوبة آس والورقة التي وجهها إلى أعلى ليست شكل القلب؟

تطبيق آخر غير صحيح لمبدأ الضرب

كم قائمة من 4 عناصر مأخوذة من المجموعة [9] فيها على الأقل زوج واحد من عناصر متجاورة متساوية؟ على سبيل المثال، القوائم 1114 و 1229 و 5555 تحقق الإجابة، لكن 9898 لا تحققه. دعنا نحدد هذه القائمة بثلاث خطوات:

- الخطوة 1: حدّد موقع العناصر المتجاورة المتساوية.
- الخطوة 2: حدّد قيمة هذه العناصر.
- الخطوة 3: حدّد العنصرين الباقيين.

يوجد 3 طرق لتحديد موقع العناصر المتجاورة المتساوية – العنصرين الأولين، العنصرين الأوسطين، العنصرين الأخيرين. حال انتهاء ذلك، يوجد تسع طرق لتحديد قيمها. كلٌّ من العنصرين الباقيين يمكن أن يكونا أي رقمين بين 1 و9، إذن

يوجد 9^2 طريقة لتحديدها. باستخدام مبدأ الضرب، يوجد $9.3\,.9^2 = 2187$ عدد. صحيح؟

خطأ! لقد طبقنا مبدأ الضرب بطريقة خاطئة. وهذا قادنا إلى فائض في العدّ. حدثت المشكلة في الخطوة الأولى: إن تحديد موقع الأرقام المتجاورة المتساوية لا يقودنا إلى عدد من أربع خانات في نهاية الأمر. وهذا هو السبب.

من بين القوائم المكونة من 4 عناصر التي ابتدأ عدها بالخطوات 1–3، يوجد قوائم على شكل $44cd$ نتجت من اختيار أول موقعين في الخطوة الأولى والقيمة 4 في الخطوة الثانية. الآن عندما نكمل القائمة في الخطوة الثالثة، نحصل على النتيجة $9^2 = 81$ قائمة.

(1.1) 4411، 4412، 4413، 4414، 4415، ... ، 4497، 4498، 4499

إضافة لذلك، من بين القوائم المكونة من 4 عناصر التي ابتدأ عدها بالخطوات 1–3، ثمة قوائم تكون على شكل $a44d$ و $ab99$. عندما نكمل مثل هذه القائمة في الخطوة الثالثة، نحصل على

(1.2) 1441، 1442، 1443، 1444، 1445، ... ، 9447، 9448، 9449

و

(1.3) 1199، 1299، 1399، 1499، 1599، ... ، 9799، 9899، 9999

على التوالي. هذه مشكلة لأن القوائم مثل 4441 و 4444 تظهر في كل من (1.1) و (1.2). في حين تظهر قائمة مثل 4499 في كل من (1.1) و (1.3). بكلماتٍ أخرى، إن التحديدات في الخطوات الأولى والثانية تُنتج قوائم مختلفة في النهاية، وهذه ليست الحالة.

الحل:

فيما يلي طريقة معالجة الأمر. لتكن

x = عدد القوائم المكونة من 4 عناصر المأخوذة من [9]

y = عدد القوائم المكونة من 4 عناصر المأخوذة من [9]، مع وجود زوج واحد على الأقل من العناصر المتجاورة المتساوية.

z = عدد القوائم المكونة من 4 عناصر المأخوذة من [9]، التي لا يوجد فيها أي زوجٍ من العناصر المتجاورة المتساوية.

نريد إيجاد قيمة y . باستخدام مبدأ الجمع، $x = y + z$ لأن أي قائمة من 4 عناصر فيها على الأقل زوج من العناصر المتجاورة المتساوية، أو لا يوجد فيها أي زوج من العناصر المتجاورة المتساوية. لاحظ أنه من السهل تحديد كل من x و z.

نعلم أن $x = 9^4$. بالنسبة لـ z، يوجد تسعة طرق لتحديد العنصر الأول، ثم ثمانية طرق لتحديد العنصر الثاني (أي شيء ما عدا العنصر الأول)، ثم ثمانية طرق لتحديد العنصر الثالث (أي شيء ما عدا الثاني)، ثم ثمانية طرق لتحديد الرابع (أي شيء ما عدا الثالث). باستخدام مبدأ الضرب، لدينا 9.8^3 قائمة. إذن يوجد $y = x - z = 9^4 - 9.8^3 = 1953$ قائمة من أربعة عناصر مأخوذة من [9] يوجد فيها زوج واحد من العناصر المتجاورة المتساوية على الأقل.

السؤال 21: كم قائمة مكونة من 5 عناصر مأخوذة من $\{A, B, \ldots, Z\}$ لا يوجد فيها أحرف متجاورة متساوية؟

عدّ المتممة

تُعرف التقنية التي استخدمت لتصحيح المثال الأخير أعلاه بـ **"عدّ المتممة"** (Counting the Complement). وما هي أساساً إلا طريقة معيّنة لتطبيق مبدأ الجمع، لكنها طريقة فعّالة.

عدّ المجموعات الجزئية

كم مجموعة جزئية من [15] تتكوّن من عنصرين على الأقل؟

"عنصران على الأقل" قد تعني أي عدد من العناصر من 2 إلى 15. المتممة لعبارة "اثنان على الأقل" هي "واحد على الأكثر"، والتي تعني 0 أو 1. يوجد $\binom{15}{0}=1$ مجموعة جزئية عدد عناصرها 0، و $\binom{15}{10}=15$ مجموعة جزئية عدد عناصرها 1. إذن يوجد:

$$2^{15}-\left[\binom{15}{0}+\binom{15}{1}\right]=32{,}752$$

مجموعة جزئية تتكون من عنصرين على الأقل.

لاحظ أنه ليس من الضروري عدّ المتممة، لأنه يمكننا جمع عدد المجموعات الجزئية التي حجمها k من k=2 إلى 15 للحصول على الإجابة:

$$\binom{15}{2}+\binom{15}{3}+\cdots+\binom{15}{15}=\sum_{k=2}^{15}\binom{15}{k}$$

على كلٍّ، يُستخدم عدّ المتممة لتسهيل الحساب.

السؤال 22: كم عدد ثنائي مكون من n خانة فيه 0 واحد و 1 واحد على الأقل؟

عدّ كلمات السر، مرة أخرى

غالباً ما يجب أن تحتوي كلمات السر عدداً أدنى من الرموز من نوعٍ معين. كم عدد كلمات السر المكونة من ثمانية رموز الممكنة إذا كان كل رمز إما حرفاً كبيراً *A-Z* أو حرفاً صغيراً *a-z* أو رقماً 0–9، بحيث يُستخدم حرفٌ واحدٌ على الأقل؟

إن المتطلب "حرفاً واحداً على الأقل" يقلل من احتمالات كلمات السر المكوّنة من أرقام فقط. من السهل عدّ كلمات السر المكوّنة من الأرقام فقط، لذا يسهل عدّ المتممة. نحن نعرف مسبقاً أنه يوجد 62^8 كلمة سر ممكنة، منها 10^8 كلمات تتكون من أرقام فقط. وعليه فإنه يوجد $62^8 - 10^8 = 218,340,005,584,896$ كلمة تتضمن حرفاً واحداً على الأقل.

السؤال 23: أجب عن السؤال نفسه، لكن هذه المرة افترض استخدام حرفاً واحداً على الأقل ورقماً واحداً على الأقل.

الاستمرار في عد كلمات السر

كم عدد كلمات السر المكوّنة من ثمانية رموز إذا كان كل رمز إما حرفاً كبيراً *A-Z* أو حرفاً صغيراً *a-z* أو رقماً 0–9 بحيث يُستخدم حرفٌ كبير واحد على الأقل وحرفٌ صغير واحد على الأقل؟

متممة "بحيث يستخدم حرفٌ كبير واحد على الأقل وحرفٌ صغير واحد على الأقل" هي "بحيث لا يستخدم أي حرف كبير أو أي حرف صغير". علينا توخّي الحذر عند عدّ الأشياء المحددة بعبارة "أو". عرّف المجموعات التالية:

A = {كلمات السر p: p تتكون من 8 رموز}

B = { كلمات السر p: p تتكون من 8 رموز ليس بينها أي أحرف كبيرة}

C = { كلمات السر p: p تتكون من 8 رموز وليس بينها أي أحرف صغيرة}

إجابة السؤال هي: $|A| - |B \cup C|$ من خلال عد المتممة. نحن نعلم أن $|A| = 62^8$. بالنسبة لـ $|B \cup C|$ نستخدم الصيغة الشائعة التالية:

$$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$$

يوجد $|B| = 36^8$ كلمة سر لا تحتوي أحرفاً كبيرة، و $|C| = 36^8$ كلمة سر لا تحتوي أحرفاً صغيرة، و$|B \cap C| = 10^8$ كلمة سر لا تحتوي أحرفاً كبيرة أو أحرفاً صغيرة (أي أنها تتكون من أرقام فقط). وعليه فإن عدد كلمات السر التي تحتوي حرفاً كبيراً واحداً على الأقل وحرفاً صغيراً واحداً على الأقل:

$$|A| - |B \cup C| = 62^8 - (36^8 + 36^8 - 10^8) = 212{,}697{,}985{,}769{,}984$$

وهذا المتطلّب يحذف كلمات السر $|B \cup C| = 5{,}642{,}119{,}814{,}912$ من العدّ.

المزيد من الأمثلة

متسلسلة الأفضل – من – سبعة

يلعب فريقا بيسبول A و B ضد بعضهما في منافسات بطولة سلسلة الأفضل-من-سبعة (Best-of-Seven Series)، بحيث يفوز بالبطولة أول فريق يحقق فوزاً في

أربع مباريات. النتيجة $ABAAA$ تعني أن الفريق A يفوز في المباراة الأولى، الفريق B يفوز في المباراة الثانية ثم يفوز الفريق A في المباريات 3–5، وعليه يفوز بالبطولة. أما النتيجة $BBBB$ تعني أن الفريق B يفوز في المباريات 1–4، والنتيجة $BAABABB$ تعني أن الفريق B يفوز سبع مباريات. كم عدد النتائج المختلفة الممكنة؟

نمثّل كل نتيجة كقائمة طولها 4 أو 5 أو 6 أو 7، اعتماداً على طول المتسلسلة. وهذا يملي علينا كيفية تقسيم المسألة إلى حالات ذات معنى. أولاً دعنا نعدّ النتائج التي يفوز فيها الفريق A. يوجد 4 حالات:

○○○○○○A ○○○○○A ○○○○A ○○○A

في كل حالة، تشير الفراغات إلى أي قائمة من قوائم A و B التي تتضمن 3 Aبالتحديد. في الحالة الأولى يوجد $\binom{6}{3}$، في الحالة الثانية يوجد $\binom{5}{3}$، وهكذا. وعليه فإن عدد النتائج التي يفوز فيها A تكون:

$$\binom{6}{3}+\binom{5}{3}+\binom{4}{3}+\binom{3}{3}.$$

عدد النتائج التي يفوز فيها الفريق B هي نفس الشيء بالضبط، إذن إجمالاً، فإن النتائج المختلفة تساوي:

$$2\left[\binom{6}{3}+\binom{5}{3}+\binom{4}{3}+\binom{3}{3}\right]=70$$

لعبة الورق بوكر

في مجموعة ورق اللعب المكونة من 52 ورقة، كم عدد التوزيعات الممكنة المكونة من 5 بطاقات؟ ما احتمالي أن تحصل على توزيعة تحتوي 3 بطاقات من نفس النوع؟

يوجد العديد من التوزيعات المكونة من 5 بطاقات بعدد المجموعات الجزئية المكونة من 5 عناصر المأخوذة من المجموعة المكونة من 52 عنصر، أي حوالي 2.6 مليون توزيع:

$$\binom{52}{5} = \frac{(52)_5}{5!} = \frac{52.51.50.49.48}{5.4.3.2.1} = 2{,}598{,}960$$

يتطلب عدّ توزيعات من 3 بطاقات من أنواع مختلفة بعض الحذر. من الطرق المستخدمة لتحويل كل توزيع كقائمة من 5 عناصر (A, B, C, D, E)، حيث:

- A هي فئة من 3 بطاقات من أنواع مختلفة.

⇐ 13 طريقة لاختيار A.

- B مجموعة منظومات تتكون من 3 بطاقات من أنواع مختلفة.

⇐ $\binom{4}{3}$ طريقة لاختيار B

- C هي مجموعة من الفئات المكونة من عنصرين للورقتين الباقيتين

⇐ $\binom{12}{2}$ طريقة لاختيار C

- D هي منظومة من الفئات المكونة من عنصرين للورقتين الباقيتين

⇐ 4 طرق لاختيار D

• E هي منظومة من أكبر فئة في C

⇐ 4 طرق لاختيار E

على سبيل المثال {4♣,K♢,3♢,4♡,4♢,♠}، التوزيعة ترتبط بقائمة من خمسة عناصر

(4♡, ♢, {3,K}, {♠, ♢, ♡},)

باستخدام مبدأ الضرب، سيكون لدينا $13.\binom{4}{3}.\binom{12}{2}.4^2 = 54{,}912$ توزيعة.

السؤال 24: وضّح الخطأ في الاستنتاج التالي: ثمة 52 طريقة لاختيار الورقة الأولى تكون جزءاً من توزيعة من 3 أوراق مختلفة. ثم $\binom{3}{2}$ طريقة لاختيار الورقتين التاليتين لتكوين المجموعة الثلاثية مختلفة الأنواع. وأخيراً، $\binom{48}{2}$ طريقة لاختيار الورقتين الأخريين (أي أوراق باستثناء تلك المنظومات المكونة من 3 أوراق من أنواع مختلفة). باستخدام مبدأ الضرب، نجد أن عدد الطرق $52.\binom{3}{2}.\binom{48}{2}$.

بما أن معدل التوزيعات الثلاثية لكل التوزيعات الممكنة هو:

$$\frac{54{,}912}{2{,}598{,}960} = 0.0211284\ \ldots,$$

يمكننا توقّع استلام توزيعات ذات الفئات المختلفة في التوزيعة الأولية يكون 2٪ من الوقت – مرة كل 50 توزيعة.

السؤال 25: ما هو احتمالي حصولك على توزيعة تتضمن *Full House*؟ (يعني ثلاث ورقات من منظومة واحدة واثنتين من منظومة أخرى).

راجع التمرين 18 لتعرف المزيد.

اثنان على الأقل

كم عدد القوائم المكونة من 5 عناصر مأخوذة من المجموعة *{A,B,C,D,E}* تتضمن حرفي *A* على الأقل؟

بما أن التعبير "حرفي *A* على الأقل" قد يعني وجود حرفي *A* أو ثلاثة أو أربعة أو خمسة، فإن العدّ المباشر يتطلب العديد من الحالات وبعض العناية أيضاً للتأكد من أن الحالات لا تتداخل. عكس التعبير "على الأقل اثنان" هو "على الأكثر واحد"، وهذا يتطلب حالات أقل. لذا نعدّ المتممة. يبيّن السؤال التالي الحل من خلال عد المتممة.

السؤال 26: كم عدد القوائم الممكنة المكونة من خمسة عناصر المأخوذة من المجموعة *{A,B,C,D,E}*؟ كم قائمة منها لا تتضمن أي حرف *A*؟ كم قائمة منها تتضمن حرف *A* واحد تحديداً؟ الآن، ما هي إجابة السؤال الأصلي؟ للتحقق، يجب أن تكون إجابتك 821.

ملخص

ثمة مبدآن لا غنى عنهما في حسابات التوافيق، وهما مبدأ الجمع وطريقة عدّ المتممة. يستخدم مبدأ الجمع عندما نقسّم مسألة العدّ إلى حالات منفصلة وكاملة،

بحيث يتم عدّ كل حالة ومن ثمّ جمع الإجابات. عدّ المتممة مفيد عندما يتضمن وصف الأشياء المراد عدّها تعبيرات مثل "واحد على الأقل" أو "اثنان على الأقل" أو "غير فارغة".

تمارين

1. خطر! فيما يلي إجابات عن أسئلة عدّ. مهمتك هي صياغة سؤال لكلٍ منها.

(أ) $n^k - (n)_k$

(ب) $n^n - n!$

(ج) $2^n - 2$

(د) $3^5 - 2^5$

2. كم عدد النتائج المختلفة لتشكيل سلسلة من أفضل تسعة أشخاص من فريقين A و B؟ عمّم الإجابة إلى أفضل سلسلة n حيث n عدد فردي.

3. بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة من 20 شخصاً، بحيث تتضمن اللجنة 3 أشخاص على الأقل؟

4. تتكون مجموعة من 12 رجلاً وثمان نساء. بكم طريقة يمكن...

(أ) تشكيل لجنة من 5 أشخاص؟

(ب) تشكيل لجنة من 5 أشخاص تتضمن رجلين وثلاث نساء؟

(ج) تشكيل لجنة من 6 أشخاص تتضمن ثلاث نساء على الأقل؟

(د) تشكيل لجنة من 10 أشخاص تتضمن أربع نساء على الأقل؟

(ه) تشكيل لجنة كلها من الرجال بغض النظر عن حجم اللجنة؟

5. كم عدد كلمات السرّ المكونة من 8 رموز يمكن تكوينها بحيث يكون كل رمز إما حرفاً كبيراً من *A-Z* أو حرفاً صغيراً من *a-z* أو رقماً من 0-9، وبحيث تتضمن رمزاً واحداً على الأقل من تلك الأنواع الثلاثة؟

6. يلعب كلٌ من زيد وزينة وسارة وجنى بأوراق اللعب. بكم طريقة يمكن توزيع الأوراق وعددها 52 بحيث يحصل كل لاعب على 13 ورقة؟

7. كم عدد المجموعات الجزئية k المأخوذة من $[n]$ لا تعتبر مجموعات (ترتيبية) على $[n]$؟

8. ليكن k و n عددين صحيحين موجبين يحققان $k<n$. كم عدد المجموعات الجزئية من $[n]$ التي لا تكون مجموعات جزئية من $[k]$ أيضاً؟

9. كم عدد المجموعات الجزئية غير الفارغة من [10] التي يكون ناتج ضرب عناصرها عدداً موجباً؟

10. كم عدد التباديل على $[n]$ الممكنة بحيث لا يكون فيها أي أرقام زوجية أو أي أرقام فردية متجاورة؟

11. كم كلمة مكوّنة من 5 أحرف [إنجليزية] (من الأحرف الكبيرة فقط) لا تبدأ ولا تنتهي بحرف علة (Vowel)؟

12. لنفترض وجود قوائم مكونة من 3 عناصر مأخوذة من المجموعة [3]. كم قائمة منها يظهر فيها كل عنصر في [3] مرة واحدة على الأقل؟ أجب عن السؤال نفسه بافتراض أن القوائم تتكون من 4 عناصر و5 عناصر مأخوذة من [3]؟

13. لوحة الشيدوكو هي شبكة من الأرقام أبعادها 4×4، بحيث يظهر كل من الأرقام 1–4 مرة واحدة تحديداً في كل سطر وعمود وفي كل من الشبكات الفرعية الأربع التي أبعادها 2×2. فيما يلي لوحتي شيدوكو مختلفتين:

1	2	4	3
3	4	1	2
2	1	3	4
4	3	2	1

4	3	1	2
2	1	3	4
3	2	4	1
1	4	2	3

كم لوحة شيدوكو مختلفة يوجد؟

14. بكم طريقة مختلفة يمكنك ترتيب الأعداد من 1 إلى 9 في شبكة أبعادها 3×9 بحيث يظهر كل عدد مرة واحدة بالضبط في كل سطر، ويظهر العدد مرة واحدة بالضبط في الشبكات الفرعية التي أبعادها 3×3 اليمنى والوسطى واليسرى؟ فيما يلي الشبكة مع إحدى الترتيبات الممكنة:

2	7	1	3	5	9	6	4	8
4	3	8	6	7	2	1	5	9
5	6	9	1	4	8	2	3	7

15. اكتب كل الأعداد الصحيحة من 1 إلى 1,000,000. كم مرة كتبت العدد 4؟

16. كم عدد التباديل من 4 عناصر على المجموعة [10] يكون العنصر الأكبر فيها 6؟ وكم عدد تلك التي يكون فيها أكبر عدد على الأكثر 6؟

17. جد عدد القوائم المكونة من 4 عناصر المكتوبة بالصيغة (x_1, x_2, x_3, x_4)، بحيث يكون كل x_i عدداً صحيحاً غير سالب و $x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 15$.

18. هذا تمرين ممتاز للتدرّب على العدّ. جد عدد توزيعات ورق اللعب التي عددها 52 بحيث تتضمن التوزيعة 5 أوراق، وبحيث تتضمن:

(أ) مجموعة ملكية (أي أوراق *A-K-Q-K-10*) في منظومة واحدة.

(ب) توزيعة مستقيمة (خمس أوراق متتالية من فئة واحدة، لكنها ليست توزيعة ملكية).

(ج) أربعة من فئة واحدة (أربع أوراق من فئة واحدة وورقة واحدة من فئة مختلفة).

(د) توزيعة كاملة (ثلاث أوراق من فئة واحدة وورقتين من فئة أخرى).

(ه) توزيعة مختلفة (خمس أوراق من فئة واحدة لكنها ليست متتابعة).

(و) توزيعة مستقيمة (خمس أوراق متتابعة، لكن ليست من فئة واحدة).

(ز) توزيعة ثلاثية (ثلاث أوراق من فئة واحدة، والرابعة من فئة مختلفة والخامسة من فئة ثالثة)

(ح) زوجين (ورقتين من فئة واحدة، ورقتين من فئة أخرى وورقة خامسة من فئة ثالثة مختلفة)

(ط) زوج (ورقتين من فئة واحدة، ورقة ثالثة من فئة مختلفة، وورقة رابعة من فئة ثالثة وورقة خامسة من فئة رابعة مختلفة)

(ي) لا شيء مما ورد أعلاه.

احسب احتمال استلام كل نوع في التوزيعة الأساسية. (هذه الأنواع مذكورة في زيادة ترتيب الاحتمالية).

19. كم صفراً ينتهي المضروب $n!$ به؟ برهن إجابتك.

1.3. الدوال ومبدأ التناظر

حان الوقت لنتعمق في بعض ركائز التوافيق الرياضية. يلعب مفهوم العلاقات دوراً مركزياً. الدوال والعلاقات المتكافئة والمخططات البيانية والترتيب الجزئي مفاهيم أساسية سنتناولها في هذا الكتاب، وكلٌ منها نوعٌ مختلف من العلاقات. سنبدأ بالدوال لأنها الأكثر ألفة وهي مرتبطة بطرق العدّ في القسمين 1.1 و2.1.

العدّ من خلال التناظر

في القسم 1.1، عددنا المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة [3] من خلال الارتباط الموضّح في الطرف الأيسر من الشكل 1.2. كما عددنا الأعداد الثنائية المكونة من 5 خانات باستخدام واحدين تحديداً من خلال الارتباط الموضح في الطرف الأيسر من الشكل.

في كلتا الحالتين، تظهر الأشياء التي قمنا بعدّها إلى يسار الأسهم، والأشياء التي نعرف كيف نعدّها (لأنها حالات من مسائل عدّ معيارية) تظهر إلى اليمين. يبيّن الارتباط إلى اليسار أنه يوجد تحديداً مجموعات جزئية من المجموعة [3] بعدد الأعداد الثنائية المكونة من 3 خانات، تحديداً 2^3. يبيّن الارتباط في الطرف الأيمن أنه يوجد تحديداً أعداد ثنائية مكونة من 5 خانات تتضمن واحدين فقط بعدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من المجموعة [5]، تحديداً $\binom{5}{2}$.

كل واحد من هذه الارتباطات هو نوع من الدوال المسماة "متناظرة" (Bijection). وهي مفيدة في حساب التوافيق لأنه، كما يقترح المثالان، يمكننا عدّ عناصر المجموعة A التي يصعب عدّها بـ:

- إيجاد مجموعة أخرى B أسهل للعد.
- تكوين تناظر من A إلى B.

وهذا يتيح لنا الاستنتاج أن A وB من حجم واحد. على الرغم من أن الارتباطين المبينين يتضمنان تناظراً بديهياً نسبياً أو تناظراً مباشراً، إلا أن المسائل الأكثر صعوبة تستدعي ذكاءً أكثر. لذا علينا فهم نظرية الدوال التي تتعلق بالعدّ.

	11000 {1,2}→
ϕ→ 000	*10100* {1,3}→
{1}→100	*10010* {1,4}→
{2}→010	*10001* {1,5}→
{3}→001	*01100* {2,3}→
{1,2}→110	*01010* {2,4}→
{1,3}→101	*01001* {2,5}→
{2,3}→011	*00110* {3,4}→
{1,2,3}→111	*00101* {3,5}→
	00011 {4,5}→

الشكل 1.2: ارتباطات للعد.

العلاقات والدوال

لنعرّف مفهوم العلاقة، يجب أن نعرّف أولاً الضرب الديكارتي (Cartesian Product). للمجموعتين A وB، الضرب الديكارتي للمجموعتين هو $A \times B$ ويعطى بالمعادلة:

$$A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$$

على سبيل المثال، إذا كانت $A = \{1,2\}$ و$B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ فإن $A \times B$ تتضمن ستة أزواج مرتبة:

$$A \times B = \{(1, \propto), (1, \beta), (1, \gamma), (2, \alpha), (2, \beta), (2, \gamma)\}$$

السؤال 27: ما مقدار $B \times A$؟ بشكلٍ عام، إذا كانت X و Y مجموعتين محدودتين، إذن هل العبارات التالية صحيحة أم خاطئة؟ $= |X \times Y|$ (2) ; $|Y \times X|$ $X \times Y = Y \times X$ (1).

فيما يلي نعرّف العلاقة.

التعريف 1.3.1 (العلاقة): لتكن A وB مجموعتين. العلاقة من A إلى B هي مجموعة جزئية من $A \times B$. علاقة A مع A هي مجموعة جزئية من $A \times A$.

العلاقة البحتة لا تحتاج الكثير من التركيب. فبإلزام بالتركيبة التالية، سنتوصل إلى ما نتمنى دراسته في هذا القسم – الدالة.

التعريف 1.3.2 (الدالة): لتكن A وB مجموعتين. الدالة من A إلى B هو علاقة f من A إلى B التي تحقق الخاصية التالية: لكل $a \in A,$ يوجد $b \in B$ واحدة تحديداً بحيث أن $(a, b) \in f$. نكتب الدالة كـ $f: A \to B$ للإشارة إلى أن f هو دالة من A إلى B، ونكتب $f(a) = b$ للإشارة إلى $(a, b) \in f$.

قد نعتبر الدالة قاعدة إدخال-إخراج، مثلاً الدالة $f(x) = x^2$ ليس مجموعة من الأزواج المرتبة. لكن قاعدة الإدخال-الإخراج تعني أن كل مدخل x يرتبط بالمخرج x^2. عند رسم هذه العلاقة، فإنك ستضع الأزواج المرتبة بالصورة (x, x^2)، مثل (0,0) و (0.5,0.25) و (1,1) و (1.5,2.25). إذن من وجهة النظر هذه، الدالة هي مجموعة من الأزواج المرتبة كما نصّ عليه التعريف.

على سبيل المثال، إذا كان $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و Z مجموعة من الأعداد الصحيحة، فإن الدالة $f: A \to \mathrm{Z}$ الذي يُعرّف من خلال القاعدة $f(x) = x^2$ هو مجموعة من الأزواج المرتبة.

$$f = \{(1,1), (2,4), (3,9), (4,16), (5,25)\} \quad (1.4)$$

مثال: $(3,9) \in f$ تعني أن $f(3) = 9$.

السؤال 28: عرّف $g: 2^{[2]} \to \mathrm{Z}$ بالقاعدة $g(S) = |S|$، حيث S هي أي مجموعة جزئية من [2]. اكتب g كمجموعة من الأزواج المرتبة.

المجال والمجال المقابل والمدى

إذا كان لدينا الدالة $f: A \to B$، فإن المجموعة A هي مجال (Domain) f والمجموعة B هي المجال المقابل (Codomain) للدالة f. نكتب ذلك كـ

$A = (f)$مجال و $B = (f)$ مجال مقابل. أما مدى الدالة (Rang) f فهو مجموعة جزئية من B وتعرف كما يلي:

$$\text{rng}\,(f) := \{b \in B : f(a) = b \text{ for at least one } a \in A\}$$

قد يكون المدى مساوٍ للمجال المقابل (Co-Do main)، لكن هذا ليس بالضرورة. على سبيل المثال، إذا عرّفنا الدالة $f: R \to R$ بالدالة $f(x) = x^2$، فإن *dom (f) = co (f) = R*، بينما مدى f هو مجموعة من الأعداد الصحيحة غير السالبة. يتيح تعريف الدالة أن نتجاهل المجال المقابل.

أمثلة

(أ) إذا كان f هو الدالة الذي في الطرف الأيسر للشكل 1.2، فإن المجال هو مجموعة القوى من [3] والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الثنائية المكونة من 3 خانات. لأي مجموعة S في المجال، القاعدة هي $f(S) = d_1d_2d_3$ حيث d_i إما 1 أو 0 ويعتمد ذلك على إذا كانت $i \in S$ أو إذا كانت $i \notin S$، على التوالي.

(ب) إذا كانت g الدالة على الطرف الأيمن للشكل 1.2، فإن المجال هو مجموعة الأعداد الثنائية المكونة من 5 خانات والتي تتضمن واحدين تحديداً والمدى هو مجموعة من المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من [5]. لأي عدد ثنائي b

في المجال، القاعدة هي $g(b) = \{i, j\}$ حيث i و j هي المواقع التي تتضمن فيها b الخانة 1.

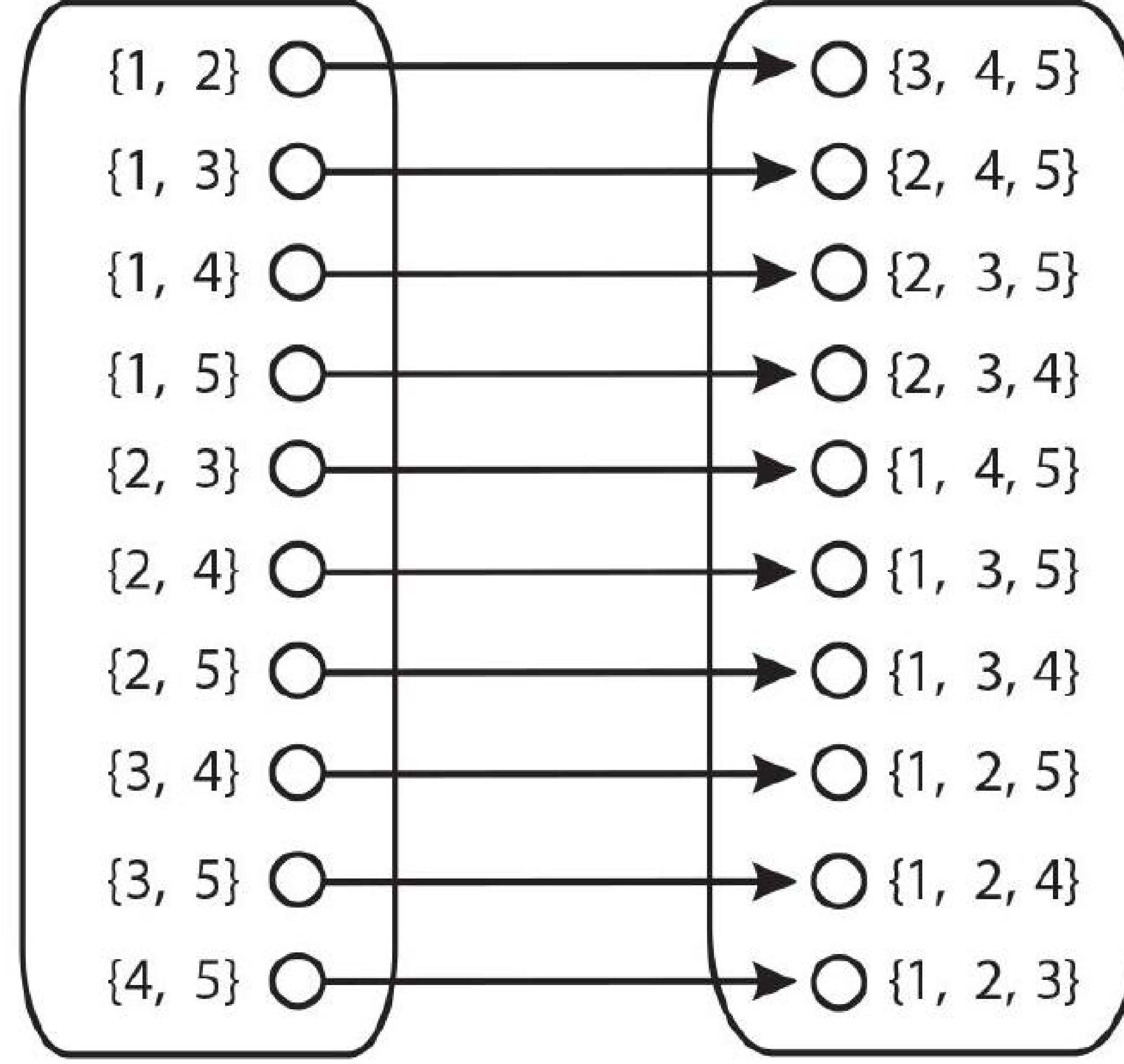
(ج) لتكن A مجموعة من المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من [5]، وB هي مجموعة من المجموعات الجزئية المكونة من 3 عناصر من [5]. فإن الدالة $h : A \to B$ المُعرّف بالقاعدة $h(S) = S^c$، هي دالة يربط كل مجموعة من A بمتممتها في B. على سبيل المثال $h(\{3,4\}) = \{1,2,5\}$.

راجع الشكل 1.3 للاطلاع على صورة الدالة المذكور في المثال (ج) أعلاه.

السؤال 29: لتكن $X = 2^{[10]}$ و Y مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة. عرّف الدالة $f : X \to Y$ بدلالة $f(S) = |S|$. جد $f(\{3,5,6,7,8\})$ و $f(\theta)$. هل مدى $Y = rng\ (f)$؟

دوال واحد – لواحد، الدوال الشاملة، الدوال التناظرية

نعرّف تالياً خصائص الدالة المفيدة في مسائل العدّ. يكون الدالة $f: A \to B$ دالة واحد – لواحد (One-to-One Function) إذا عُلم أنه "يستخدم" كل المخرجات الممكنة في B مرة واحدة على الأقل. ويكون شاملاً إذا "استخدم" كل المخرجات الممكنة في B مرة واحدة على الأقل. أما الدالة التناظرية فهي دالة واحد – لواحد وشامل.



الشكل 1.3: دالة من مجموعات جزئية مكونة من عنصرين من [5] مرتبطة بمجموعات جزئية مكونة من 3 عناصر من [5].

التعريف 1.3.3 (واحد – لواحد، شامل، تناظري): للدالة $f: A \to B$، نقول أن f دالة تناظرية أو ارتباط واحد – لواحد إذا حقّق الخصائص التالية:

- واحد–لواحد: لكل $a_1, a_2 \in A$، إذا كان $f(a_1) = f(a_2)$ فإن $a_1 = a_2$.
- شامل: لكل $b \in B$، يوجد بعض العناصر $a \in A$ بحيث يكون $f(a) = b$.

تسمى دالة واحد – لواحد أيضاً بالدالة التباينية (Injective Function) أو التفاوتية (Injection)، أما الدالة الشاملة فتعرف أيضاً باسم الدالة الشمولية (Surjective Function or Surjection). ثمة طريقة أخرى لتعريف دالة واحد – لواحد وهي بالمكافئ العكسي للتعبير المعطى في التعريف أعلاه.

• دالة واحد – لواحد، نسخة بديلة: لكل $a_1, a_2 \in A$، إذا كان $a_1 \neq a_2$ فإن $f(a_1) \neq f(a_2)$.

قد يبدو هذا طبيعياً أكثر – إذ ينصّ على أن المدخلات المختلفة تنتج مخرجات مختلفة – لكن التعريف الأول قد يكون أسهل للاستخدام في البراهين.

سبق ورأينا ثلاثة أمثلة للتناظر في الشكلين 1.2 و 1.3.

السؤال 30: هل الدالة f في السؤال 29 تناظرية؟

مبدأ التناظر

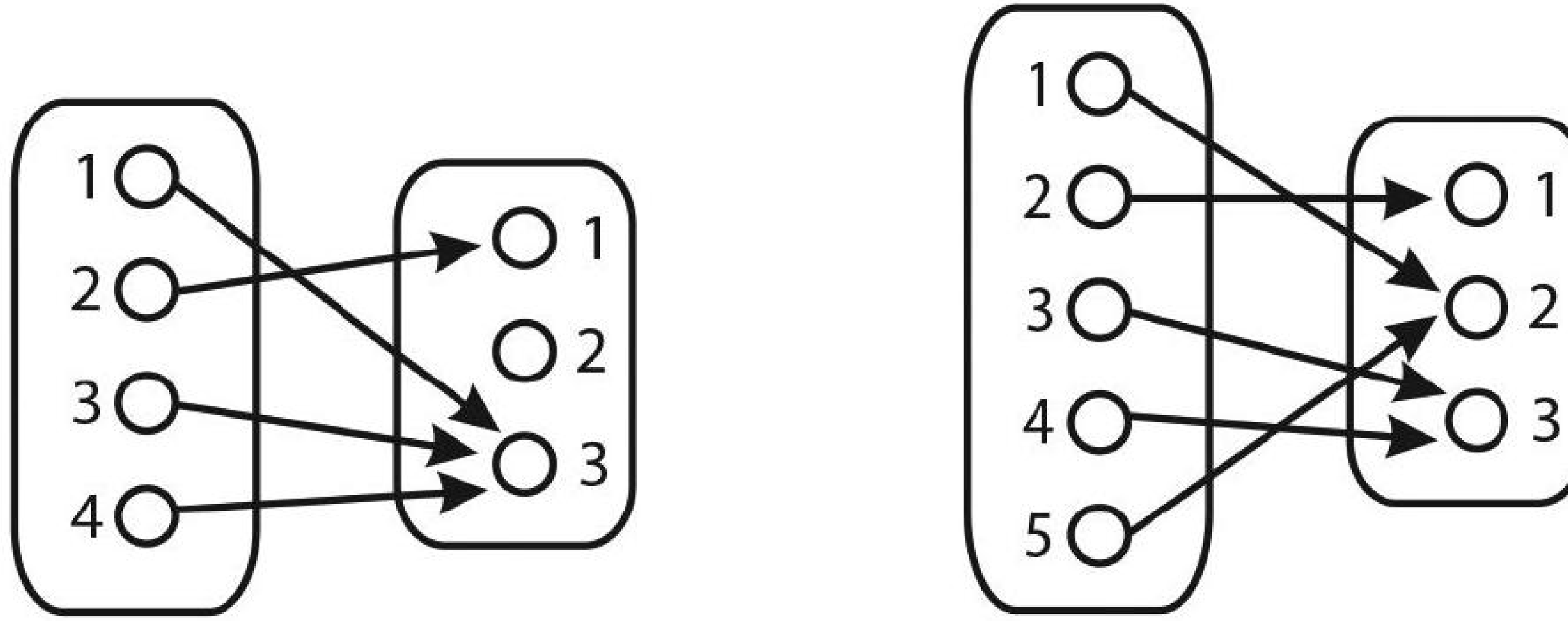
يبيّن الشكل 1.4 تمثيلاً أساسياً وهاماً لأنواع الدوال الأربعة. يبدو أنه عندما تكون الدالة تناظرية فإن المجال والمجال المقابل يكونان متساويين في الحجم. في الواقع، هذا هو التعريف الرياضي لمعنى أن تكون المجموعتان من حجمٍ واحد.

مبدأ التناظر (The Bijection Principle): تكون المجموعتان المحدودتان A و B ذاتي حجمين متساويين إذا، وفقط إذا، كان هناك تناظر من مجموعة إلى أخرى.

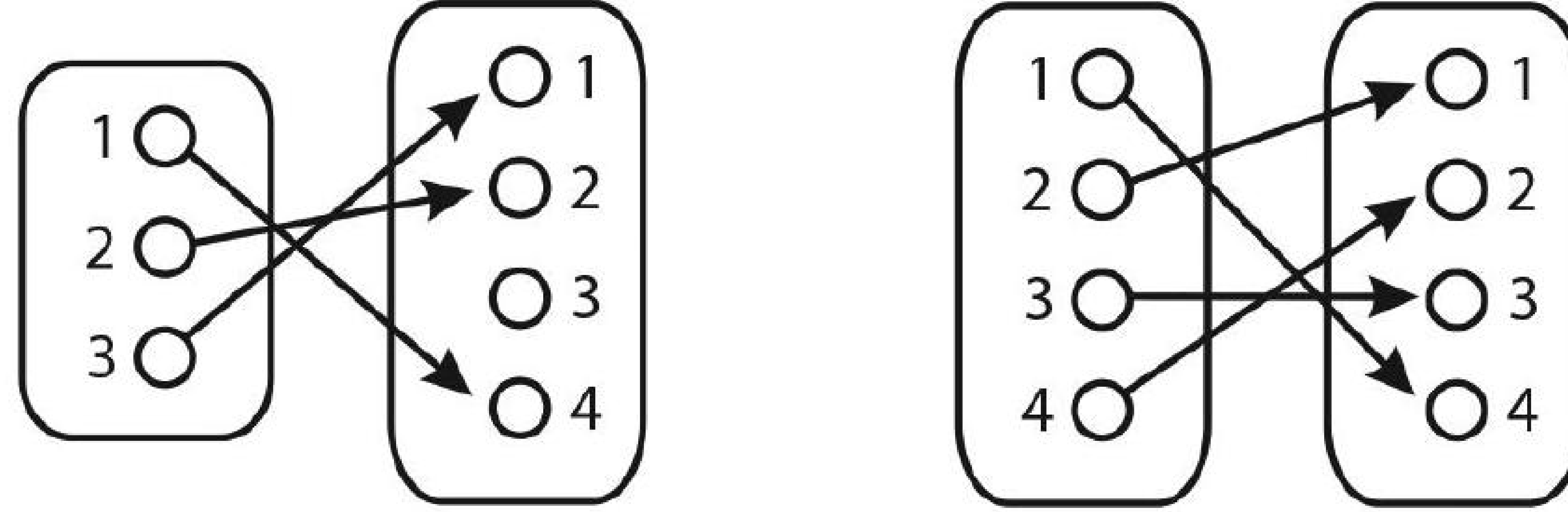
برهان التناظر

لدينا الآن نظرية تتيح لنا العدّ باستخدام الطريقة الموضّحة في بداية هذا القسم. للتوضيح، سنستخدم مبدأ التناظر لإثبات العبارتين التاليتين. البرهان الذي يستخدم مبدأ التناظر يعرف بالبرهان التناظري (Bijective Proof).

- عدد المجموعات الجزئية المكونة من k عنصر من $[n]$ يساوي عدد المجموعات الجزئية المكونة من $(n-k)$ من $[n]$.
- عدد المجموعات الجزئية من $[n]$ ذات الحجم الفردي يساوي عدد المجموعات الجزئية من $[n]$ ذات الحجم الزوجي.



دالة شاملة لكن ليست واحد – لواحد   دالة ليست واحد – لواحد ولا شاملة



دالة تناظر   دالة واحد – لواحد ، لكن ليست شاملة

الشكل 1.4: أربعة أنواع من الدوال.

ينصّ التعبير الأول على أن $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. هذا الأمر واضح: لتحديد المجموعات الجزئية المكونة من العناصر k من $[n]$، يمكننا اختيار تضمين العناصر k أو بصورة مكافئة، يمكن اختيار استثناء العناصر $n - k$. سنثبت ذلك باستخدام مبدأ التناظر بهدف التوضيح. العبارة الثانية قد تكون أقل وضوحاً.

إثبات التناظر 1#

يبيّن الشكل 1.3 كيف تعطي الدالة المتممة للمجموعة تناظراً بين المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من [5] والمجموعات الجزئية المكونة من 3 عناصر من [5]. سنعمم ذلك الآن.

لتكن A مجموعة من المجموعات الفرعية المكونة من العناصر k من المجموعة $[n]$ ولتكن B مجموعة من المجموعات الجزئية المكونة من العناصر $(n-k)$ من المجموعة $[n]$. عرّف الدالة

$h : A \to B$ بالقاعدة $h(S) = S^c$. لاحظ أن حجم S هو k، إذن حجم S^c هو $n-k$، وهذا يعني أن هذه الدالة معرّفة جيداً. وهكذا نكون قد أثبتنا أن h دالة تناظرية.

واحد–لواحد: افترض أن S_1 و S_2 مجموعتان جزئيتان عدد عناصر كل منهما k من المجموعة $[n]$، بحيث أن $S_1 \neq S_2$. وهذا يعني أن هناك بعض العناصر i التي تحقق الشروط $i \in S_1$ و $i \notin S_2$. بما أن $i \in S_1$ فإن $i \notin h(S_1)$ لأن h هو دالة متمم المجموعة. أيضاً ولأن $i \notin S_2$ فإن $i \in h(S_2)$. لكن هذا يعني أن $h(S_1) \neq h(S_2)$ بما أن العنصر i يوجد في الدالة $h(S_2)$ لكن لا يوجد في $h(S_1)$. وعليه فإن h يكون دالة واحد – لواحد .

شامل: لتكن T مجموعة جزئية مكونة من العناصر $(n-k)$ من المجموعة $[n]$، بحيث يكون $h(S) = T$. اختيار $S = T^c$ جيد، وبما أن حجم T هو $n-k$، فإن T^c حجمه k، بمعنى أن $T^c \in A$، كما أن

$$h(S) = h(T^c) = (T^c)^c = T$$

إذن h هي دالة شاملة. وهذا يكمل برهان أن h دالة تناظرية. وعليه فإن $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$، لأننا نعرف أن $\binom{n}{k}$ هو عدد المجموعات الجزئية المكونة من k عنصر من المجموعة $[n]$ و $\binom{n}{n-k}$ هو عدد المجموعات الجزئية المكونة من $(n-k)$ عنصر من المجموعة $[n]$.

إثبات التناظر #2

لاحظ أنه يوجد عدد من المجموعات الجزئية حجمها عدد زوجي من المجموعة [3] بعدد المجموعات الجزئية التي حجمها عدد فردي.

حجم بعدد زوجي	ϕ، {1,2}، {1,3}، {2,3}
حجم بعدد فردي	{1}، {2}، {3}، {1,2,3}

ينطبق الأمر نفسه بالنسبة للمجموعات الجزئية ذات الحجم الفردي والزوجي من المجموعة [4]:

حجم بعدد زوجي	ϕ، {1,2}، {1,3}، {1,4}، {2,3}، {2,4}، {3,4}، {1,2,3,4}
حجم بعدد فردي	{1}، {2}، {3}، {4}، {1,2,3}، {4،2،1}، {1,3,4}، {2,3,4}

يبدو أن الأمر ينطبق على جميع الحالات بشكلٍ عام. السؤال الذي يطرح نفسه هو هل هناك تناظر طبيعي بين المجموعات. هذا واحد: إذا كانت مجموعة تحوي العنصر 1، احذفه؛ إذا كانت مجموعة لا تحتوي العنصر 1، أضفه.

السؤال 31: ارسم صورة تبيّن الارتباطات بين المجموعات الجزئية من [3]، كما وُصف في الجملة الأخيرة.

بشكلٍ عام، لتكن ε مجموعة ذات حجم زوجي وϑ مجموعة ذات حجم فردي من $[n]$. عرّف $f : \varepsilon \to \vartheta$ بالقاعدة:

$$f(A) = \begin{cases} A - \{1\} & if\ 1 \in A \\ A \cup \{1\} & if\ 1 \notin A \end{cases}$$

أولاً: نلاحظ أن f دالة معرّفة جيداً لأنه إذا كان A أي مجموعة جزئية حجمها زوجي، فإن حجم $f(A)$ إما أن يكون $|A| - 1$ أو $|A| + 1$ وكلا هذين الرقمين عدد فردي.

واحد-لواحد: لتكن A_1 و A_2 مجموعات جزئية حجمها زوجي من $[n]$، ولنفترض أن $f(A_1) = (A_2)$. هدفنا هو بيان أن $A_1 = A_2$. نستخدم تقنية معيارية لبيان أن $A_1 \subseteq A_2$ و $A_2 \subseteq A_1$.

لبيان أن $A_1 \subseteq A_2$، لتكن $i \in A_1$. علينا بيان أن $i \in A_2$ وذلك بأخذ الحالتين التاليتين بالاعتبار: $i = 1$ و $i > 1$. أولاً، إذا كان $i = 1$ فإن:

$1 \in A_1 \Leftarrow 1 \notin f(A_1)$ بما أن f يحذف العنصر 1

$\Leftarrow 1 \notin f(A_2)$ بما أن $f(A_1) = f(A_2)$ بالافتراض

$\Leftarrow 1 \in A_2$ بما أن f يحذف العنصر 1

من ناحية أخرى، إذا كان $i > 1$ فإن

$i \in A_1 \Leftarrow i \in f(A_1)$ بما أن f لا يحذف العنصر 1

$\Leftarrow i \in f(A_2)$ بما أن $f(A_1) = f(A_2)$ بالافتراض

$\Leftarrow i \in A_2$ بما أن f لا يحذف العنصر 1

في كلتي الحالتين فإن $i \in A_2$، وعليه يكون $A_1 \subseteq A_2$.

لبيان أن $A_2 \subseteq A_1$، التفاصيل متشابهة؛ طالع السؤال أدناه. وعليه فإن $A_1 = A_2$، إذا f هو دالة واحد – لواحد .

السؤال 32: ما هي التفاصيل التي تثبت أن $A_2 \subseteq A_1$.

الشامل: لتكن B مجموعة جزئية حجمها فردي من $[n]$. يجب أن نبني مجموعة جزئية حجمها زوجي A من $[n]$ بحيث يكون $f(A) = B$. الفكرة بسيطة: إذا كان

$1 \in B$، فإننا نعرف $A \coloneqq B - \{1\}$، وإذا كان $1 \notin B$ فإننا نعرف $A \coloneqq B \cup \{1\}$.

لاحظ أن في أي من الحالتين A ليست مجموعة جزئية ذات حجم زوجي. الآن إذا كان $1 \in B$ فإن

$$f(A) = f(B - \{1\}) = (B - \{1\}) \cup \{1\} = B$$

وإذا كان $1 \notin B$ فإن

$$f(A) = f(B \cup \{1\}) = (B \cup \{1\}) - \{1\} = B$$

في أي من الحالتين، $f(A) = B$. وعليه فإن f دالة شاملة. وهذا يتمم برهان أن f تناظرية. إذن

عدد المجموعات الجزئية ذات الحجم الزوجي من المجموعة n يساوي عدد المجموعات الجزئية ذات الحجم الفردي من المجموعة n.

تركيب الدالة

فيما تبقى من هذا القسم، سنذكر فكرتين إضافيتين تتعلقان بالدوال، وستكونان مفيدتين لاحقاً. الفكرة الأولى هي الدوال المتراكبة. على سبيل المثال، تذكر أن الدالة $h(x) = (x^3 - 1)^5$ هو تركيب دالتين $f(x) = x^3 - 1$ و $g(x) = x^5$ لأن $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^3 - 1) = (x^3 - 1)^5$.

التعريف 1.3.4 (التركيب): للدوال $f : A \to B$ و $g : B \to C$، فإن صورة العنصر a بالدالة f ثم بالدالة g هو الدالة $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

مثال: لنعرّف الدالتين $f : [4] \to [3]$ و $g : [3] \to [7]$ كما يلي:

$$f = \{(1,2), (2,1), (3,1), (4,2)\}$$
$$g = \{(1,2), (2,6), (3,6)\}$$

هذا يعني أن $(g \circ f) = \{(1,6), (2,2), (3,2), (4,6)\}$ لأن $g(f(1)) = g(2) = 6$ و $g(f(2)) = g(1) = 2$ ، وهكذا دواليك.

السؤال 33: هل تركيب fog محدّد؟ فسّر الأمر.

الخصائص المتوارثة

خصائص دوال واحد - لواحد والشامل تحفظ ضمن التركيب.

المبرهنة 1.3.5: لتكن $f : A \to B$ و $g : B \to C$. إذا كان كل من f و g دالة واحد - لواحد ، فإن $g \circ f$ يكون أيضاً واحد-لواحد. إذا كان كل من f و g دالة شاملة، فإن $g \circ f$ يكون أيضاً دالة شاملة. إذا كان كل من f و g دالة تناظرية، فإن $g \circ f$ يكون أيضاً دالة تناظرية.

البرهان: لنفترض أن $f : A \to B$ و $g : B \to C$.

افترض أن f و g دالة واحد- لواحد. لإثبات أن $g \circ f$ دالة واحد - لواحد أيضاً، نفترض أن $a_1, a_2 \in A$ ونفترض أن $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$، أي أن

$g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. بما أن g هو دالة واحد – لواحد فهذا يتضمن أن $f(a_1) = f(a_2)$. إذن بما أن f دالة واحد – لواحد، فهذا يتضمن أن $a_1 = a_2$. وعليه فإن $g \circ f$ دالة واحد – لواحد .

سنترك لك إثبات أن $g \circ f$ دالة شاملة في السؤال الذي يلي البرهان. يتبع ذلك إثبات أن $g \circ f$ دالة تناظرية عندما يكون كل من f و g دالة تناظرية.

السؤال 34: أثبت أنه إذا كان f و g دالتين شاملتين، فإن $g \circ f$ يكون دالة شاملةً.

تركيب الدالة ترابطي

تركيب الدوال التراكبية الترابطية هو عملية ترابطية وخاصية هامة. من الجدير بالذكر أن طريقة العدّ التي سندرسها في الفصل الخامس تعتمد على هذا المبدأ.

المبرهنة 1.3.6: لتكن $f : A \to B$ و $g : B \to C$ و $h : C \to D$. إذن

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

البرهان: لتكن $f : A \to B$ و $g : B \to C$ و $h : C \to D$. أولاً اختبر الدالة $h \circ (g \circ f)$. يبيّن التعريف 1.3.4 أن $g \circ f : A \to C$، كما أن $h \circ (g \circ f): A \to D$. أيضاً بالتعريف $h \circ g : B \to D$، وعليه فإن $(h \circ g) \circ f : A \to D$. وهذا يعني أن الدالتين لهما نفس المجال والمجال المقابل.

الآن، لنفترض أن $a \in A$. ومن ناحية أخرى طبّق التعريف 1.3.4 مرتين لبيان أن:

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h\big((g \circ f)\big)(a) = h(g(f(a)))$$

من ناحية أخرى،

$$((h \circ g) \circ f))(a) = (h \circ g)\big(f(a)\big) = h(g(f(a)))$$

بما أن $(h \circ (g \circ f))(a) = ((h \circ g) \circ f))(a)$ لكل $a \in A$ وبما أن هاتين الدالتين لهما نفس المجال والمجال المقابل، فلا بدّ أنهما متساويان.

العلاقة العكسية، والدالة العكسية

المفهوم الأخير الذي سنتناوله في هذا القسم هو معكوس العلاقة. للحصول على معكوس علاقة فإننا ببساطة نبدل ترتيب العناصر في القائمة المكونة من العنصرين. إذا كان R علاقة من A إلى B، فإن العلاقة R^{-1} من B إلى A تعطى بالمعادلة:

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$$

أو بطريقة أخرى $(a, b) \in R$ إذا، وفقط إذا، كان $(b, a) \in R^{-1}$. وبما أن كل دالة هي علاقة، فإن معكوس الدالة ليس بحاجة لتعريف منفصل. لكن ينبغي الإشارة إلى أمرٍ حاسم: معكوس الدالة ليس بالضرورة أن يكون دالة.

السؤال 35: هل العلاقة المعكوسة للدالة f المبيّن في (1.4) في الصفحة 26 دالة؟ إذا كان كذلك، حدّد المجال والمجال المقابل للدالة المعكوسة f^{-1} وحدد قاعدة الإدخال-الإخراج.

أفضل ما يمكننا قوله هو أنه إذا كانت الدالة $f: A \to B$ دالة من A إلى B، فإن f^{-1} هو علاقة من من B إلى A. نعطي الآن شرطاً ضرورياً وكافياً لـf^{-1} حتى يكون دالة.

المبرهنة 1.3.7: إذا كان f دالة، فإن العلاقة المعكوسة لـf^{-1} هي دالة إذا، وفقط إذا، كان f دالة واحد-لواحد. في هذه الحالة فإن $dom\ (f-1) =$ $rng\ (f)\ and\ rng\ (f-a) = dom\ (f)$.

راجع المثال 7 للاطلاع على البرهان.

يعطينا هذا طريقتين مختلفتين بعض الشيء لتوضيح أن الدالة $f: A \to B$ دالة تناظري.

- أثبت أن f دالة واحد – لواحد وشاملة.
- أثبت أن العلاقة المعكوسة f^{-1} هي دالة مجاله يساوي B.

تملي علينا ظروف المسألة الرياضية أية طريقة نستخدم. يمكنك تبرير متى تستخدم الطريقة الثانية لأنها غالباً ما تترافق مع المصطلح "قابل للانعكاس". يتطلب التمرين 11 أن تبرهن هذا دون استخدام المبرهنة 1.3.7.

ملخص

إذا كانت A مجموعة من الأشياء التي يصعب عدّها، وتتوقع وجود العديد من الأشياء في A بعدد مجموعة أخرى مختلفة سهلة العدّ B، إذن قد يتم استخدام مبدأ التناظر. التناظر هو دالة واحد – لواحد وشامل، ومبدأ التناظر يفيد بأن المجموعتين المحدودتين لهما نفس الحجم تماماً عند وجود تناظر بينهما. التناظر هو دالة واحد – لواحد وشامل، ومبدأ التناظر يفيد بأن المجموعتين المحدودتين لهما نفس الحجم تماماً عند وجود تناظر بينهما. إلى جانب دراسة هذه الأفكار، اختبرنا تركيب الدالتين والعلاقة المعكوسة للدالة.

التمارين

1. الأقل من علاقة في المجموعة [4] هي المجموعة:

$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$

بكلمات أخرى، $(a,b) \in R$ إذا وفقط إذا كان $a < b$. تتضمن المجموعة ستة أزواج مرتبة. كم زوجاً مرتباً في"أقل من" العلاقة في المجموعة $[n]$؟ كم العدد في العلاقة الأقل أو المساوية لـ $[n]$؟

2. عرّف علاقة R على $[24]\times[24]$ حيث $R \ni (a,b)$ تحديداً عندما يكون a معامل في b. اكتب R كمجموعة من الأزواج المرتبة.

3. كم دالة مختلفة توجد من $[7]$ إلى $[10]$؟

4. إذا أعطيت المجموعة S، تسمى الدالة $f: S \times S \to S$ **عملية ثنائية على S**.

إذا كانت S مجموعة محدودة، كم عدد العمليات الثنائية المختلفة الممكنة على S؟

5. أعطِ برهاناً تناظرياً: عدد المجموعات الجزئية من $[n]$ يساوي عدد الأعداد الثنائية المكونة من n خانة. (هذا يثبت حقيقة مبيّنة بالشكل 1.2).

6. أعطِ برهاناً تناظرياً: عدد الأعداد الثنائية المكونة من n خانة، بحيث يكون عدد الواحدات فيها k يساوي عدد المجموعات الجزئية المكونة من k من المجموعة $[n]$. (هذا يثبت حقيقة الترتيب المبينة بالشكل 1.2).

7. برهن المبرهنة 1.3.7.

8. برهن: إذا كان $f: A \to B$ دالة تناظرياً فإن f^{-1} يكون علاقة تناظر $B \to A$.

9. في برهان التناظر #1، برهن أن دالة متمم المجموعة هو واحد - لواحد باستخدم الخاصية المذكورة في التعريف 1.3.3. قارنها بالبرهان المعطى في النص.

10. افترض أن A و B مجموعتان محدودتان، حيث $|A| = |B|$، وأن $f: A \to B$ دالة. برهن أن: f هو دالة واحد - لواحد إذا وفقط إذا كان f دالةً شاملاً.

11. افترض أن A و B مجموعتان محدودتان وأن $f: A \to B$ دالة. برهن دون استخدام المبرهنة 1.3.7: إذا كانت العلاقة المعكوسةf^{-1} دالةً مجاله B فإن f يكون دالةً تناظرياً. أيضاً هل تحتاج أن تكون كل من A و B مجموعة محدودة؟

12. لتكن $\mathcal{E}$ و $\mathcal{O}$ مجموعتين جزئيتين الأولى حجمها عدد زوجي والثانية حجمها عدد فردي مأخوذتين من المجموعة $[n]$. إذا كانت n حجمها فردي إذن فإن دالة متمم المجموعة يطابق المجموعات في $\mathcal{E}$ مع المجموعات في $\mathcal{O}$. هل هذا تناظر؟ أثبت صحة أو خطأ ذلك.

13. يلخّص هذا التمرين برهاناً تناظرياً للمعادلة $\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{k+n-1}{k}$ من القسم 1.1. لتكن A مجموعة المجموعات الجزئية المكونة من k عنصر مأخوذة من المجموعة $[n]$ ولتكن B مجموعة المجموعات الجزئية المكونة من k عنصر من $[k + n - 1]$. افترض أن المجموعة المتعددة المكونة من k عنصر $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ مكتوبة بترتيب غير متناقص: $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k$. عرّف الدالة $f: A \to B$ بالمعادلة:

$$f(\{a_1, a_2, \dots, a_k\}) = \{a_1, a_2 + 1, a_3 + 2, \dots, a_k + k - 1\}$$

هذه الدالة والبرهان ينسبان ليونارد أويلر (Leonhard Euler).

(أ) برهن أن مخرجات الدالة f هي مجموعات جزئية مكونة من k عنصر مأخوذة من المجموعة $[k + n - 1]$. هذا يتطلب إثباتاً، بما أنه لا يكون واضحاً مباشرة من تعريف الدالة f.

(ب) برهن أن f هو دالة تناظري.

4.1 العلاقات ومبدأ التكافؤ

ينطبق مبدأ التكافؤ على مسائل التوافيق التي تعرض تماثلاً ما. ثمة مسألتان معياريتان تتضمنان عدّ الطرق الممكنة لإجلاس مجموعة من الناس حول مائدة مستديرة، وعد الطرق الممكنة لإقران مجموعة من الأشخاص، لنقل في الجولة الأولى من بطولة ذات مرحلتين ذهاب وإياب. تتضمن المسألتان بعض الأمور التي لم نواجهها بعد.

غاياتنا في هذا القسم هي إرساء أسس مبدأ التكافؤ أولاً، ومن ثم توضيح كيفية تطبيقه. في الفصل الخامس، سندرس مبرهنة بوليا للتعداد (Polya's Enumeration Theorem) وهي تعميم قوي جداً لمبدأ التكافؤ.

علاقة التكافؤ

يستند مبدأ التكافؤ على فكرة علاقة التكافؤ (Equivalence Relation)، وهي إحدى أكثر العلاقات انتشاراً في كلّ علوم الرياضيات. تذكّر أن العلاقة في المجموعة A هي مجموعة جزئية من $A \times A$.

التعريف 1.4.1 (علاقة التكافؤ): العلاقة $\mathcal{E}$ في مجموعة A هي علاقة تكافؤ على A إذا كانت $\mathcal{E}$ تحقق الخصائص التالية:

- **الخاصية الانعكاسية** (Reflexive): لكل $a \in A, (a,a) \in \mathcal{E}$.
- **الخاصية التماثلية**: لكل $a , b \in A$ إذا كان $(a,b) \in \mathcal{E}$ فإن $(b,a) \in \mathcal{E}$.
- **خاصية التعدي**: لكل $a , b, c \in A$ إذا كان $(a,b) \in \mathcal{E}$ و $(b,c) \in \mathcal{E}$ فإن $(a,c) \in \mathcal{E}$.

تستخلص فكرة علاقة التكافؤ ثلاث خصائص تتلاءم المساواة الطبيعية فيها مع أي مجموعة من الأعداد. فهي انعكاسية (لأن $a = a$ لأي عدد a)، وتماثلي (الترتيب غير مهم لأن $a = b$ و $b = a$ تعنيان الشيء نفسه) ومتعدّية (إذا كان $a = b$ و $b = c$ فإن $a = c$).

من المألوف كتابة التعبير $a\mathcal{E}b$ للدلالة على $(a,b) \in \mathcal{E}$. بهذا الترميز، تصبح الخاصية التماثلية، على سبيل المثال: لكل $a, b \in A$، إذا كان $a\mathcal{E}b$ فإن $b\mathcal{E}a$. نستخدم الترميزين بالتبادل.

أمثلة

أ) من الأمثلة الهامة على علاقة التماثل نمط التطابق (Congruence Module) n على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$. بمعنى، ثبت عدداً صحيحاً موجباً n ثم عرّف العلاقة لأي عددين صحيحين a و b:

$$a \equiv b (mod\ n) \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad n|(a-b)$$

إذن على سبيل المثال، $54 \equiv 5 (mod\ 7)$ لأن $54 - 5 = 49$ أي باقي قسمة 54 على 7 هو 5، و $7|(-49)$. من ناحية أخرى $5 \not\equiv -3(mod\ 7)$ لأن $5 - (-3) = 8$، و7 ليست من عوامل 8. (راجع التمرين 4 للاطلاع على برهان أن هذه علاقة تكافؤ).

السؤال 36: هل $45 \equiv 106(mod\ 2)$؟ هل $47 \equiv 97(mod\ 2)$؟ حدّد متى تكون $a \equiv b(mod\ 2)$ صحيحة على وجه التحديد.

ب) عرّف علاقة ~ على مجموعة قوى [3] بـ $S{\sim}T$ إذا، وفقط إذا، كان $|S| = |T|$. بمعنى آخر، ترتبط مجموعتان مع بعضهما البعض عندما تكونان من نفس الحجم. إذن على سبيل المثال $\{1\}{\sim}\{3\}$ لأن كلتا المجموعتين حجمها 1، و $\{1,2\}{\sim}\{2,3\}$ لأن حجم المجموعتين 2. كما أن $\{1\} \nsim \emptyset$ لأن حجمهما ليس متساوياً. هذه العلاقة ~ انعكاسية لأن $|S| = |S|$ صحيحة لأي مجموعة S. كما أنها تبادلية لأن $|S| = |T|$ وبالتالي $|T| = |S|$. وهي متعدّية لأنه إذا كان $|S| = |T|$ و $|T| = |U|$ فإن $|S| = |U|$. هذه علاقة تكافؤ.

ت) لأي مجموعة A، علاقة التطابق على A هي العلاقة

$$\mathcal{I}_A := \{(a,a): a \in A\}$$

فهي علاقة تكافؤ.

صفوف التكافؤ

إذا أعطيت علاقة تكافؤ على مجموعة A وأي عنصر $a \in A$، فإن صف التكافؤ (Equivalence Class) الذي يحتوي العنصر a هو مجموعة كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A التي ترتبط بالعنصر a.

التعريف 1.4.2 **(صف التكافؤ)** لتكن $\mathcal{E}$ علاقة تكافؤ على المجموعة A. لأي عنصر $a \in A$، فإن صف التكافؤ الذي يحتوي العنصر a هو المجموعة

$$\mathcal{E}(a) \coloneqq \{x \in A : (a, x) \in \mathcal{E}\}$$

أمثلة

أ) إذا كان $\mathcal{E}$ علاقة نمط تطابق 3 على مجموعة الأعداد الصحيحة، فإن صف التكافؤ الذي يحتوي العدد الصحيح 0 هو مجموعة كل الأعداد الصحيحة التي باقي القسمة لها يساوي 0 عند قسمتها على 3؛ أي أن مضاعفات 3 هي:

$$\mathcal{E}(0) = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$$

صف التكافؤ الذي يحتوي العدد 1 هو مجموعة كل الأعداد الصحيحة التي باقي قسمتها على 3 يساوي 1:

$$\mathcal{E}(1) = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$$

السؤال 37: جد $\mathcal{E}(2)$ و $\mathcal{E}(40)$.

ب) إذا كان ~ علاقة "لها نفس الحجم" على مجموعة قوى [3]، فإن صف التكافؤ الذي يحتوي المجموعة $\{1\}$ هو $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$.

السؤال 38: لنفس العلاقة، جد صف التكافؤ الذي يحتوي $\emptyset$ وصف التكافؤ الذي يحتوي $\{2,3\}$.

العناصر المترابطة توجد في نفس صف التكافؤ

تفيد النتيجة التالية بأنه إذا ارتبط عنصران بعلاقة تكافؤ، فإن صفوف التكافؤ لهما تكون متساوية.

المبرهنة 1.4.3: إذا كانت $\mathcal{E}$ علاقة تكافؤ على المجموعة A و $(a,b) \in \mathcal{E}$، فإن $\mathcal{E}(a) = \mathcal{E}(\mathrm{b})$.

البرهان: لتكن $\mathcal{E}$ علاقة تكافؤ على المجموعة A ولتكن $(a,b) \in \mathcal{E}$. لإثبات صحة أن $\mathcal{E}(a) = \mathcal{E}(\mathrm{b})$، علينا أن نبيّن أن كلاً منهما مجموعة جزئية من الأخرى.

أولاً، لتكن $x \in \mathcal{E}(a)$. فهذا يعني أن $(a,x) \in \mathcal{E}$. بما أن $(b,a) \in \mathcal{E}$ لأن $\mathcal{E}$ تبادلية، فهذا يتضمن أن $(b,x) \in \mathcal{E}$ لأن $\mathcal{E}$ متعدية. إذن $x \in \mathcal{E}(b)$. بالنتيجة $\mathcal{E}(a) \subseteq \mathcal{E}(b)$.

برهان أن $\mathcal{E}(b) \subseteq \mathcal{E}(a)$ مشابه وقد تركناه للسؤال التالي. هذا يكمل البرهان أن $\mathcal{E}(a) = \mathcal{E}(\mathrm{b})$. ■

السؤال 39: أكمل البرهان بإثبات صحة العبارة $\mathcal{E}(b) \subseteq \mathcal{E}(a)$.

التجزئة

التعريف 1.4.4 (التجزئة) (Partition): لأي مجموعة S، تجزئة S هي مجموعة غير خالية ، واتحاد المجموعات الجزئية من S يساوي S.

على سبيل المثال، هذه 3 تجزئات ممكنة للمجموعة [6]:

$$P_1 = \{\{1,6\}, \{2\}, \{3,4,5\}\}$$
$$P_2 = \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$
$$P_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4,5\}, \{6\}\}$$

عناصر التجزئة تسمى كتل (Blocks) التجزئة. وعليه فإن لـ P_1 ثلاث كتل وP_2 ذات كتلة واحدة وP_3 ذات خمس كتل. (سنتعلم كيفية عدّ الكتل في الأقسام 2.3 و 3.1).

علاقات التكافؤ والتجزئات

إن مفاهيم علاقة التكافؤ والتجزئة مترابطة: ثمة تناظر طبيعي بين علاقات التكافؤ على مجموعة معطاة وتجزئات تلك المجموعة. سنبرهن ذلك الآن. الخطوة الأولى هي فهم كيف تحثّ علاقة التكافؤ التجزئة.

المبرهنة 1.4.5: إذا كانت $\mathcal{E}$ علاقة تكافؤ على المجموعة A، فإن مجموعة

$$P := \left\{\mathcal{E}(a) : a \in A\right\}$$

صفوف تكافؤ العلاقة $\mathcal{E}$ هي تجزئة على A.

البرهان: لتكن $\mathcal{E}$ علاقة تكافؤ على المجموعة A. باتباع التعريف 1.4.4، فإننا نتحقق أولاً من أن كل جزء من P مجموعة غير خالية. لتكن $\mathcal{E}(a)$ جزء من التجزئة P. بما أن $\mathcal{E}$ إنعكاسية، فإن $(a, a) \in A$. وهذا يعني أن $a \in \mathcal{E}(a)$، إذا $\mathcal{E}(a)$ مجموعة غير خالية. أيضاً، بما أن $a \in \mathcal{E}(a)$ لكل قيم $a \in A$، فإننا نرى أن اتحاد كتل التجزئة P يساوي A.

الأمر الأخير الذي ينبغي إثباته هو أن كتل التجزئة P منفصلة. إذا كانت التجزئة P تضم جزءاً واحداً فقط (تحديداً المجموعة A نفسها)، فإنه ما من شيء يمكن عمله. إذن، نفترض أن $\mathcal{E}(a)$ و$\mathcal{E}(b)$ كتلتين مختلفتين من التجزئة P. يجب أن نبيّن أنهما منفصلتان.

افترض أنهما ليستا منفصلتين، إذن ثمة عنصر $c \in A$ بحيث $c \in \mathcal{E}(a)$ و $c \in \mathcal{E}(b)$. الأول يتضمن أن $(a, c) \in \mathcal{E}$ والثاني يتضمن أن $(c, b) \in \mathcal{E}$. إذن تنطبق خاصية التعدي $(a, b) \in \mathcal{E}$. لكن المبرهنة 1.4.3 تتضمن أن $\mathcal{E}(a) = \mathcal{E}(b)$ وهذا يتعارض مع الافتراض الأصلي أن هذه كتل مختلفة من P. وعليه فإنها تكون كتلاً منفصلة. ■

تالياً، نبيّن كيف أن التجزئة تحثّ علاقة تكافؤ.

المبرهنة 1.4.6: إذا كان P تجزئة على المجموعة A، فإن العلاقة $\mathcal{R}$ على A المعرّفة بالصيغة:

$$\mathcal{R} := \{(a,b) \in A \times A \ : \ a \text{ و } b \text{ نفس الأجزاء على } P\}$$

$$\mathcal{R} := \{(a,b) \in A \times A{:}\ a \text{ is in the Same Block of P as is b}\}$$

هي علاقة تكافؤ على A.

البرهان: لتكن $P = \{P_1, \dots, P_k\}$ تجزئة على المجموعة A. يجب أن نبرهن أن العلاقة $\mathcal{R}$ المعرفة في 1.7 هي علاقة تكافؤ.

انعكاسية: لتكن $a \in A$. بما أن P تجزئة على A، فإن العنصر a ينتمي إلى كتلة واحدة فقط P_i من التجزئة. من الواضح أن a هو كتلة بنفسه، إذن $(a,a) \in \mathcal{R}$. وعليه فإن $\mathcal{R}$ انعكاسية.

تماثلية: افترض أن $(a,b) \in \mathcal{R}$، فهذا يعني أن a تقع ضمن نفس الكتلة من P كما هو الأمر بالنسبة لـ b. لكن بالتالي فإن b تقع في نفس الكتلة من P الذي يقع فيها a، وعليه فإن $(b,a) \in \mathcal{R}$. إذن $\mathcal{R}$ إنعكاسية.

متعدّية: افترض أن $(a,b) \in \mathcal{R}$ و$(b,c) \in \mathcal{R}$. فهذا يعني أن a تقع ضمن نفس الكتلة من P كما هو الأمر بالنسبة لـ b. لكن بالتالي فإن b تقع في نفس الكتلة من P التي يقع فيها c. لكن بما أن P تجزئة وبالتالي كل عنصر في المجموعة A ينتمي لكتلة

واحدة فقط على وجه التحديد، فهذا يعني أن a تقع ضمن نفس الكتلة من P التي تقع فيها c، إذن $(a,c) \in \mathcal{R}$. وعليه فإن $\mathcal{R}$ متعدية. ■

يمكننا الآن عرض التناظر بين علاقات التكافؤ والتجزئات.

المبرهنة 1.4.7: إذا كانت A مجموعة محدودة، فإن عدد علاقات التكافؤ الممكنة على A يساوي عدد التجزئات الممكنة من A.

البرهان: لتكن A مجموعة محدودة. نستخدم مبدأ التناظر. عرّف المجموعات التالية:

E
$:= \Big\{$ $\mathcal{E}$: $\mathcal{E}$ علاقة عكسية على A $\Big\}$ $\mathcal{E}$: $\mathcal{E}$ *is an Equivalence Relation on* $A\}$

$P :=$ $\Big\{$ P: P تجزئة من A $\Big\}$ P: P *is a Partition of* $A\}$

وعرّف الدالة $f : E \to P$ بالتجزئة:

$$f\left(\mathcal{E}\right) = \left\{\mathcal{E}(\mathrm{a}) : a \in A\right\}$$

علينا أن نثبت أن هذه علاقة تناظر. أولاً لاحظ أنه، وحسب مبرهنة 1.4.5، فإن $f\left(\mathcal{E}\right)$ تجزئة من A.

واحد-لواحد: لتكن $\mathcal{E}_1$ و $\mathcal{E}_2$ علاقتي تكافؤ غير متساويتين على A. وهذا يعني أنه، وبدون فقدان العمومية، يوجد قائمة ذات عنصرين (a_1, a_2) في $\mathcal{E}_1$ وليس في $\mathcal{E}_2$.

بما أن $(a_1, a_2) \in \mathcal{E}_1$ فإننا نعلم أن $a_2 \in \mathcal{E}_1(a_1)$، وعليه فإن a_1 و a_2 في نفس الكتلة من التجزئة $f\left(\mathcal{E}_1\right)$. لكن بما أن $(a_1, a_2) \notin \mathcal{E}_2$ فإننا نعلم أن $a_2 \notin \mathcal{E}_2(a_1)$ وبناءً عليه فإن a_1 و a_2 ليسا في نفس الكتلة من التجزئة $f\left(\mathcal{E}_2\right)$. إذن هاتان التجزئتان غير متساويتين: $f\left(\mathcal{E}_1\right) \neq f\left(\mathcal{E}_2\right)$.

شامل: لتكن P تجزئة من A. ابنِ المجموعة $\mathcal{E}$ المبيّنة في (1.7)، والتي تضمن المبرهنة 1.4.6 أنها علاقة تكافؤ. يتبع ذلك أن $f\left(\mathcal{E}\right) = P$، حيث صفوف تكافؤ $\mathcal{E}$ هي تحديداً أجزاء من P. ■

مبدأ التكافؤ

نعود الآن لعدّ وبيان كيفية استخدام علاقات التكافؤ لأغراض توافقية.

مثال: عد الترتيبات الدائرية

بكم طريقة يمكننا إجلاس مجموعة مكونة من أربعة أشخاص حول مائدة مستديرة؟ نعتبر أن طريقتين للإجلاس متساويتان إذا كان للشخص نفس الجارين من اليسار إلى اليمين.

لتكن [4] مجموعة من الأشخاص. ابدأ بـتباديل [4] وتساوي $4! = 24$، ثم ضع في الاعتبار أن ثمة تبادلين متكافئين إذا أجلس الأشخاص حول مائدة، فإن

مجاوري كل شخص من اليمين واليسار هم أنفسهم. بإعطاء تبديل كـ (3,4,2,1)، فهذا التبديل مكافئ لنفسه ولثلاثة تباديل أخرى، وهي تحديداً:

$$(3,4,2,1) \equiv (4,2,1,3) \equiv (2,1,3,4) \equiv (1,3,4,2)$$

هنا نستخدم الرمز ≡ للإشارة إلى علاقة التكافؤ. لاحظ أن هذه التباديل تحصلنا عليها من تدوير المقاعد الأصلية (3, 4, 2, 1) حول المائدة. وهي متكافئة لأن أي حركة تدوير من شأنها المحافظة على مجاوري الشخص من اليمين واليسار. كل صف تكافؤ للتباديل يكون حجمه 4، إذن عدّنا الأولي لـ !4 يجب أن يكون كبيراً بعامل من عوامل 4. الإجابة هي $6 = 4!/4$.

من المفيد أن يتم ترتيب التباديل الـ 24 حسب صفوف التكافؤ:

الصف **1**:	(1,2,3,4)	(2,3,4,1)	(3,4,1,2)	(4,1,2,3)
الصف **2**:	(,2,4,31)	(2,4,3,1)	(4,3,1,2)	(3,1,2,4)
الصف **3**:	(1,3,2,4)	(3,2,4,1)	(2,4,1,3)	(4,1,3,2)
الصف **4**:	(1,3,4,2)	(3,4,2,1)	(4,2,1,3)	(2,1,3,4)
الصف **5**:	(1,4,2,3)	(4,2,3,1)	(2,3,1,4)	(3,1,4,2)
الصف **6**:	(1,4,3,2)	(4,3,2,1)	(3,2,1,4)	(2,1,4,3)

لاحظ أننا عددنا صفوف التكافؤ (ثمة 6 منها) وليس التباديل (وعددها 24).

نص المبدأ

يصوّر المثال السابق استخدام مبدأ التكافؤ: اعمل إفراطاً في العدّ (Over-Count)، عرّف علاقة تكافؤ، ثم قسّم العدّ المفرط على حجم كل صف تكافؤ. ينطبق مبدأ التكافؤ فقط عندما تكون صفوف التكافؤ كلها ذات حجم واحد. يسهب الفصل الخامس المخصص لنظرية بوليا في العدّ في شرح مبدأ التكافؤ ويغطي حالة كون صفوف التكافؤ غير متساوية الحجم.

المبرهنة 1.4.8 (**مبدأ التكافؤ**): لتكن $\mathcal{E}$ علاقة تكافؤ على مجموعة محدودة A. لنفترض أن كل صف تكافؤ من $\mathcal{E}$ حجمه C حيث C عدد صحيح موجب، فإن صفوف تكافؤ $\mathcal{E}$ تكون $\frac{|A|}{C}$.

البرهان: افترض أن $\mathcal{E}$ علاقة تكافؤ على مجموعة محدودة A و كل صف تكافؤ من $\mathcal{E}$ حجمه C حيث C عدد صحيح موجب. لتكن k عدد صفوف التكافؤ $\mathcal{E}$. علينا إثبات أن $k = \frac{|A|}{C}$.

حسب المبرهنة 1.4.5 صفوف تكافؤ $\mathcal{E}$ تجزئة على A. لنقل إن هذه التجزئة مقسمة إلى صفوف التكافؤ $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$. وهذا يعني أنه على وجه التحديد:

$$|P_1| + |P_2| + \cdots + |P_k| = |A|$$

لكن $|P_i| = C$ لكل قيم i، إذن يمكن قراءة المعادلة كـ $kC = |A|$ أو $k = \frac{|A|}{C}$. ■

السؤال 40: بكم طريقة يمكن إجلاس مجموعة مكون من n شخص حول مائدة مستديرة؟

مثال: عدّ الأزواج

بكم طريقة مختلفة يمكننا ترتيب 10 أشخاص في خمس أزواج؟

لتكن [10] مجموعة من الأشخاص. لنأخذ تباديل 10! المجموعة [10]، وأحد أمثلتها (3,2,9,10,1,5,8,7,4,6). انشئ ترتيباً من كل التباديل لوضع الأزواج المتجاورة معاً. هذا المثال على التباديل يقودنا إلى الأزواج: {3,2} {9,10} {1,5} {8,7} {4,6}.

افترض أن تبديلين على [10] متكافئان إذا نتج عنهما نفس الأزواج. ثمة العديد من التباديل على [10] المكافئة لتبديل معطى. إذا بدّلنا موقع العناصر بمواقع 1 و2 و/ أو بمواقع 3 و 4، وهكذا، فإننا نحصل على نفس الأزواج. باستخدام ≡ لتحقيق علاقة التكافؤ، إحدى طرق عمل ذلك على مثال التباديل أعلاه ما يلي:

$$(3,2,9,10,1,5,8,7,4,6) \equiv (3,2,\underbrace{10,9}_{\text{تبديل}},1,5,\underbrace{7,8}_{\text{تبديل}},\underbrace{6,4}_{\text{تبديل}})$$

كما يمكننا إعادة ترتيب مواقع الأزواج كوحدة، كما يلي:

$$(\underbrace{3,2}_{\text{الزوج1}} , \underbrace{9,10}_{\text{الزوج2}}, \underbrace{1,5}_{\text{الزوج3}} , \underbrace{8,7}_{\text{الزوج4}} , \underbrace{4,6}_{\text{الزوج5}}) \equiv (\underbrace{8,7}_{\text{الزوج4}} , \underbrace{3,2}_{\text{الزوج1}} , \underbrace{9,10}_{\text{الزوج2}}, \underbrace{4,6}_{\text{الزوج5}} , \underbrace{1,5}_{\text{الزوج3}})$$

السؤال 41: أعط تبادلين مكافئين لـ 10,9,8,7,6,5,4,3,2,1) باستخدام ≡.

بشكل عام، أي تباديل للمجموعة [10] سيكون مكافئاً لـ $5!.2^5$=3840 تبديل ترتبط بـ 2^5 طريقة لترتيب الأزواج وبـ !5 طريقة لترتيب الأزواج. حسب مبدأ التكافؤ، يوجد $\frac{10!}{2^5.5!} = 945$ طريقة مختلفة لتكوين أزواج من 10 أشخاص (5 أزواج). في الواقع، فقد عددنا تجزئات [10] على أنها 5 أجزاء، حجم كلٍ منها 2.

السؤال 42: بكم طريقة مختلفة يمكننا ترتيب n شخص في n زوج؟

مثال: صيغة للتوافيق $\binom{n}{k}$

فيما يلي كيفية استخدام مبدأ التكافؤ لتبرير الصيغة $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$ التي ذكرناها في القسم 1.1. أولاً نختبر الحالة الخاصة $n = 5$ و $k = 3$. كم مجموعة جزئية مكونة من 3 عناصر تحوي المجموعة [5]؟

أولاً، ضع قائمة بكافة التباديل المكونة من 3 عناصر من المجموعة [5]، ستتكون هذه القائمة من $(5)_3 = 60$. هذه التباديل موضّحة في الشكل 1.5. تذكّر أن الترتيب مهم في التباديل، ولكنه ليس مهماً في المجموعة. لنعرّف علاقة التكافؤ

التالية على مجموعة مكونة من 3 تباديل ولنفترض وجود تبديلين متكافئين مكونين من 3 عناصر إذا تضمنا نفس العناصر تحديداً. هذه علاقة تكافؤ. أيضاً كل صف تكافؤ حجمه 3! لأنه يوجد 3! طريقة لترتيب العناصر الثلاثة. (الصناديق في الشكل 1.5 تصوّر صناديق التكافؤ). حسب مبدأ التكافؤ، عدد صفوف التكافؤ يساوي $\frac{(5)_3}{3!}$.

السؤال 43: عمّم القاعدة لبرهان الصيغة $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$.

هل هي علاقات تكافؤ؟

لم نبرهن بصورة نظامية أن ترميزات التكافؤ المستخدمة في الأمثلة الثلاثة الأخيرة كانت علاقات تكافؤ. في العديد من الأمثلة يكفي التبرير باستخدام الاتجاهات غير النظامية. في سؤال الترتيبات الدائرية، يمكن إنجاز ذلك للتكافؤ المرتبط بالتدوير كما سيتبع. هل تكون عملية إجلاس أربعة أشخاص مكافئة لنفسها؟ نعم، فقط لا تقم بالتدوير. أيضاً إذا كانت عملية إجلاس A مكافئة لعملية إجلاس B بإجراء بعض التدوير، فإن B تكافئ A بعكس التدوير الأصلي. أخيراً، إذا كانت A تكافئ B و B تكافئ C فإن A تكافئ C بتكوين عمليتي التدوير.

إن أي تطبيق لمبدأ التكافؤ يتطلب استخدام علاقة تكافؤ معقدة نسبياً يجب أن يتضمن برهاناً. مع أن العديد منها غير مبرهنة.

$(1,2,3)$	$(1,2,4)$	$(1,2,5)$	$(1,3,4)$	$(1,3,5)$
$(1,3,2)$	$(1,4,2)$	$(1,5,2)$	$(1,4,3)$	$(1,5,3)$
$(2,1,3)$	$(2,1,4)$	$(2,1,5)$	$(3,1,4)$	$(3,1,5)$
$(2,3,1)$	$(2,4,1)$	$(2,5,1)$	$(3,4,1)$	$(3,5,1)$
$(3,1,2)$	$(4,1,2)$	$(5,1,2)$	$(4,1,3)$	$(5,1,3)$
$(3,2,1)$	$(4,2,1)$	$(5,2,1)$	$(4,3,1)$	$(5,3,1)$
$(1,4,5)$	$(2,3,4)$	$(2,3,5)$	$(2,4,5)$	$(3,4,5)$
$(1,5,4)$	$(2,4,3)$	$(2,5,3)$	$(2,5,4)$	$(3,5,4)$
$(4,1,5)$	$(3,2,4)$	$(3,2,5)$	$(4,2,5)$	$(4,3,5)$
$(4,5,1)$	$(3,4,2)$	$(3,5,2)$	$(4,5,2)$	$(4,5,3)$
$(5,1,4)$	$(4,2,3)$	$(5,2,3)$	$(5,2,4)$	$(5,3,4)$
$(5,4,1)$	$(4,3,2)$	$(5,3,2)$	$(5,4,2)$	$(5,4,3)$

$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,2,5\}$	$\{1,3,4\}$	$\{1,3,5\}$
$\{1,4,5\}$	$\{2,3,4\}$	$\{2,3,5\}$	$\{2,4,5\}$	$\{3,4,5\}$

الشكل 1.5: تباديل ذات 3 عناصر من [5] وارتباطها بالمجموعات الجزئية المكونة من 3 عناصر.

ملخص

علاقة التكافؤ هي علاقة على مجموعة تحقّق خصائص الانعكاس والتماثل والتعدي. ثمة ارتباط طبيعي بين علاقة التكافؤ على مجموعة وتجزئات تلك المجموعة. إذ يقودنا هذا الارتباط إلى مبدأ التكافؤ.

عندما نستخدم مبدأ التكافؤ، فإننا نعيد صياغة المسألة الأصلية كعدّ صفوف التكافؤ في علاقة تكافؤ ملائمة. وهي تنطبق فقط عندما تتساوى أحجام صفوف التكافؤ.

تمارين

1) افترض وجود نسخة صغيرة من المسألة التي حللناها في هذا القسم: كم طريقة ممكنة لترتيب أربعة أشخاص في زوجين؟ اكتب كل تباديل [4] ثم اجمعها في صفوف تكافؤ. كم حجم كل صف تكافؤ، وما هي إجابة السؤال الأصلي؟

2) لتكن $A = [n]$. ما هو أكبر وأصغر حجم ممكن لعلاقة التكافؤ على A؟ برهن صحّة إجابتك.

3) لتكن $\mathcal{E}$ علاقة تكافؤ على المجموعة A. جد $\mathcal{E}^{-1}$. برهن صحة إجابتك.

4) برهن أن نمط التطابق n، كما هو معرّف في 1.5 صفحة 33، هو علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$.

5) أكمل الفراغ ثم برهن صحة العبارة: علاقة التكافؤ على A هي دالة $A \to A$ إذا، وفقط إذا، --

6) لتكن $f: A \to B$. عرّف علاقة $\equiv$ على A بـ $a_1 \equiv a_2$ إذا، وفقط إذا، كان $f(a_1) = f(a_2)$ اعط برهاناً سريعاً أن هذه علاقة تكافؤ. ما هي صفوف التكافؤ؟ اشرح الأمر.

7) حل مسألة ترتيبات المقاعد الدائرة لأربعة أشخاص، لكن هذه المرة بافتراض أن جلستين فقط متكافئتين إذا عُلم أن كل شخص له نفس مجموعات المجاورين. (أي أننا لا نميّز بين المجاورين على اليمين أو اليسار).

8) كم طريقة يوجد لإجلاس خمس نساء وخمسة رجال حول مائدة مستديرة إذا كانت الجلسة تتضمن سيدة ثم رجل ثم سيدة، إلخ (أي بالتناوب)؟

9) بكم طريقة يمكننا ترتيب 10 مقاعد ذات 9 ألوان مختلفة (ثمة مقعدين من لونٍ واحد، بما أنه لا يمكن تمييزها) حول مائدة مستديرة؟

10) بكم طريقة يمكننا تقسيم مجموعة مكونة من 10 أشخاص إلى مجموعتين حجم إحداها 3 والأخرى 4؟

11) كم عدد تجزئات $[n]$ المقسّمة إلى جزئين؟ كم عدد تجزئات $[n]$ المقسمة إلى $n-1$ جزء؟

12) برهن أن حاصل ضرب أي أعداد صحيحة موجبة متعاقبة k يقبل القسمة على $k!$.

13) استخدم مبدأ التكافؤ لإثبات الصيغة $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$. بمعنى آخر، عدّ التباديل المكونة من k عنصر من المجموعة $[n]$ بعدّ تباديل n (لها $n!$) أولاً ومن ثم تعريف علاقة تكافؤ ملائمة على مجموعة تباديل $[n]$.

14) استخدم مبدأ التكافؤ لإثبات الصيغة $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. (هذا يتطلب برهاناً مختلفاً عن ذلك الذي أعطي مسبقاً في هذا القسم، وذلك أن المقام هنا $n!$ وليس $(n)_k$. أي أن علاقة التكافؤ يجب أن تكون على مجموعة تباديل $[n]$ وليس مجموعة تباديل $[n]$ المكونة من k عنصر).

15) كم عقداً مختلفاً يمكن صنعها من خرزات عددها n ذات ألوان مختلفة؟ ضع في الاعتبار أن ثمة عقدين متشابهين إذا (كما في الترتيب الدائري) كان من الممكن الحصول على الأول من الثاني بالتدوير أو إذا (بخلاف الترتيب الدائري) كان من الممكن الحصول على الأول من الآخر بقلب العقد رأساً على عقب.

16) لتكن R_1 و R_2 علاقات تكافؤ على المجموعة A.

أ) هل $R_1 \cup R_2$ علاقة تكافؤ على A؟ أثبت صحة ذلك أو انفه.

ب) هل $R_1 \cap R_2$ علاقة تكافؤ على A؟ أثبت صحة ذلك أو انفه.

1.5 التواجد ومبدأ برج الحمام

في القسم الأخير من هذا الفصل، نناقش مبدأ يُعنى بالتواجد (Existence) بدلاً من التعداد.

النظرية 1.5.1 (مبدأ برج الحمام الأساسي) (Basic Pigeonhole Principle) : إذا تم توزيع أكثر من n شيء على عدد n من الصناديق، فإن بعض الصناديق لا بد أن تحتوي على شيئين على الأقل.

البرهنة بالتناقض ستفي بالغرض: إذا احتوى كل صندوق على شيء واحد على الأكثر، فإننا لا بد أن نكون قد وزعنا n أشياء على الأكثر في الموقع الأول.

مبدأ برج الحمام منطقي بالحس السليم. لكن عند تطبيقه بذكاء، قد ينتج عنه نتائج مفاجئة أو غير متوقعة. سنستخدم مبدأ برج الحمام في عدة حالات في هذا الكتاب. أهمها في القسم 6.4 في شرح نظرية رامزي (Ramsey Theory)، والتي تتناول نسخاً معممة لمبدأ برج الحمام، وتتضمن بعض أصعب مسائل البحث في التوافيق اليوم.

الأمثلة الأولى

تطبيقات سهلة لمبدأ برج الحمام

لنفترض أنك توجهت إلى الملعب لحضور مباراة في كرة السلة ضمن بطولة كبرى، ولنفترض أنك ركنت سيارتك في أحد مواقف السيارات الملحقة بالملعب. هل يجب أن يكون هناك سيارتان في الموقف بحيث تكون الخانات الثلاث الأخيرة في عداد السرعة في كل منهما متساوية بالضبط؟

أيضاً، في ملعب كرة السلة، ثمة 48,000 شخص. هل يجب أن يشترك شخصان في نفس تاريخ الميلاد (باليوم والشهر والسنة)؟

الإجابة عن السؤال الأول: محتمل. ثمة 1000 احتمال أن تكون الخانات الثلاث الأخيرة في عداد السرعة متساوية: 000 حتى 999. طالما أن هناك 1001

سيارة على الأقل في الموقف، فإن مبدأ برج الحمام الأساسي يضمن وجود سيارتين لهما نفس الخانات الثلاث الأخيرة.

السؤال 44: هل يجب أن يكون هناك سيارة تتساوى فيها الخانات الثلاث الأخيرة مع سيارتك؟ وضّح الأمر.

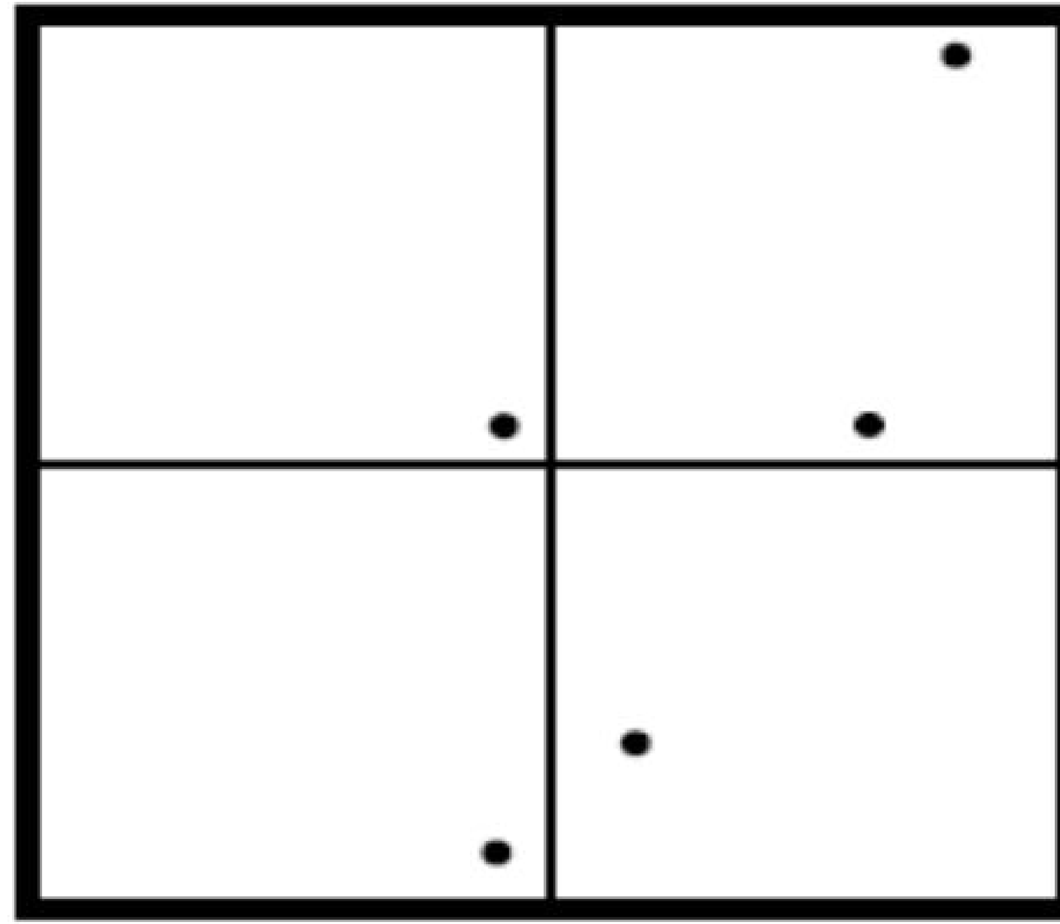
إجابة سؤال تواريخ الميلاد هي "نعم". كن كريماً وقل إن الناس في اللعبة تتراوح أعمارهم من 0 إلى 130 عام وكل عام فيه يوم. ينتج عن هذا 121×366=44,286 احتمال لأعياد الميلاد باليوم والشهر والسنة. بما أن أي توزيع ممكن للأشياء التي عددها 48,000 (الحضور في مباراة كرة السلة) على 44,286 صندوق (تواريخ الميلاد المحتملة) تتضمن صندوقاً يحتوي شيئين على الأقل، يجب أن يكون هناك على الأقل شخصان يتشاركان نفس عيد الميلاد.

استخدم آخرون مبدأ برج الحمام لمجادلة أن المدن الكبرى لا بد أن تحتوي عدداً معيناً من الناس الذين لهم نفس العدد من الشعر على رؤوسهم. (ظاهرياً، الحد الأقصى (العلوي) لعدد الشعر في رأس الإنسان هو 300,000 شعرة). مثل هذه النتائج جديرة بالاهتمام. فهي تضمن وجود الشيء دون الخوف من عدم العثور عليه.

نقطة في مربع

ضع خمس نقاط في أي موقع داخل وحدة مربعة. أثبت أنه يوجد نقطتان تبعدان عن بعضهما بمقدار $\frac{1}{\sqrt{2}}$ وحدة.

قسّم الوحدة المربعة إلى أربعة مربعات متساوية الحجم كالنافذة. بما أنه يوجد خمس نقاط وأربعة مربعات صغيرة فإن أحد المربعات الأصغر يحتوي نقطتين حسب مبدأ برج الحمام. مقاييس هذا المربع الأصغر هي $\frac{1}{2}$ في $\frac{1}{2}$ وحدة، وأبعد مسافة يمكن أن توجد فيها نقطتان في مربع كهذا هي $\frac{1}{\sqrt{2}}$ وهذا طول القطر. يمكن تصوّر ذلك من خلال الشكل 1.6.



الشكل 1.6: خمس نقاط في وحدة مربعة.

الشكل 45: طبّق نفس التحليل على 10 نقاط موضوعة في وحدة مربعة. ما هي مسافة النقاط المضمونة؟ برهن ذلك.

أصدقاء مشتركون

تتكون مجموعة من 7 أشخاص، كل شخص عنده على الأقل 3 أصدقاء من أعضاء تلك المجموعة. إذا كان ثمة شخصان غير صديقين، فهل سيكون لديهما

صديقاً مشتركاً في نفس المجموعة؟ ("صديق مشترك" يعني: إذا كان زيد وعمرو يعرفان عمر، يكون عمر صديقاً مشتركاً لكل من زيد وعمرو).

خذ أي شخصين ليسا صديقين وارمز لهما A و B. ثمة 5 أشخاص آخرين في المجموعة غير A و B. بما أن قائمة أصدقاء A تتضمن 3 أسماء على الأقل من الخمسة، وكذلك قائمة أصدقاء B، فإن مجموع الأسماء في القائمتين 6 أسماء على الأقل. لكن بوجود خمس أسماء ممكنة فقط للاختيار، يتضمن مبدأ برج الحمام أن بعض الأسماء لا بد ستظهر مرتين: صديق مشترك بين A و B.

إذا سهّلنا المتطلب "وجود ثلاثة أصدقاء على الأقل" ليصبح "وجود صديقين على الأقل"، فهل ستبقى النتيجة نفسها بالضرورة؟ الجواب: لا.

السؤال 46: أعطِ دليلاً. (يمكنك استخدام النقاط لتمثيل الأشخاص ولربط نقطتين ببعضهما لتمثيل الأصدقاء).

فيما يلي نظرية عامّة مشتقّة من مثال الأشخاص السبعة.

المبرهنة 1.5.2: خذ أي مجموعة مكونة من n من الأشخاص بحيث يكون لكل شخص $\frac{n}{2}$ صديق من بين أعضاء المجموعة. إذا كان شخصان من أفراد المجموعة ليسا صديقين، فلا بد أن يكون لهما صديق مشترك في المجموعة.

السؤال 47: برهن المبرهنة. أولاً، افهم سبب أن $[\frac{n}{2}]$ هو الرقم الصحيح.

يتطلب التمرين 5 منك بيان أن $[\frac{n}{2}]$ هو أفضل إمكانية. لمساعدتك على فهم أي اختلاف ممكن قد يظهر بين قيم n الفردية والزوجية، أجب أولاً عن السؤال التالي.

السؤال 48: جد دليلاً، شبيهاً بذلك الذي وجدته في مسألة الأشخاص السبعة مسبقاً، لبيان أن نتيجة المبرهنة ليس بالضرورة ثابتة في حال بقاء المجموعة n مكونة من 8 أشخاص وحيث يكون لكل شخص ثلاثة أصدقاء على الأقل.

إذا كنت معتاداً على نظرية الرسم البياني (طالع الفصل السادس)، فإنك ستدرك المبرهنة باعتبارها صورة مقنعة للنتيجة التالية: في أي رسم بياني بسيط عدد رؤوسه n بدرجة حدها الأدنى $[n/2]$، فإن أي رأسين سيكونان متجاورين أو لهما رأس مجاور مشترك.

الدوال ومبدأ برج الحمام

يمكن إعادة صياغة مبدأ برج الحمام بلغة الدوال.

المبرهنة 1.5.3 مبدأ برج الحمام الأساسي، نسخة الدالة: إذا كانت A و B مجموعتين محدودتين غير خاليتين، حيث $|B| < |A|$، فإنه لا يمكن أن يكون الدالة $A \rightarrow B$ واحد - لواحد.

السؤال التالي ما إذا كان بإمكاننا التعبير بشيء أقوى. خذ بالحسبان أي دالة من [10] إلى [3]، لنقل

$$f = \{(1,2), (2,1), (3,2), (4,2), (5,3), (6,1), (7,3), (8,3), (9,2), (10,2)\}$$

بما أن [10] مجموعة كبيرة نسبياً مقارنة بالمجموعة [3]، يجب أن نتوقع أن بعض العناصر في المجموعة [3] ترتبط بالعديد من عناصر [10]. لا شك أنه إذا ما حسبنا الصور العكسية لكل عنصر $b \in [3]$، سنرى أن:

$$f^{-1}(1) = \{2,6\}$$
$$f^{-1}(2) = \{1,3,4,9,10\}$$
$$f^{-1}(3) = \{5,7,8\}$$

تحديداً $|f^{-1}(2)| = 5$، وهذا كبير نسبياً. تذكّر أن العلاقة العكسية f^{-1} ليست دالةً بشكلٍ عام، إذن $f^{-1}(1)$ عبارة عن مجموعة عناصر من [10] ترتبط بالعنصر 1.

السؤال 49: أعط مثالاً على دالة $[10] \rightarrow [3]$، يكون دالته العكسية $f^{-1}(1) = \emptyset$. لمثل هذه الدالة، هل يجب أن يكون $f^{-1}(2)$ أو $f^{-1}(3)$ بحجمٍ معين؟ ما هو هذا الحجم؟

بديهياً، نتوقع أن كل عنصر في المجموعة [3] سيكون صورة لـ $\frac{10}{3}$ عنصر من المجموعة [10] بالمعدل. يمكننا أن نصوّر ذلك بدقة أكبر بالقول إن بعض عناصر [3] لا بد أن تكون صورة لـ $\frac{10}{3}$ من عناصر [10] على الأقل. بالنسبة للدالة أعلاه، يتحقق الأمر للعنصر 2، ويتحقق الأمر كذلك للدالة التي أنشأتها في السؤال 49.

للتحقق من السبب، افترض أنه، من باب التناقض فقط، كل عنصر في $[3]$ هو صورة لأقل من $\frac{10}{3}$ من عناصر $[10]$؛ أي أن $|f^{-1}(b)| < \frac{10}{3}$ لكل عنصر $b \in [3]$. وهذا سيعني أن

$$10 = \sum_{b=1}^{3} |f^{-1}(b)| < \sum_{b=1}^{3} \frac{10}{3} = 3.\frac{10}{3} = 10$$

أو $10 < 10$، وهذا تناقض. وعليه يوجد بعض قيم $b^* \in [3]$ يكون دالتها العكسية $|f^{-1}(b^*)| \geq \frac{10}{3}$.

بالطبع، فإن العدد $|f^{-1}(b)|$ على الطرف الأيسر من المتباينة هو عدد صحيح، إذن يمكننا توضيح الطرف الأيمن ليصبح $\left\lceil \frac{10}{3} \right\rceil = 4$.

النتيجة الأكثر عمومية هي ما نشير إليه على أنه مبدأ برج الحمام.

المبرهنة 1.5.4 (مبدأ برج الحمام): إذا كانت A وB مجموعتين محدودتين غير خاليتين، و $f : A \to B$ هو دالة، فإن بعض العناصر في B هي صورة لعدد من العناصر $\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil$ على الأقل في A.

البرهان: افترض أن A وB مجموعتان محدودتان غير خاليتين و f هو دالة من A إلى B.

أولاً نثبت أنه يوجد بعض العناصر $b^* \in B$ هي صورة لـ $\frac{|A|}{|B|}$ عنصر في A.

وباب التناقض افترض أن كل عنصر b ينتمي للمجموعة B هو صورة لعدد أقل من $\frac{|A|}{|B|}$ من عناصر A. إذن

$$|A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(b)| < \sum_{b \in B} \frac{|A|}{|B|} = |B|.\frac{|A|}{|B|} = |A|$$

وهذا تناقض. وعليه فإن بعض العناصر $b^* \in B$ هي صورة لـ $\frac{|A|}{|B|}$ من عناصر A على الأقل. بما أن عدد العناصر التي ترتبط بـ b^* لا بد أن يكون عدداً صحيحاً، يمكننا توضيح ذلك الحدّ لـ $\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil$. ■

بالعودة إلى مثال عداد السرعة في السيارة الوارد في بداية هذا القسم، إذا كان في موقف السيارات 5076 سيارة فإن الموقف يحتوي $\left\lceil \frac{5076}{1000} \right\rceil$=6 سيارات على الأقل تتساوى الخانات الثلاث الأخيرة في عداداتها.

السؤال 50: ما الخلاصة الناتجة عند تطبيق مبدأ برج الحمام على الدالة $f: [n^2 + 1] \rightarrow [n]$؟ وعلى الدالة $g: A \rightarrow B$ بحيث $|A| < |B|$؟

دوال k–لواحد

تكون الدالة واحد - لواحد إذا كان كل عنصر في مجاله المقابل صورة لعنصر واحد على الأقل في المجال. وتكون الدالة **اثنين لواحد** إذا كان كل عنصر في مجاله المقابل صورة لعنصرين على الأكثر في المجال. فيما يلي التعريف العام.

التعريف 1.5.5 (دالة k-لواحد): يكون الدالة k-لواحد إذا كان كل عنصر في مجاله المقابل صورة لعنصرين على الأكثر في المجال.

صورياً، في دالة k-لواحد تجد عدد k من الأسهم التي تؤشّر على كل عنصر في المجال المقابل.

الدالة $f: [10] \to [3]$ المعطى في بداية هذا القسم له الدوال العكسية التالية:

$$|f^{-1}(1)| = 2, \quad |f^{-1}(2)| = 5, \qquad |f^{-1}(3)| = 3$$

إذن هذا الدالة خمسة لواحد.

السؤال 51: لماذ يكون أي دالة k-لواحد دالة $(k+1)$- لواحد أيضاً؟

كما أعدنا صياغة مبدأ برج الحمام الأساسي (المبرهنة 1.5.1) من خلال استحالة الدالة واحد - لواحد (المبرهنة 1.5.3)، يمكننا أيضاً إعادة صياغة المبرهنة 1.5.4.

المبرهنة 1.5.6 (مبدأ برج الحمام): إذا كانت A وB مجموعتين محدودتين غير خاليتين، فإنه ما من دالة $A \to B$ يمكن أن يكون دالة k-لواحد لأي قيمة لـk أصغر من $\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil$.

يتطلب التمرين 9 منك برهنة هذه المبرهنة.

مثالان أكثر صعوبة

مثال: الأصفار والواحدات

لكل $n > 0$، برهن أنه يوجد عدد صحيح يحتوي على أصفار فقط أو على واحدات فقط يقبل القسمة على n.

يتطلب هذا تطبيقاً دقيقاً لمبدأ برج الحمام! فيما يلي تمثيلاً للفكرة عندما $n = 12$.

لنأخذ مجموعة مكونة من 13 عنصراً:

$$A \coloneqq \{1,11,111,\dots,\underbrace{1111111111111}_{\text{13 واحد}}\}$$

اقسم كل عدد في A على 12 ثم سجّل باقي القسمة. بما أن كل باقي يجب أن يكون موجوداً في المجموعة المكونة من 12 عنصر $\{0,1,2,\dots,11\}$، يتضمن مبدأ برج الحمام أن اثنين من باقي القسمة لا بد يكونا متساويين. خذ أي عددين في A لهما نفس باقي القسمة بحيث يقسم العدد على 12، ثم اطرح العدد الأصغر من الأكبر. النتيجة هي عدد يقبل القسمة على 12 وخاناته تتكون من 0 و1 فقط.

السؤال 52: عرض خوارزمية القسمة: برهن أنه إذا كان للعددين b و c نفس باقي القسمة عند قسمتهما على a فإن a يقسم $b - c$.

إذا كنت تجري عملية القسمة يدوياً، بهدف التأكد، ستجد أن كلاً من 11 و 11111 لهما نفس باقي القسمة (تحديداً 11) عند قسمة كل منهما على 12. هذا يعني

أن 11111-11=11100 يقبل القسمة على 12. (بالطبع 11100/ 12=925). ثمة أزواج أخرى تتوافق مع هذا المثال، منها مثلاً 111 و 111111 باقي قسمتهما على 13 يساوي 3.

للبرهان، لنأخذ مجموعة مكونة من $(n+1)$ عنصر.

$$A \coloneqq \{1, 11, 111, 1111, \dots, \underbrace{111 \dots 1}_{\text{n+1 واحد}}$$

عند قسمة كل عنصر في A على n فإن باقي القسمة ينتمي إلى المجموعة المكونة من n عنصر $B \coloneqq \{0,1, \dots, n-1\}$. لتكن $f : A \to B$ دالة يرتبط فيه كل عنصر في A بباقي القسمة عند قسمته على n. لنرمز لهذه العناصر بـ a_1 و a_2 حيث $a_1 > a_2$. لكن $a_1 - a_2$ يقبل القسمة على n وعدد خاناته إما 0 أو 1.

نظرية إيردوس – سيكريس

اطلب من صديقك كتابة متتالية من 10 أعداد حقيقية مختلفة. قبل أن تنظر إلى المتتالية، تأمل وعيناك مغمضتان لمدة دقيقة ثم أعلن "أنا أستطيع أن أحيط أربعة أرقام في المتتالية بدائرة بحيث عندما تُقرأ من اليسار إلى اليمين فإنها تكون بترتيب تصاعدي أو تنازلي". بالتأكيد فإن هذا الإعلان سينطبق على المتتالية العددية التي كتبها صديقك. (صديقك لا يبدي إعجاباً؛ واصل القراءة). على سبيل المثال، قل إن صديقك كتب المتتالية التالية:

$$100, 2, -17, \frac{\pi}{4}, -2.3, 57, 0, -2.4, -0.2, -4$$

لا يوجد متتالية جزئية متزايدة بمقدار 4 لأن أطول تتالٍ هنا يتزايد بمقدار 3.

لاحظ التتالي بالخط الغامق:

$$100, 2, \mathbf{-17}, \frac{\pi}{4}, \mathbf{-2.3}, 57, 0, -2.4, \mathbf{-0.2}, -4$$

لكن ثمة متتالية جزئية متناقصة بمقدار 4:

$$\mathbf{100}, 2, -17, \frac{\pi}{4}, -2.3, \mathbf{57}, \mathbf{0}, -2.4, \mathbf{-0.2}, -4$$

في الواقع، ثمة متتالية جزئية متناقصة بمقدار 5 إذا ثبتنا ‎-4‎ في نهاية المتتالية، لكن الفارق 4 هو كل ما يمكننا أن نضمنه بشكلٍ عام. من الممكن أن تكون المتتالية التي وضعها صديقك متضمّنة النوعين من المتتاليات الجزئية المذكورة.

السؤال 53: أعطِ مثالاً على متتالية طولها 10 من أعداد حقيقية مختلفة، بحيث تتضمن متتالية جزئية متزايدة بمقدار 4 (على الأقل) ومتتالية جزئية متناقصة بمقدار 4 (على الأقل)؟

بدلاً من المتتالية السابقة، إذا طلبت من صديقك كتابة متتالية من 17 عدداً حقيقياً مختلفاً، يمكنك ضمان وجود متتالية فرعية متناقصة بمقدار 5. تُعرف النتيجة العامة بنظرية إيردوس – سيكريس.

المبرهنة 1.5.7 (إيردوس – سيكريس): للأعداد $n \geq 1$، إذا كانت S متتالية من $n^2 + 1$ أعداد حقيقية مختلفة، فإن S تحتوي على متتالية جزئية متزايدة بمقدار

$n + 1$ أو متتالية فرعية متناقصة بمقدار $n + 1$. إضافة لذلك، هذه النتيجة أكثر احتمالاً في سياق أن $n^2 + 1$ لا يمكن إبداله بـ n^2.

دعنا أولاً نفهم البرهان في سياق المثال الذي تناول المتتالية التي طولها 10 أعداد. لكل عنصر x في متتالية صديقك، اربط كل عدد صحيح موجب $LIS(x)$ يساوي طول أطول متتالية جزئية متزايدة تبدأ بـ x وتحتويها. يتصرف الدالة LIS كما يلي (حسب مثال المتتالية):

العنصر $\boldsymbol{x}$	100	2	17-	$\frac{\pi}{4}$	2.3-	57	0	2.4-	0.2-	4-
$\boldsymbol{LIS}(\boldsymbol{x})$	1	2	3	2	2	1	1	2	1	1

إذن $LIS(100) = 1$ لأن 100 هو أكبر عدد في المتتالية. لكن $LIS(0) = 1$ أيضاً لأنه لا يوجد أي عدد إلى يمين 0 أكبر من 0. و $LIS(-17) = 3$ لأن 17-، 2.3-، 0 هو أكبر متتالية جزئية متزايدة تبدأ بـ 17-.

السؤال 54: ما هي قيم LIS للمتتالية 3,8,5,2,7,1,10,9,4,6؟

عندما يكتب صديقك المتتالية المكونة من 10 أعداد حقيقية مختلفة فإنك يجب أن تحسب قيم LIS لكل عنصر. إذا كان $LIS(x) \geq 4$ لأي عنصر x في المتتالية فإنه

يوجد متتالية جزئية متزايدة بطول 4. يحدث الشيء نفسه في المتتالية الواردة في السؤال 54. لكن ماذا لو لم يحدث هذا؟ ماذا لو كان $LIS(x) \leq 3$ لكل عنصر x؟

حدث هذا في الجدول المعطى أعلاه. وهنا يأتي السحر. بما أن كل قيم LIS العشرة يجب أن تكون إما 1 أو 2 أو 3، يضمن مبدأ برج الحمام وجود $\left\lceil \frac{10}{3} \right\rceil = 4$ عناصر تتشارك نفس قيمة LIS. في الواقع، $LIS(x) = 1$ لخمس قيم مختلفة لـ x (وليس 4 فقط):

$$LIS(100) = LIS(57) = LIS(0) = LIS(-0.2) = LIS(-4) = 1$$

هل ينجح هذا الأمر دائماً؟ ثمة سؤالان. الأول، هل ينتج عن هذه العناصر التي تتشارك قيمة LIS دائماً متتالية جزئية متناقصة؟ الثاني، إذا كان الأمر كذلك، هل ستكون المتتالية الجزئية ذات طولٍ كافٍ؟ يتطلب السؤال الأول فقط بعض المنطق، في حين يتطلب السؤال الثاني مبدأ برج الحمام. نربط الطرفين المفكوكين في البرهان.

برهان المبرهنة 1.5.7: لتكن $n \geq 1$ ولنفترض أن S متتالية من الأعداد الحقيقية المختلفة $n^2 + 1$. لكل عدد x في S، اربط قيمة $LIS(x)$ التي تعطي طول أطول متتالية جزئية متزايدة تبدأ بـ، وتتضمن، x.

إذا كانت $LIS(x) \geq n + 1$ لبعض العناصر x في المتتالية، فإننا نجد متتالية جزئية متزايدة طولها $n + 1$.

بخلاف ذلك، فإن $LIS(x) \leq n$ لكل عنصر x في المتتالية. تربط الدالة LIS المتتالية (تعاملنا معها كمجموعة مكونة من (n^2+1) عنصر) بالمجموعة $[n]$ (لأن $1 \leq LIS(x) \leq n$ لكل قيم x). باستخدام مبدأ برج الحمام، تكون بعض عناصر المجموعة $[n]$ صورة لعناصر المتتالية على الأقل

$$\left\lceil \frac{n^2+1}{n} \right\rceil = \left\lceil n + \frac{1}{n} \right\rceil = n+1$$

لنرمز لهذه العناصر $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ ولنفترض أنها تظهر في المتتالية من اليسار إلى اليمين بذلك الترتيب. ندّعي أن هذه العناصر تشكّل متتالية متزايدة طولها $n+1$، أي أن:

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_{n+1}$$

لبيان السبب، افترض أن (وباب التناقض) $x_1 < x_2$. نحن نعرف أن طول أطول متتالية جزئية متزايدة تبدأ بـ x_2 هو $LIS(x_2)$. خذ إحدى المتتاليات وضع x_1 أمامها. لدينا الآن متتالية جزئية متزايدة تبدأ بـ x_1 وطولها $LIS(x_2) + 1$. لكن بما أن $LIS(x_1) = LIS(x_2)$، يكون لدينا متتالية جزئية متزايدة تبدأ بـ x_1 وطولها $LIS(x_1) + 1$. وهذا مستحيل! إن أطول متتالية جزئية متزايدة تبدأ بـ x_1 طولها $LIS(x_1)$. يبين هذا التناقض أن $x_1 > x_2$.

تبيّن الحجة نفسها أن $x_2 > x_3$ وهكذا. وعليه فإن S تتضمن متتالية جزئية متناقصة طولها $n+1$. يتطلب التمرين 7 منك برهنة الجزء الثاني من النظرية.

راجع التمرين 8 للاطلاع على نسخة عامة. ■

ملخّص

تؤكّد المبرهنات المختلفة المعروفة باسم مبدأ برج الحمام على وجود عنصر في المجال المقابل لدالة له صورة عكسية "كبيرة". ثمة طريقة متماسكة لتوضيح مبدأ برج الحمام وهي: بإعطاء أي توزيع لعدد من الأشياء k على عدد من الصناديق n، فإن بعض الصناديق ستستقبل على الأقل $\left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil$ شيء. مبدأ برج الحمام بديهي، لكن يمكن أن تقود التطبيقات الذكية له إلى نتائج عميقة غير بديهية.

تمارين

1. تحتوي حقيبة على 97 بنساً و 56 نيكلاً و410 ربعاً إضافة إلى 3 أنصاف دولار. لنفترض أنك تناولت بعض هذه العملات من الحقيبة. ما هو أقل عدد من العملات التي يجب أن تتناولها لتضمن أن معك قطعتين من نفس القيمة في يدك؟

2. لتكن n عدداً فردياً ولنفترض أن $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ أي تبديل على $[n]$. برهن أن حاصل الضرب $\left(x_1 - 1\right)(x_2 - 2) \dots (x_n - n)$ هو عدد زوجي. هل الإجابة بالضرورة صحيحة إذا كانت n عدد زوجي؟ أعط برهاناً أو تفنيداً.

3. لتكن $n \geq 1$ و S مجموعة جزئية مكونة من $(n + 1)$ عنصر من $[2n]$. برهن أنه يوجد عددين في S مجموعهما $(2n + 1)$.

4. لتكن $n \geq 1$ و S مجموعة جزئية مكونة من $(n + 1)$ عنصر من $[2n]$. برهن أنه يوجد عددين في S يقبل أحدهما القسمة على الآخر.

5. في السؤالين 46 و 48، أنشأت أمثلة تفنيدية لبيان أن $\lfloor n/2 \rfloor$ من المبرهنة 1.5.2 هو أفضل إمكانية لإظهار أنه لا يمكن استبدالها بعدد أصغر. أعطِ مثالاً تفنيدياً ينطبق على أي قيمة لـ n.

6. خذ أي خمس نقاط في مستوى فيه إحداثيات أعداد صحيحة.

(أ) أثبت أنه يوجد نقطتان بحيث يكون للنقطة الوسطى في المقطع الخطي الذي يربط هاتين النقطتين إحداثيات أعداد صحيحة.

(ب) بيّن أن الاستدلال في فرع السؤال أ ليس بالضرورة صحيحاً بأربع نقاط فقط.

(ج) هل يمكنك تخمين وإثبات عبارة شبيهة تتضمن نقاطاً في فضاءٍ ذي إحداثيات أعداد صحيحة؟

7. برهن أن ناتج مبرهنة إيردوس – سيكريس يكون أفضل احتمالاً عندما يكون ممكناً أن لا تتضمن متتالية من الأعداد الحقيقية المختلفة n^2 أي متتالية جزئية متزايدة طولها $n + 1$ ولا متتالية جزئية متناقصة طولها $n + 1$.

8. هذا يثير الاهتمام بنسخة أكثر تعمياً من نظرية إيردوس – سيكريس.

أ) برهن: لكل $m, n \geq 1$، إذا كانت S متتالية من الأعداد الحقيقية المختلفة $mn + 1$، فإن S لا تتضمن متتالية جزئية متزايدة طولها $m + 1$ ولا متتالية جزئية متناقصة طولها $n + 1$.

ب) أثبت أن هذه النتيجة هي أفضل احتمالاً وذلك ببيان أن النتيجة غير ثابتة بالضرورة عند استبدال $mn + 1$ بـ mn.

9. برهن المبرهنة 1.5.6.

10. برهن النسخة التالية من مبدأ برج الحمام. لتكن $n_1, n_2, \ldots, n_k$ أعداداً صحيحة موجبة. إذا وزعنا عدداً من الأغراض $n_1 + n_2 + \cdots, n_k - k + 1$ على عدد من الصناديق k، فإنه يوجد بعض القيم $i \in [k]$ تكون العبارة التالية لها صحيحة: يحتوي الصندوق i على n_i غرض على الأقل.

11. افترض أنه في مبرهنة إيردوس – سيكريس أزلنا متطلب أن الأعداد في المتتالية مختلفة. كيف يمكنك أن تغيّر نص المبرهنة وبرهانها بحيث تبقى النتيجة ثابتة؟

12. (يعطي هذا التمرين برهاناً بديلاً لمبرهنة إيردوس – سيكريس). لتكن S متتالية من أعداد حقيقية مختلفة $n^2 + 1$، حيث $n \geq 1$. افترض أنه، وبهدف نقض الفرضية، أن نتيجة الفرضية غير ثابتة. لكل عنصر x في المتتالية، عرّف الدالة

$g : S \to [n] \times [n]$ بـ $g(x) = (i, d)$، حيث i هو طول أطول متتالية جزئية متزايدة تبدأ بـ x، و d هو طول أطول متتالية جزئية متناقصة يبدأ بـ x.

اشرح سبب عدم كون g دالة واحد - لواحد، ثم أكمل برهان مبرهنة إيردوس- سيكريس.

ملاحظات عابرة

يعرّف مبدأ برج الحمام بمبدأ راسم ديرخليه (Dirichlet)، نسبة للعالم الألماني بيتر ديرخليه (1805-1859)، وقد كان أول رياضي يستخدم المبرهنة صراحة. تظهر المبرهنة 1.5.7 في بحث إيدروس وسيكريس (1935)، وكان عنوانه برهاناً للنتيجة التالية:

لأي عدد صحيح موجب n، يوجد بعض الأعداد الصحيحة الموجبة m (اعتماداً على n) بحيث أنه عندما توضع نقاط m في مسطح بوضعٍ عام، يوجد مجموعة جزئية من نقاط n التي تشكّل رؤوساً لمضلع عدد أضلاعه n.

تكون النقاط في موضعٍ عام عندما تقع ثلاثة منها على نفس الخط. عندما $n = 4$ فإن أقل قيمة لـ m تكون 5. بكلماتٍ أخرى، إذا رسمنا أي خمس نقاط في مسطح بحيث لا تقع ثلاث نقاط منها على نفس الخط، فإن أربعة نقاط تشكل رؤوساً لمضلع رباعي الأضلاع، لكن هذا ليس صحيحاً بالضرورة عند رسم أربع نقاط. تكمن أهمية هذا البحث في الاهتمام الذي ظهر لاحقاً في مبرهنة رامزي. في ذلك

الوقت، كانت مبرهنة رامزي ذات شهرة ضعيفة في المنطق الرياضي. كان الرياضي الهنغاري باول إيردوس (Paul Erdös 1913-1996) مساهماً عظيماً في مجال مبرهنة رامزي. طالع غراهام وروذتشايلد وسبنسر (Graham, Rothschild & Spencer 1980) والقسم 6.4 من هذا الكتاب.

الفصل الثاني

التوزيعات وإثباتات التوافيق

في الفصل السابق، مارسنا تقنيات عدّ أساسية، وتعلمنا المبادئ التي سوف نستخدمها في فصول هذا الكتاب. في هذا الفصل سنبدأ دراستنا للتوافيق الأصلية بمفهومين أساسيين. الأول هو **التوزيع** (Distribution)، وهو تحديد أشياء لمستقبِلات. يمكن اختزال جميع مسائل العدّ التي وردت في الفصل 1 لعدّ توزيعات معينة. لذلك، توفر التوزيعات إطاراً موحداً لمسائل العدّ.

المفهوم الثاني هو **إثبات التوافيق** (Combinatorial Proof). يستمتع اختصاصيو التوافيق بفن بناء إثباتات التوافيق. هذه الإثباتات ممتعة للكتابة وقابلة للتذكّر مقارنةً بتلك الناتجة عن، لنقل، الاستقراء الرياضي (Mathematical Induction). في القسم 1.1 أكدنا على أهمية فهم نوع الأشياء التي تعدّها التعابير مثل $(n)_k$أو $\binom{n}{k}$ وهذا الفهم أساسي في كتابة إثباتات التوافيق.

21. دوال العدّ

مسائل التوزيع

دعنا نرجع إلى بعض الأسئلة كتلك التي أجبنا عنها في القسم 1.1 .

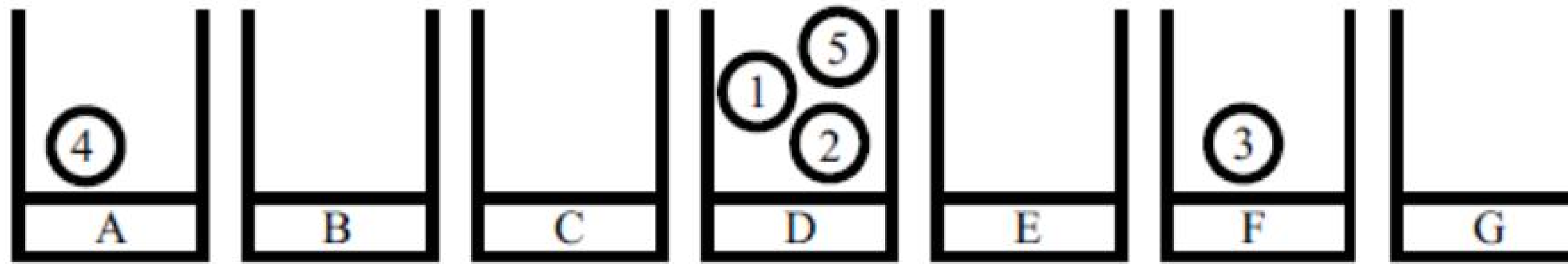
1. كم عدد كلمات السر التي يمكن تكوينها من خمسة أحرف، بحيث تكون الأحرف من المجموعة A-G؟

2. بالرجوع إلى السؤال السابق، كم عدد كلمات السر التي لا تحتوي على أحرف مكررة؟

إجابات تلك الأسئلة هي 7^5 و5 (7)، على التوالي.

فيما يلي طريقة جديدة للتفكير بعدّ كلمات السر. خذ مثلاً كلمة السرDDFAD.

يمثل الشكل التالي هذه الكلمة توزيع لخمسة أشياء متميزة (مرقّمة 51-) على سبعة مستقبِلات متميزة (مرمّزة A-G):

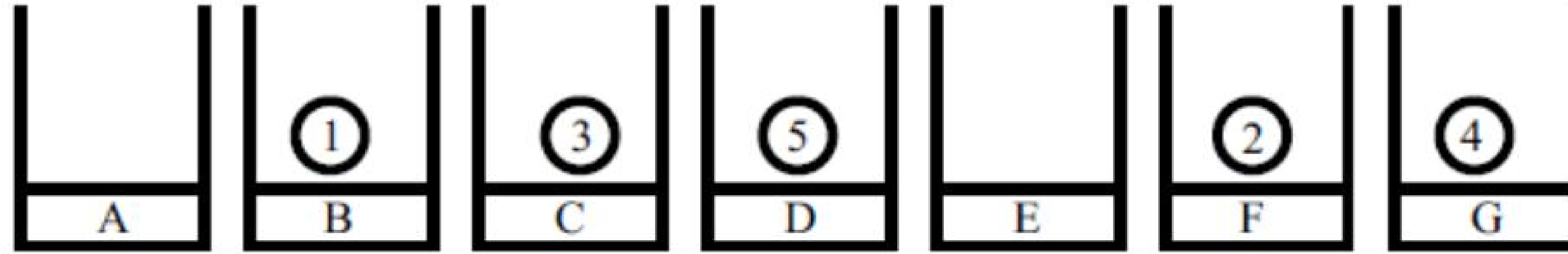


الأحرف الممكنة في كلمة السر هي المستقبلات وهي ممثلة بصناديق مرمّزة A-G.

مواقع الأحرف هي كرات مرقّمة 5-1. يوضع الشيء i (الممثل بالكرة) في الصندوق j إذا، وفقط إذا، كان الحرف i في الموقع j لكلمة السر. على سبيل المثال، يحتوي الصندوق D على الكرات المرقمة 1 و2 و5 لأن الكلمة DDFAD تحتوي الحرف D في المواقع الأول والثاني والخامس.

السؤال 55 : مع أي توزيع تتطابق كلمة السر GGGAG؟

كمثال آخر، تتطابق كلمة السر BFCGD مع التوزيع التالي:



هنا يستقبل كل مستقبل شيئاً واحداً على الأكثر.

السؤال 56: إذا أعدت صياغة الأسئلة Q1 وQ2 في بداية القسم 11. كمسائل توزيع، كيف يمكن أن

تسمّي الأشياء والمستقبلات في كل حالة؟

الفكرة هي أنه في سؤال العدّ الذي تكون إجابته n^k، يمكن التفكير بالأشياء التي تُعد كتوزيعات لـ k من أشياء متميزة على n من المستقبلات المتميزة. كذلك، في السؤال الذي تكون إجابته $(n)_k$. يمكن التفكير بالأشياء كتوزيعات لـ k من الأشياء المتميزة على n من المستقبلات المتميزة بحيث يستقبل كل منها شيئاً واحداً على الأكثر.

التوزيعات الستة عشر

قد تكون الأشياء في مسألة التوزيع متميزة أو متطابقة. تكون **متميزة** (Distinct) إذا كانت مسمّاة بحيث يمكن تمييزها عن بعضها البعض (فكّر بكراتٍ عليها أرقام مختلفة). تكون **متطابقة** (Identical) إذا كانت غير مسمّاة وبالتالي لا يمكن تمييزها (فكّر بكراتٍ بنفس الحجم واللون). كذلك تكون المستقبِلات متميزة أو متطابقة.

يمكن كذلك أن تكون المستقبِلات في مسألة التوزيع مقيدة من حيث عدد الأشياء التي يمكن أن تستقبلها. على سبيل المثال، قد تجد حالات لا تشتمل على قيود (كما في السؤال الأول الوارد في بداية هذا القسم)، أو حالات تشتمل على شيء واحد على الأكثر (كما في السؤال الثاني)، أو حالات تشتمل على شيء واحد على الأقل، أو شيء واحد على وجه التحديد. هذا يعطي ككل 16 توزيعاً مختلفاً كما هو موضح في الجدول:

توزيعات		**كم عدد العناصر التي يمكن للمستقبلات تلقيها**			
k عنصر	**على n مستقبِل**	بدون شروط	≥ 1	≤ 1	$= 1$
متميزة	متميزة	n^k	$(n)_k$	؟	0 أو $n!$
متطابقة	متميزة	؟	؟	؟	؟

متميزة	متطابقة	؟	؟	؟	؟
متطابقة	متطابقة	؟	؟	؟	؟

ناقشنا في ما مضى سبب المدخلات n^k و$(n)_k$.

السؤال 57: اشرح سبب المُدخل "$n!$أو 0". لأي قيم من n وk تكون الإجابة 0 تحديداً؟

في نهاية هذا الفصل ستكون لدينا الصورة كاملة. هناك فروقات دقيقة إضافية ممكنة غير تلك المذكورة هنا - على سبيل المثال، مسألة تحتوي على خليط من الأشياء المتطابقة والمتميزة – ولكن هذه الأنواع الستة عشر مهمة جداً.

الدوال كتوزيعات

فيما يلي أربعة أسئلة تتعلق بأنواع مختلفة من الدوال. في كل حالة نعيد صياغتها بدلالة التوزيعات.

(أ) كم عدد الدوال $[3] \to [4]$؟

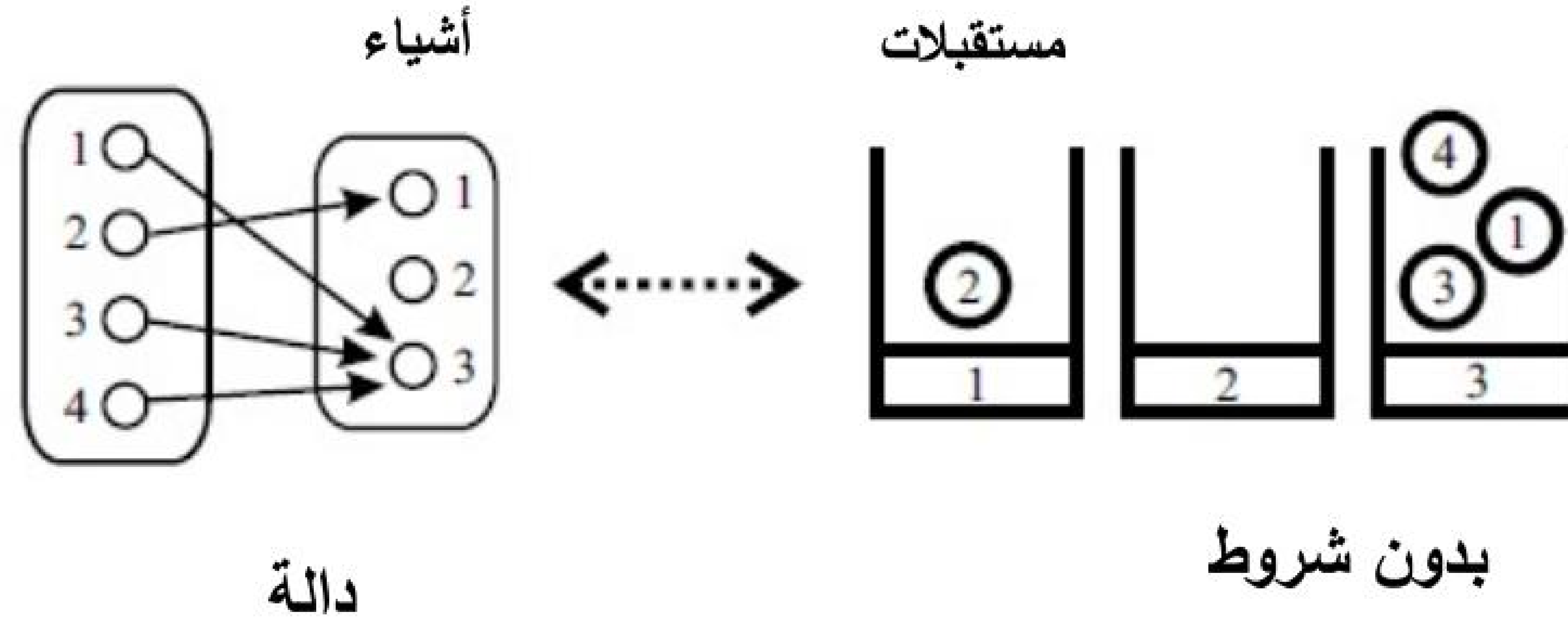
أي دالة مشابهة هو توزيع لأربعة أشياء متميزة (عناصر المجال) على ثلاثة مستقبِلات متميزة (المدى المشترك). الإجابة هي 3^4 لأن كل شيء يمكن تعيينه لواحد من المستقبلات الثلاثة. لاحظ الجزء العلوي من الشكل 12..

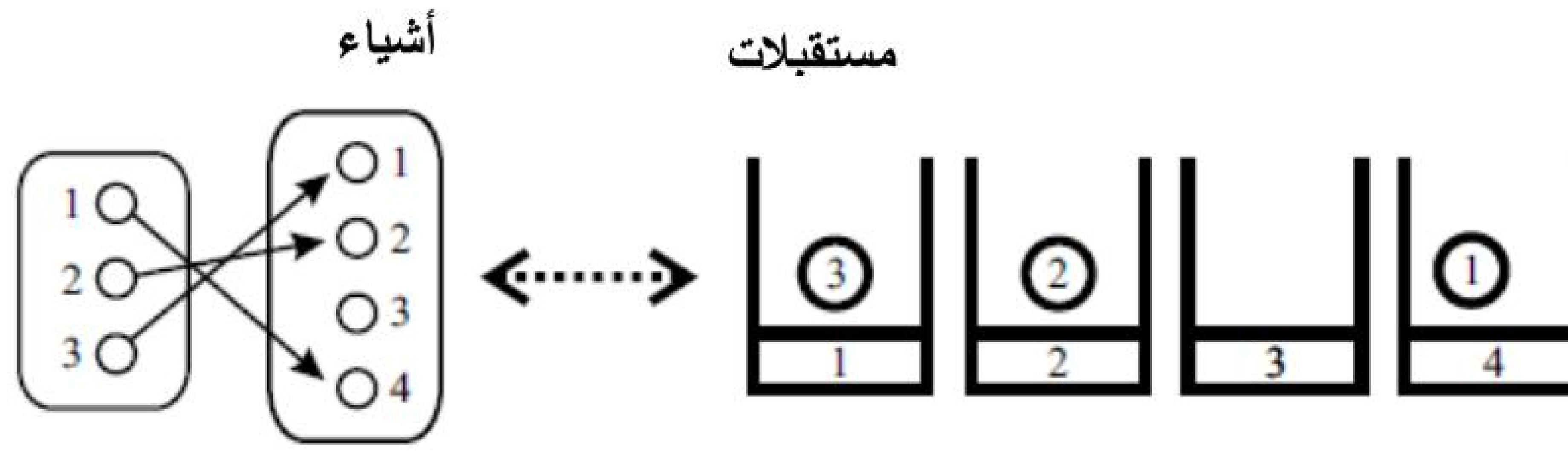
السؤال 58: كم عدد الدوال $f : [6] \to [4]$ التي يكون فيها $f(3) = 2$؟

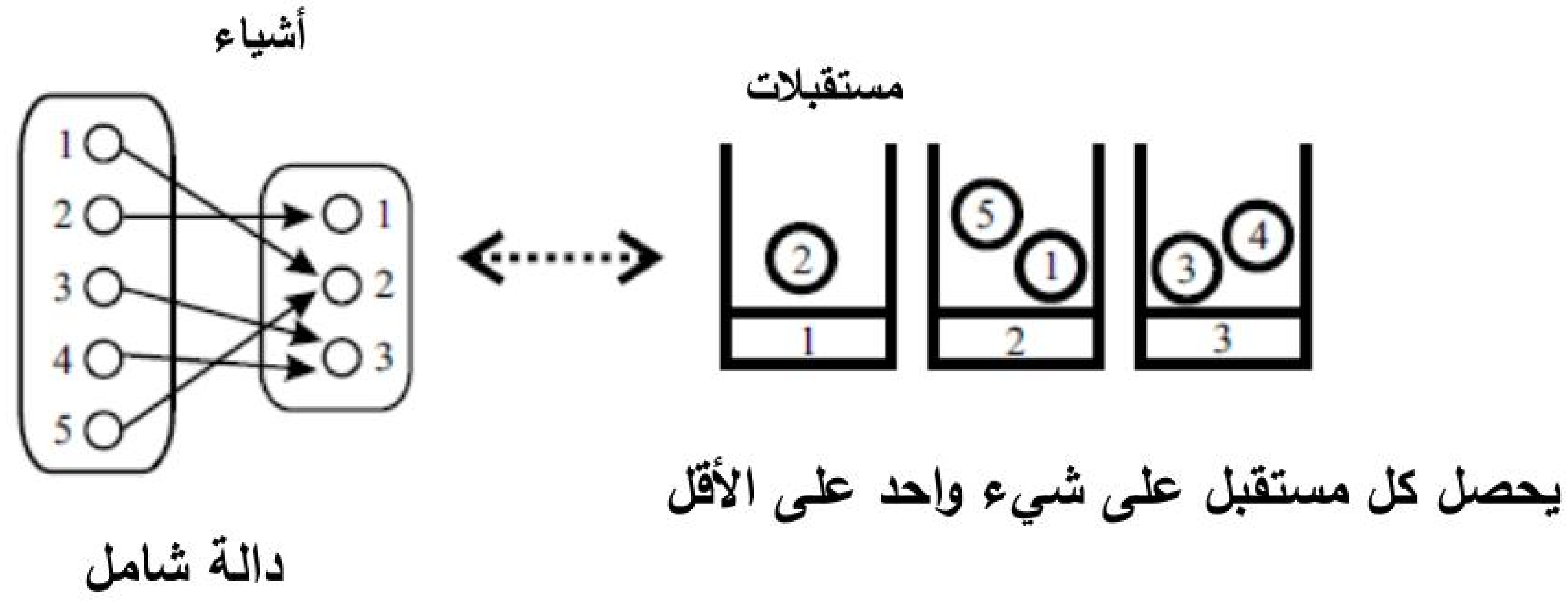
(ب) كم عدد دوال $[4] \to [3]$ التي تكون واحد لواحد؟

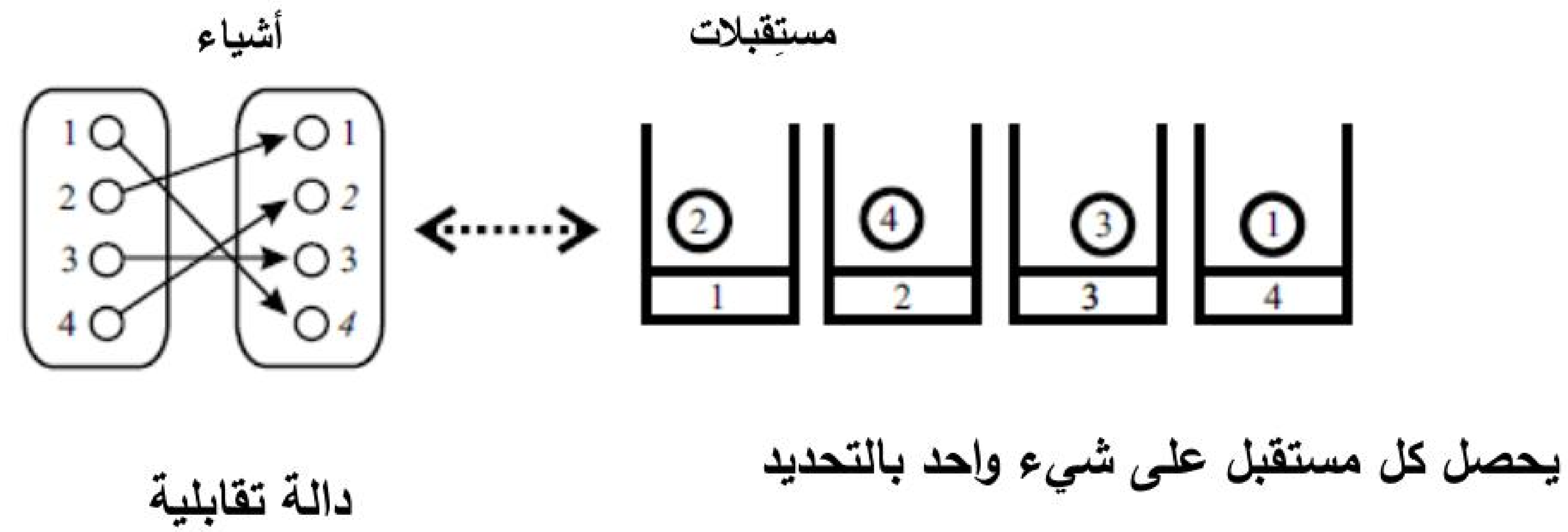
أي دالة مشابهة هو توزيع لثلاثة أشياء متميزة على أربعة مستقبِلات متميزة بحيث يأخذ كل مستقبِل شيئاً واحداً على الأكثر. الإجابة هي $(4)_3$. لاحظ الجزء الثاني من الشكل 12..

السؤال 59: كم عدد دوال واحد لواحد $f : [4] \to [6]$ التي فيها $5 \notin rng(f)$؟









الشكل2.1: دوال وتوزيعات.

(ج) كم عدد دوال [3] → [5] الشاملة؟

أي مشابهة هي توزيع لخمسة أشياء متميزة على ثلاثة مستقبِلات متميزة بحيث يأخذ كل مستقبِل شيئاً واحداً على الأقل. مثل هذه الدوال تحتاج إلى انتباه أكبر في أثناء عدِّها، لذلك سنقوم بتأجيل الحل إلى ما بعد هذا المثال. لاحظ الجزء الثالث من الشكل12..

(د) كم عدد دوال [4] → [4] التقابلية؟

أي دالة مشابه هو توزيع لأربعة أشياء متميزة على أربع مستقبِلات متميزة بحيث يأخذ كل مستقبل شيئاً واحداً فقط. الإجابة هي $(4)_4$ أو $4!$. لاحظ الجزء السفلي من الشكل 12..

لدينا الآن ثلاث مسائل أساسية إجابتها n^k.

n^k تساوي (1) عدد المجموعات المكونة من k شيء والمأخوذة من مجموعة مكونة من n شيء؛2 () عدد الدوال بين مجموعة مكونة من k شيء ومجموعة مكونة من n شيء؛ (3) عدد توزيعات لـ k من الأشياء المتميزة على n من المستقبلات المختلفة.

فيما يلي التفصيل ذاته لـ $(n)_k$.

$(n)_k$ تساوي (1) عدد المجموعات المكونة من k شيء من دون تكرار والمأخوذة من مجموعة مكونة من n شيء؛ 2() عدد دوال واحد لواحد بين مجموعة مكونة من k شيء ومجموعة مكونة من n شيء؛ (3) عدد توزيعات لـ k من العناصر المختلفة على n من المستقبلات المختلفة بحيث يأخذ كل مستقبل عنصراً واحداً على الأكثر.

و فيما يلي الشرح ذاته لـ $n!$.

$n!$ تساوي (1) عدد التباديل لمجموعة مكونة من n شيء؛ (2) عدد الدوال التقابلية بين مجموعة مكونة من n شيء ومجموعة مكونة من n شيء أيضاً؛ (3) عدد

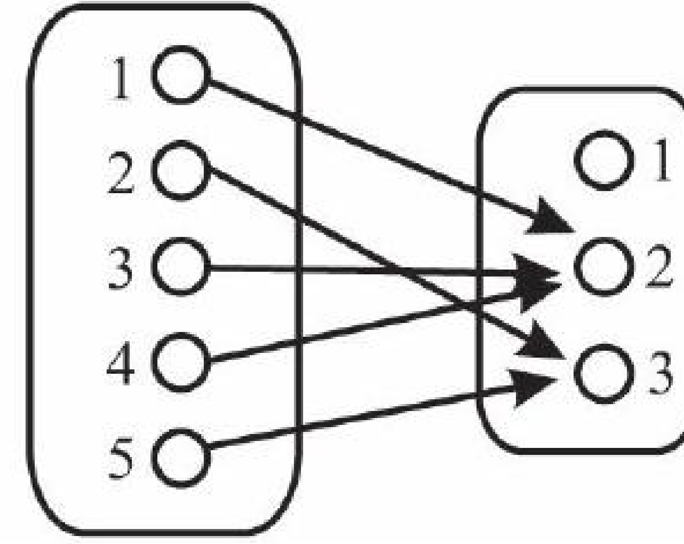
توزيعات لـ n من الأشياء المتميزة على n من المستقبِلات المتميزة بحيث يأخذ كل مستقبل شيئاً واحداً بالتحديد.

عدّ الدوال الشاملة

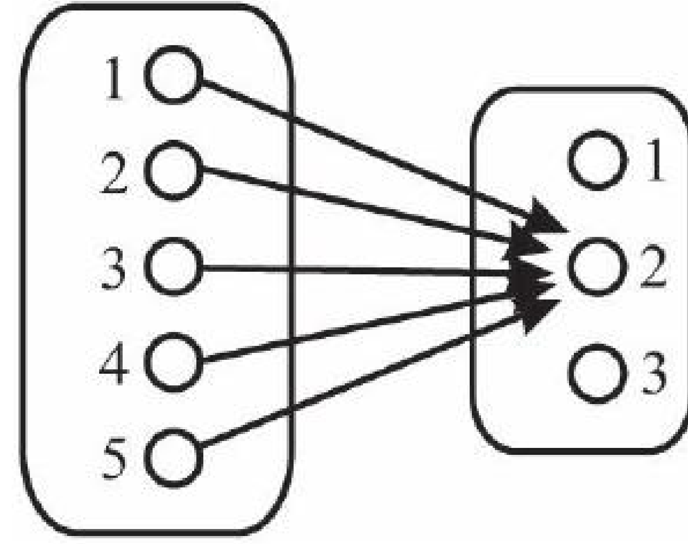
سنقوم بتأجيل المعادلة المستخدمة لعدد الدوال الشاملة بين مجموعة مكونة من k عنصر ومجموعة مكونة من n عنصر إلى أن نتطرق إلى أعداد ستيرلينغ (Stirling) والاحتواء والاستثناء في الأقسام 23. و1.3. في هذه الأثناء، سنستعرض مسألة عدّ الدوال الشاملة $[5] \rightarrow [3]$ لكي نفهم الأمور المتضمَّنة.

[للاختصار]، عدد الدوال $[5] \rightarrow [3]$ هو 3^5. تلك الحالات التي لا تنجح في أن تكون دوالاً شاملة تنقسم إلى حالتين منفصلتين: (1) تلك التي "تفتقد" لعنصرين من [3]، و(2) تلك التي تفتقد لعنصر واحد فقط من [3]. يعرض الشكل 22. صورة لدالة مشابهة لكل حالة.

في الحالة الأولى، يوجد ثلاثة دوال – تلك التي ترسم كل شيء في [5] إلى عنصر واحد في [3]. في الحالة الثانية، يوجد $3(2^5 - 2)$ من الدوال. هذا لأنه يوجد ثلاث طرق لتحديد العنصر في [3] الذي تفتقده الدالة.



يفتقد عنصراً واحداً



يفتقد عنصرين

الشكل 2.2: دالتا$[5] \to [3]$غير شاملتين.

إذن يوجد $2^5 - 2$ طريقة لتحديد الدالة الشاملة بين [5] والمجموعة الجزئية المكونة من عنصرين من [3] التي لا تفتقدها الدالة. (من بين الدوال التي عددها 2^5 بين المجموعة المكونة من 5 عناصر والمجموعة المكونة من عنصرين، دالتان فقط تفشلان في كونهما شاملتين). عدد الدوال الشاملة لـ $[5] \to [3]$ هو إذن:

$$3^5 - \left(3 + 3(2^5 - 2)\right) = 150$$

السؤال 60: جد عدد الدوال الشاملة لـ $[k] \to [3]$.

يطلب التمرين 7 أن نزيد خطوة أبعد من خلال إيجاد عدد الدوال الشاملة لـ $[k] \to [4]$.

إثباتات التوافيق

يبدأ إثبات التوافيق لمطابقة $X = Y$ بطرح سؤال ثم الإجابة عنه بأسلوبين مختلفين لكنهما صحيحان. أحد الأسلوبين يعطي الإجابة X والآخر يعطي الإجابة Y.

بما أننا أجبنا بشكل صحيح في كلتا الحالتين، نستطيع إذن أن نستنتج أن $X = Y$.

نعطي الآن مثالين لإثباتات التوافيق. ستلاحظ أن الخطوة الأساسية هي طرح السؤال الصحيح.

إثبات التوافيق #1

في هذا المثال الأول، سنُعطَى متطابقة ويجب أن نتوصل إلى إثبات التوافيق. المعادلة هي

$$(n)_k = (n-1)_k + k \, . (n-1)_{k-1} \quad \text{عندما} \quad n, k \geq 1 \qquad (2.1)$$

نفحص أولاً الحالة الخاصة ونربطها بمسألة عدّ معينة.

السؤال 61: كيف يجب أن تعرِّف $(n)_k$ عندما تساوي n أو k (أو كلاهما) صفراً بحيث تبقى المعادلة (.12) متحققة؟

تأمل المتطابقة (.12) عندما تكون $n = 6$ و $k = 4$، تحديداً

$$(6)_4 = (5)_4 + 4. (5)_3$$

نعلم أن $(6)_4$ تساوي عدد طرق توزيع أربعة عناصر مختلفة على ستة مستقبِلات مختلفة. لنقل إن العناصر هي تذاكر حفل (لحجز مقاعد الحفل بحيث تكون متميزة) والمستقبِلات هي ستة من الأصدقاء.

نبدأ الإثبات بطرح سؤال.

السؤال: كم عدد طرق توزيع أربع تذاكر مختلفة لحفل على ستة أصدقاء بحيث يأخذ كل صديق تذكرة واحدة على الأكثر؟

نحن نعلم مسبقاً عن إحدى الإجابات.

الإجابة: يوجد $(6)_4$ طريقة.

يجب علينا الآن أن نستخدم طريقة مختلفة لعدّ هذه التوزيعات والحصول على الإجابة

$(5)_4 + 4.(5)_3$. يشير وجود إشارة + في هذا الجواب إلى فكرة التقسيم إلى حالات واستخدام مبدأ الجمع. الفكرة هي تعيين صديق محدد وتقرير ما إذا كان ذلك الصديق سيحصل على تذكرة. يوضّح الشكل 32. الحالتين وتحليل كل منهما.

الإجابة 2: لنقل إن أصدقاءك هم آدم وبين وكالب ودان وإيفرايم وفرانك. قسم التوزيعات إلى حالتين اعتماداً على إذا ما كان فرانك سيحصل على تذكرة. إذا لم يحصل فرانك على تذكرة، سيكون هناك $(5)_4$ طريقة لتوزيع الأربع تذاكر على الأصدقاء الخمسة الآخرين.

إذا لم يحصل فرانك على تذكرة، سيكون هنالك أربع طرق لتحديد تلك التذكرة، وبالتالي هنالك $(5)_3$

طريقة لتوزيع التذاكر الثلاث المتبقية على الأصدقاء الخمسة الآخرين. يوجد $4.(5)_3$ توزيعاً في هذه الحالة.

باستخدام مبدأ الجمع هنالك $(5)_4 + 4.(5)_3$ توزيعاً بالإجمال.

هذا ينهي الإثبات التوافقي بأن $(6)_4 = (5)_4 + 4.(5)_3$. ليس من الصعب الإثبات بشكل عام.

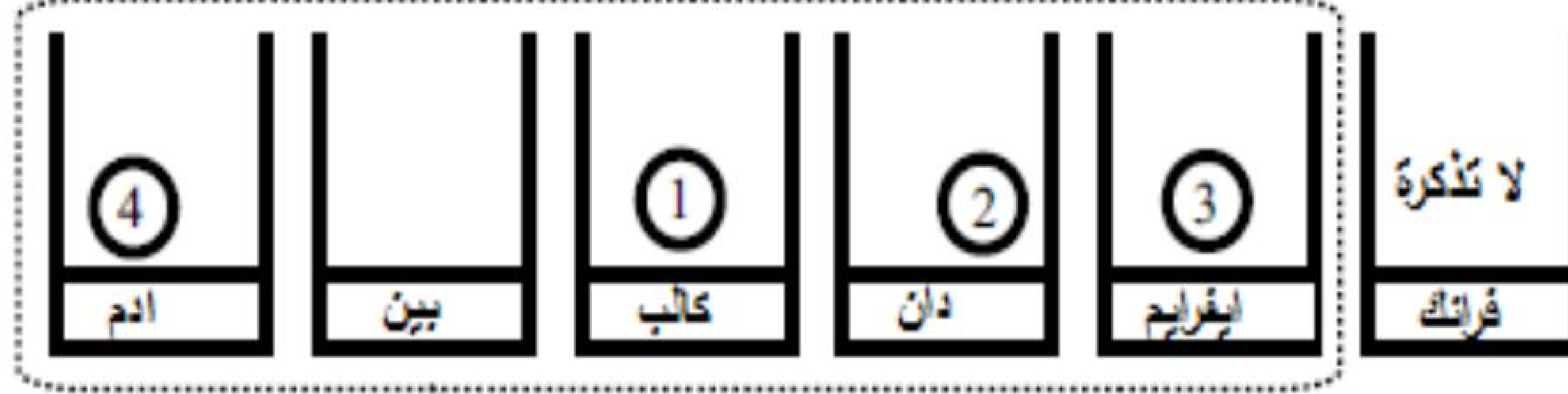
المبرهنة 1.12.: لكل $k \geq 1$ و $n \geq 1$، $(n)_k = (n-1)_k + k.(n-1)_{k-1}$.

إثبات توافيق: كم عدد الطرق لتوزيع k من تذاكر الحفل المختلفة على n من الأصدقاء بحيث يحصل كل صديق على تذكرة واحدة على الأكثر؟

الإجابة 1: يوجد $(n)_k$ طريقة.

الإجابة 2: واحد من أصدقائك هو فرانك. سيُعتمد على ما إذا كان سيحصل على تذكرة. إذا لم يحصل فرانك على تذكرة، سيكون هنالك $(n-1)_k$ طريقة لتوزيع كل التذاكر ذات العدد k على الـ $n-1$ من الأصدقاء إلى جانب فرانك.

الحالة الأولى : إذا لم يأخذ فرانك تذكرة، إذن ...

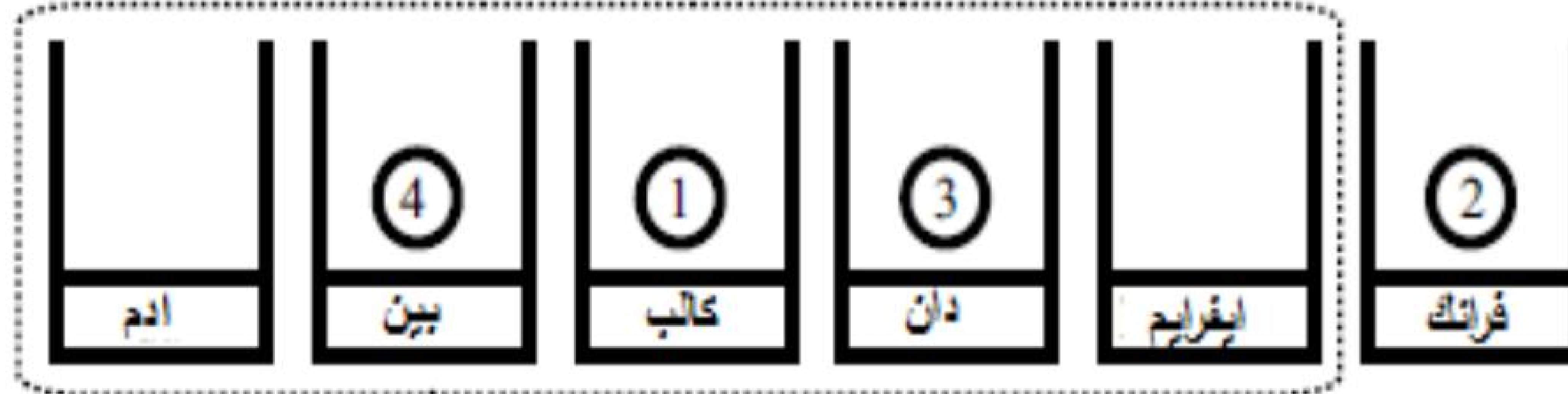


... حدد توزيع الأربع تذاكر على الأصدقاء الخمسة الآخرين

الحالة الثانية : إذا أخذ فرانك تذكرة، إذن ...



... حدد أولاً تلك التذكرة



... ثم حدد توزيع الثلاث تذاكر المتبقية على الأصدقاء الخمسة الآخرين

الشكل 2.3: السبب في كون $(5)_3 \cdot 4 + (5)_4 = (6)_4$.

إذا حصل فرانك على تذكرة، سيكون هنالك k طريقة لتحديد تلك التذكرة و$(n-1)_{k-1}$ طريقة لتوزيع الـ $k-1$ المتبقية من التذاكر على الـ $n-1$ من الأصدقاء إلى جانب فرانك. إذن هنالك

$k\,.\,(n-1)_{k-1}$ توزيعاً في هذه الحالة. هنالك $(n-1)_{k-1} + k\,.\,(n-1)_{k-1}$ توزيع ككل.

إثبات التوافيق #2

إذا أعطيت متطابقة للإثبات، كما فعلنا للتّو في سؤال (2.1)، بإمكانك استنتاج السؤال الصحيح لتسأله بحيث يتحقق الإثبات. لكن هنالك ميزة واحدة لإثباتات التوافيق وهي أنك تستطيع اكتشاف متطابقات جديدة في أثناء الإثبات. إليك المثال التالي:

دعنا أولاً نكوِّن مسألة عدّ بحيث تشتمل هذه المرة على الإجابة $n!$. سنقوم، كما فعلنا آخر مرة، بالاختبار باستخدام قيمة معينة لـ n.

سؤال: كم عدد الطرق لترتيب خمسة مجسمات بارتفاعات مختلفة في صف واحد من اليسار إلى اليمين؟

مرة أخرى، هناك إجابة واحدة سهلة.

الإجابة 1: هنالك !5 طريقة.

في النهاية ستبدو المتطابقة مثل $Y = 5!$ حيث Y هي الإجابة رقم 2.

علينا الآن أن نكون مبدعين في الإجابة رقم 2. هنالك الكثير من الأشياء التي نستطيع فعلها ولكن فيما يلي فكرة يمكن تعديلها لإثبات متطابقات توافيق أخرى. أي ترتيب للمجسمات يجب أن يكون ترتيباً متزايداً حسب الارتفاعات من اليسار إلى اليمين أو العكس. رقّم المجسمات من 5-1 حسب تزايد الارتفاعات. سنعتمد على موقع الخطأ الأول الذي يفسد الترتيب المتزايد الصحيح وهو 5-4-3-2-1.

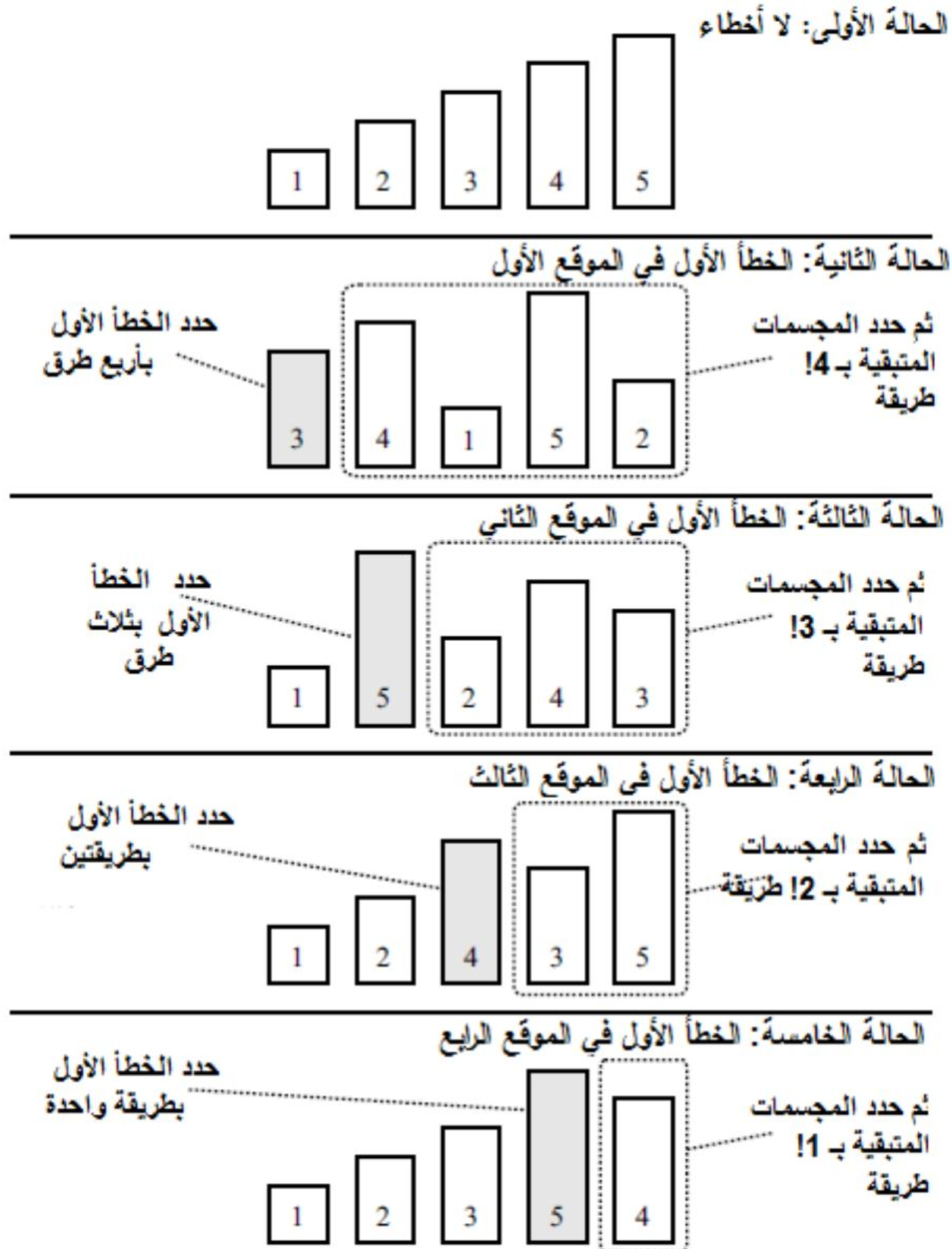
يوضح الشكل 4.2 التحليل.

الإجابة 2: اعتماداً على الموقع الأول للخطأ في الترتيب 5-4-3-2-1.

الحالة 1: لا خطأ. المجسمات مرتبة بشكل متزايد وهنالك طريقة واحدة فقط لترتيبها.

الحالة 2: هنالك خطأ في المجسم الأول. يوجد أربع طرق لتحديد المجسم الأول – أي واحد عدا المجسم رقم 1- وبالتالي هنالك !4 طريقة لترتيب المجسمات المتبقية.

وفقاً لمبدأ الضرب هنالك !4.4 طريقة لترتيب المجسمات في هذه الحالة.



الشكل 2.4: السبب في كون $5! = 1 + 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + 4(4!)$

الحالة 3: هنالك خطأ في المجسم الثاني. هذا يعني أن المجسم رقم 1 هو الأول، متبوعاً بأي مجسم آخر عدا المجسم رقم 2. لذلك يوجد ثلاث طرق لتحديد المجسم الثاني، ثم !3 طريقة لترتيب المجسمات المتبقية.

وفقاً لمبدأ الضرب يوجد !3.3 طرق في هذه الحالة.

الحالتان 4 و5 متشابهتان وإجاباتهما هي !1.1 و !2.2، على التوالي.

وفقاً لمبدأ الجمع هنالك $1 + 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + 4(4!)$ طريقة لترتيب المجسمات.

السؤال 62: لماذا لا يمكن أن يحصل الخطأ الأول في المجسم الخامس؟

أصبحنا الآن جاهزين للتعميم.

المبرهنة 1.22.: لأي $n \geq 1$، $n! = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} j(j!)$

السؤال 63: أعطِ إثباتاً توافقياً للمبرهنة من خلال تعديل التبرير الذي استخدمناه لـ $n = 5$.

نقاش

لإعادة تشكيل إثبات المبرهنة 1.12، نستطيع فقط أن نتذكر سؤال تذاكر الحفل وشرط إذا ما كان فرانك سيحصل على تذكرة. لإعادة تشكيل إثبات المبرهنة

1.22،، نستطيع أن نتذكر سؤال ترتيب المجسمات وشرط الموقع الأول الذي يتم فيه إفساد الترتيب المتزايد للمجسمات. تقسّم فكرة "الشرط" المسألة إلى حالات منفصلة وحصرية بحيث نستطيع تطبيق مبدأ الجمع؛ وقد تفضَّل هذه الأفكار كبديل عن تذكّر معادلة مثل $(n)_k = (n-1)_k + k\,.\,(n-1)_{k-1}$.

ملخّص

يمكن إعادة صياغة العديد من مسائل العدّ كمسائل توزيع. في هذا القسم قمنا بعدّ توزيعات k من الأشياء المتميزة على n من المستقبِلات المتميزة ضمن ثلاثة شروط مختلفة: أن يحصل كل مستقبل على أي عدد من الأشياء وعلى شيء واحد على الأكثر وعلى شيء واحد على وجه التحديد.

عرّفنا بعد ذلك إثباتات التوافيق من خلال مثالين. يبدأ إثبات التوافيق بسؤال ثم يصف طريقتين مختلفتين ولكنهما صحيحتان للإجابة عن ذلك السؤال.

تمارين

1. قم بتكوين مسألة العدّ المرافقة لكل إجابة.

(أ) $n! - 1$

(ب) $20^4 - (20)_4$

(ج) $(10)_5 + 5\,.\,(10)_4$

2. لديك 10 تذاكر لحفل تريد توزيعها على 15 من أصدقائك. من التذاكر العشر، ثمة ست منها ذات أرقام مقاعد محددة (وهي بالتالي متميزة) بينما الأربع الباقية عامة غير محددة المقاعد (وهي بالتالي متطابقة). إذا حصل كل صديق على تذكرة واحدة على الأكثر، كم عدد الطرق لتوزيع تلك التذاكر؟

3. كم عدد كلمات السر المكونة من ثمانية أحرف التي يمكن تكوينها باستخدام الأحرف A- Z بحيث يسمح بتكرار حرف واحد على الأكثر؟ هذا يعني أن الكلمات التالية مسموحة: HVCKEWFX، FOWFLQAZ، FBHHHRHT ولكن الكلمات VSSLVRTF وLLLWWWFW غير مسموحة.

4. خذ الدوال الممكنة كـ $f : [7] \to [9]$.

(أ) كم عدد تلك التي فيها $f(3) = 8$؟ كم عدد تلك التي فيها $f(3) \neq 8$؟

(ب) كم عدد تلك التي فيها $f(1) \neq 5$ وهي دالة واحد – لواحد؟

(ج) كم عدد تلك التي يكون فيها $f(i)$ زوجياً لجميع قيم i؟

(د) كم عدد تلك التي يكون فيها $\text{rng}(f) = \{5.6\}$؟

(ه) كم عدد تلك التي فيها f^{-1} ليس دالةً؟

5. كم عدد دوال واحد لواحد لـ $f: [5] \to [9]$ التي يكون فيها الرقم 7 هو أكبر عناصر rng (f)؟

6. إذا كان f دالةً وكان $f(i) = i$ فإننا نسمي i نقطة ثابتة لـ f.

(أ) كم عدد دوال $[5] \to [5]$ التي لديها نقطة ثابتة واحدة على الأقل؟

(ب) كم عدد دوال $[n] \to [n]$ التي ليس لديها نقاط ثابتة؟

(ج) كم عدد الدوال التقابلية $[4] \to [4]$ التي ليس لديها نقاط ثابتة؟

7. جد عدد الدوال الشاملة لـ $[4] \to [k]$.

8. أعطِ دالة جبرياً غير توافقي للمبرهنة 1.12. التي تستخدم المعادلة التالية:

$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

9. أعطِ إثباتاً توافقياً: لـ $n \geq 1$، $n! = n \times (n-1)!$.

10. أعطِ إثباتاً توافقياً: لـ $k \geq 1$ و $n \geq 1$، $(n)_k = n \times (n-1)_{k-1}$.

11. أعطِ إثباتاً توافقياً: لـ $k \geq 1$ و $n \geq 1$، $2^{kn} > max\{n^k، k^n\}$.

(مساعدة: قارن بين الدوال والعلاقات)

12. إذا أعطيت التعريفات التالية:

F = {Functions f: f is a Function [k] → [n]
L = {Lists (x1, x2,……, xk): each xi is Taken from (*) [n]}

(*) مأخوذة من ... إلخ (المراجع).

والتعريف $G : F \to L$ بـ $G(f) = (f(1), f(2), \ldots, f(k)) : F \to L$.

أثبت أن G دالة تقابلية. ما هي النتيجة التوافقية المتضمَّنة؟

13. في المثال السابق، كيف تتغير المجموعة L إذا تم تغيير المجموعة F إلى مجموعة دوال واحد لواحد أو إلى مجموعة دوال شاملة أو إلى مجموعة دوال تقابلية على التوالي؟

14. أعطِ إثباتاً توافقياً لـ k و n التي تحقق $1 \le k \le n$، $(n)_k = \sum_{j=k}^{n} k \cdot (j-1)_{k-1}$

15. لتكن π_n تساوي عدد التباديل من $[n]$ بغض النظر عن عدد العناصر، بما فيها الحجم 0 (أي التبديل الفارغ). إذن $\pi_1 = 2$ لأن التباديل من [1] بأي حجم هي ( ) و(1). التباديل من [2] بأي حجم هي

( ) و(1) و(2) و(2،1) و(1،2). لذلك $\pi_2 = 5$.

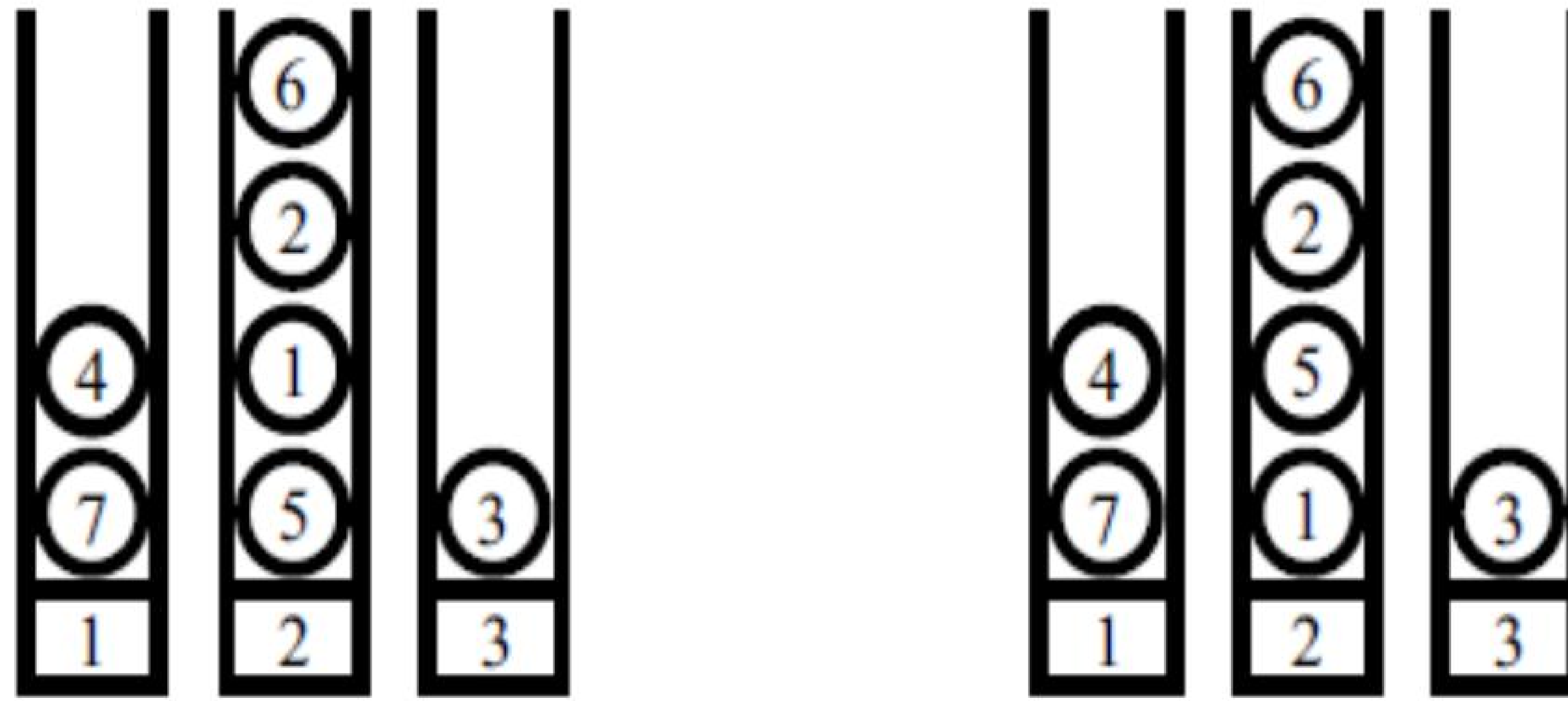
لتكن $\pi_0 = 1$.

(أ) جد π_3 من خلال التعداد الكامل.

(ب) أعطِ إثباتاً توافقياً: لـ $n \ge 1$، $\pi_n = n\pi_{n-1} + 1$.

(ج) استخدم المتطابقة في الجزء (ب) لإيجاد π_{10}.

16. (التوزيعات المرتبة) يُعنى هذا المثال – وغيره في هذا الفصل والتي تمت تسميتها بـ "التوزيعات المرتبة" – بـالتوزيعات التي يكون فيها الترتيب الذي تحصل فيه المستقبِلات على الأشياء مهماً. في ما يلي مثال لتوزيعات مرتبة لسبعة أشياء متميزة على ثلاثة مستقبِلات متميزة.



كما هو معروف، يتم تلقّي الأشياء القريبة من القاع أولاً (فكّر بالمستقبِلات 1–3 كـمحاسبين والأشياء كعملاء في صف الانتظار لكل محاسب). هذا يعني أن التوزيعين المرتبين الموضحين مختلفان على الرغم من أنهما متشابهان إذا تم اعتبارهما كتوزيعات عادية.

لتكن $(n)^{(k)}$ تساوي عدد التوزيعات المرتبة لـ k من الأشياء المتميزة على n من المستقبِلات المتميزة.

(أ) أثبت أن $(n)^{(k)} = n \times (n+1).(n+2) \dots (n+k-1)$

(ب) اشرح لماذا يوجد $(k)_n.(n)^{(k-n)}$ توزيعاً مرتباً لـ k من الأشياء المتميزة على n من المستقبلات المتميزة بحيث يحصل كل مستقبل على شيء واحد على الأقل.

(ج) اشرح توافقياً لمَ يكون $\binom{k-1}{n-1} k!$ جواب آخر للفرع (ب) السابق.

ملاحظات

يعتبر كتاب بينجامين وكوين (Benjamin & Quinn) الصادر (2003) بعنوان **الإثباتات المهمة: فن الإثبات التوافقي** (*Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof*) مقدمة ممتعة وفريدة للإثباتات التوافقية في الكثير من المجالات الرياضية المختلفة. ثمة مصادر أخرى جيدة مثل **مجلة الرياضيات** (*Mathematics Magazine*) **ومجلة الكليّة للرياضيات** (*Mathematics Journal The College*) اللتين نشرتها جمعية الرياضيات في أميركا.

22. عدّ المجموعات الجزئية والمجموعات المتعددة

المجموعات الجزئية والمجموعات المتعددة كتوزيعات

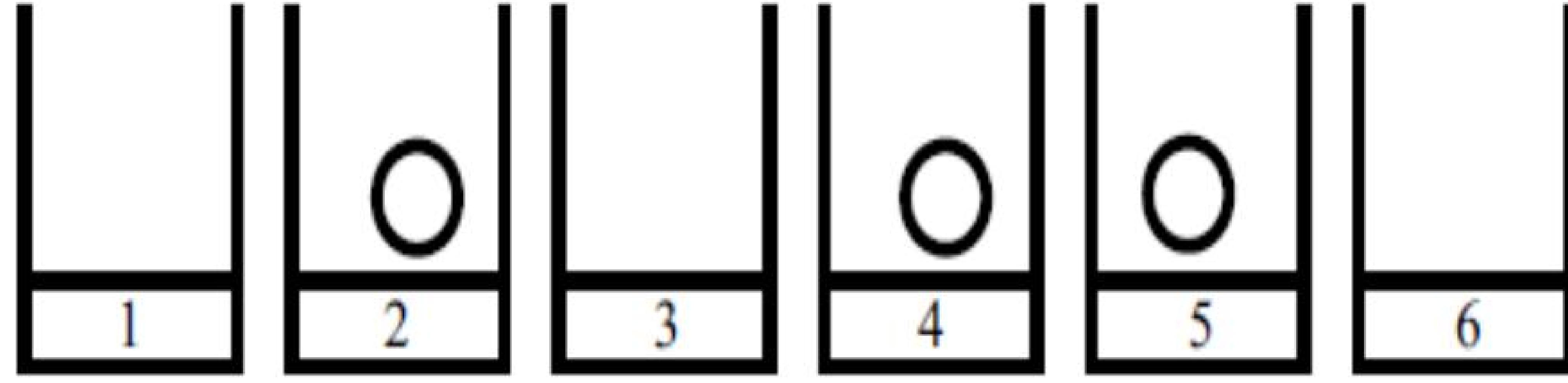
فيما يلي ثلاثة أسئلة كتلك التي أجبنا عنها في القسم 11..

1. عند سحب ثلاث تذاكر يانصيب تشتمل على الأرقام 6-1، كم عدد التذاكر الموجودة؟

2. يوفر متجر أربعة أصناف من الكعك، كم عدد الطلبات التي يمكن طلبها بحيث تتكون من سبع كعكات؟

3. في السؤال السابق، كم عدد الطلبات التي تحتوي كعكة واحدة على الأقل من كل صنف؟

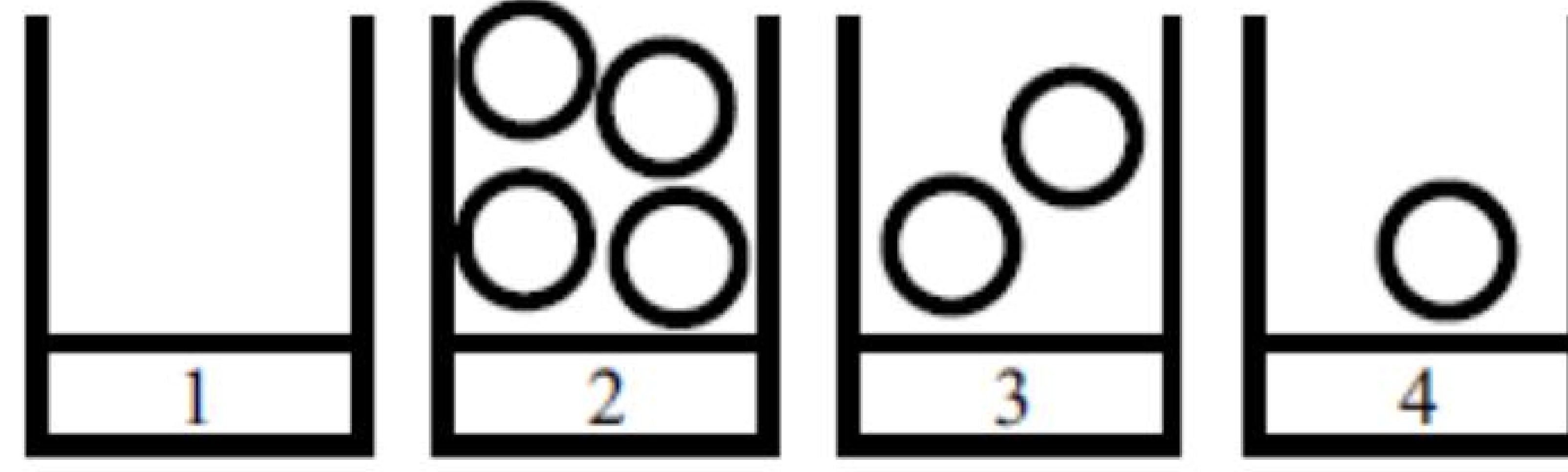
في السؤال الأول، تتكون التذكرة من مجموعة ثلاثية من [6] لذلك تكون الإجابة $\binom{6}{3}$. فيما يلي التوزيع المقابل للتذكرة {2،4،5}.



هذا هو التوزيع لثلاثة أشياء متطابقة على ستة مستقبلات متميزة بحيث يحصل كل مستقبل على شيء واحد على الأكثر. وكما هو موضح في الشكل أعلاه، فإننا نضع كرة في الصندوق j إذا كان j عنصراً ينتمي إلى المجموعة {2،4،5}.

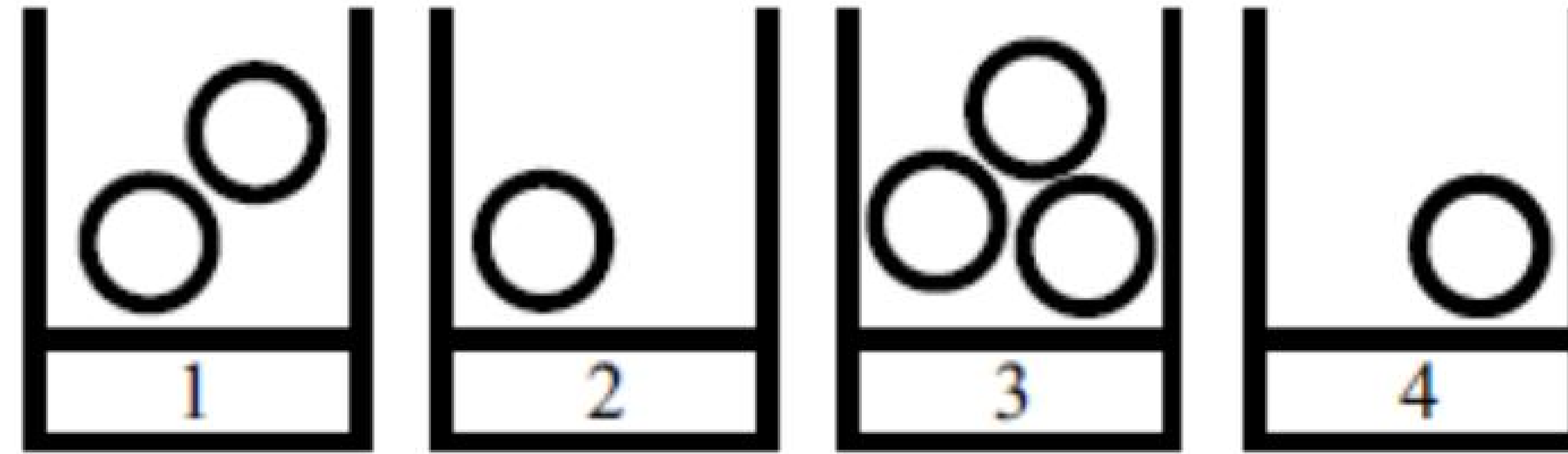
السؤال 64: يوجد $\binom{n}{k}$ طريقة لتكوين لجنة من k شخص مأخوذة من مجموعة مكونة من n شخص. قم بإعادة صياغة هذه الجملة كمسألة توزيع.

في السؤال الثاني، ترتيب الكعك هو مجموعة متعددة مكونة من 7 عناصر مأخوذة من [4] لذلك تكون الإجابة $\left(\binom{4}{7}\right)$. فيما يلي التوزيع المقابل للمجموعة المتعددة {4،3،3،2،2،2،2}.



هذا هو التوزيع لسبعة أشياء متطابقة على أربعة مستقبِلات متميزة وبلا شروط على عدد الأشياء التي يمكن أن يحصل عليها كل مستقبل. وكما هو موضح في الشكل أعلاه، فإننا نضع كرة في الصندوق j لكل كعكة من النوع j الذي نقوم بترتيبه.

ترتيب الكعك في السؤال الثالث هو مجموعة متعددة من 7 عناصر مأخوذة من [4] بحيث يظهر كل عنصر من [4] مرة واحدة على الأقل. يوجد $\left(\binom{4}{7-4}\right)$ أو $\left(\binom{4}{3}\right)$ من هذه الترتيبات لأنه بمجرد أن نضع كعكة واحدة من كل نوع في العلبة، فإن بقية الترتيب يمكن أن يكون أي مجموعة متعددة مكونة من ثلاثة عناصر مأخوذة من [4]. فيما يلي التوزيع المقابل للمجموعة المتعددة {4،3،3،3،2،1،1}.



هذا هو التوزيع لسبعة أشياء متطابقة على أربعة مستقبِلات متميزة بحيث يحصل كل مستقبل على شيء واحد على الأقل.

توضّح هذه الأمثلة أن المجموعات الجزئية والمجموعات المتعددة تكون متكافئة لتوزيعات معينة من أشياء متطابقة على مستقبِلات متميزة. فيما يلي ثلاث مسائل تكون إجابتها $\binom{n}{k}$.

$\binom{n}{k}$ تساوي:

(1) عدد المجموعات الجزئية المكونة من k عنصر والمأخوذة من مجموعة مكونة من n عنصر؛

(2) عدد الطرق لتكوين لجنة من k شخص والمأخوذة من مجموعة مكونة من n شخص؛

(3) عدد التوزيعات لـk من الأشياء المتطابقة على n من المستقبلات المتميزة بحيث يحصل كل مستقبل على شيء واحد على الأكثر.

فيما يلي السرد ذاته لـ $\left(\binom{n}{k}\right)$.

$\left(\binom{n}{k}\right)$ تساوي:

(1) عدد المجموعات المتعددة المكونة من k عنصر والمأخوذة من مجموعة مكونة من n عنصر؛

(2) عدد الطرق لترتيب k من الكعكات إذا كان المتجر يبيع n من الأصناف؛

(3) عدد التوزيعات لـk من الأشياء المتطابقة على n من المستقبلات المتميزة.

هذا يمكننا من أن نملأ الصف الثاني في الجدول الخاص بمسائل التوزيع.

توزيعات		**كم عدد العناصر التي يمكن للمستقبلات تلقيها**			
k عنصر	**على n مستقبل**	بدون شروط	$1 \geq$	$1 \leq$	$= 1$
مختلفة	مختلفة	n^{k}	$(n)_{\mathrm{k}}$	؟	0 أو $n!$
متطابقة	مختلفة	$\left(\binom{n}{k}\right)$	$\binom{n}{k}$	$\left(\binom{n}{k-n}\right)$	1 أو 0
مختلفة	متطابقة	؟	؟	؟	؟
متطابقة	متطابقة	؟	؟	؟	؟

السؤال 65: اشرح سبب الإجابتين الأخيرتين في الصف الثاني في الجدول أعلاه.

متطابقة باسكال ومثلث باسكال

دعنا سريعاً نكتشف ونثبت متطابقة لـ $\binom{n}{k}$. سنبدأ بحالة خاصة. بكم طريقة يمكن تكوين لجنة من ثلاثة أشخاص مأخوذة من مجموعة من خمسة أشخاص؟

كإجابة أولى، نحن نعلم أن هنالك $\binom{5}{3}$ طريقة. للحصول على إجابة أخرى، لنقل إن الأشخاص الخمسة هم أصدقاؤنا آدم وبين وكالب ودان وإيفرايم الواردة

أسماؤهم في القسم 12.. قسم اللجان الممكن تكوينها إلى نوعين تبعاً لوجود إيفرايم في اللجنة أو عدم وجوده.

جميع اللجان الممكنة	
اللجان بدون إيفرايم	**اللجان مع إيفرايم**
{آدم، بين، كالب}	{آدم، بين، إيفرايم}
{آدم، بين، دان}	{آدم، كالب، إيفرايم}
{آدم، كالب، دان}	{آدم، دان، إيفرايم}
{بين، كالب، دان}	{بين، كالب، إيفرايم}
	{بين، دان، إيفرايم}
	{كالب، دان، إيفرايم}
$\binom{4}{3}$ **بدون إيفرايم**	$\binom{4}{2}$ **مع إيفرايم**
$\binom{4}{3}+\binom{4}{2}$ **ككل**	

هنالك $\binom{4}{2}$ لجنة يكون إيفرايم موجوداً فيها، لأنه بمجرد وجود إيفرايم في اللجنة، سيتم تحديد الشخصين المتبقيين بـ$\binom{4}{2}$ طريقة. هنالك $\binom{4}{3}$ لجنة لا يوجد إيفرايم فيها لأن أي لجنة تخلو من وجوده ستكون عبارة عن لجنة مكونة من أربعة أشخاص هم: آدم وبين وكالب وادان. لذلك باستخدامنا لمفهوم الجمع، الإجابة الثانية هي $\binom{4}{2} + \binom{4}{3}$.

أثبتنا للتو أن $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$ وبنفس المنطق سنثبت المبرهنة التالية المعروفة بـمتطابقة باسكال (Pascal’s Identity).

المبرهنة

2.2.1 (متطابقة باسكال) : لأي $k \geq 1$ و $n \geq 1$،

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

السؤال 66: أثبت متطابقة باسكال، ثم استخدم نفس الفكرة لتعطي إثباتاً توافقياً لمتطابقة ذات صلة بها وهي: لأي $k \geq 1$ و $n \geq 1$،

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{k-1}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right)$$

$n\downarrow\ k\rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

العنصر في الصف n والعمود k هو $\binom{n}{k}$. تتيح معادلة باسكال حساب هذه المصفوفة بشكل سهل كالتالي: كل عنصر يساوي العنصر الذي يقع إلى الشمال الغربي منه بالإضافة إلى العنصر الذي يقع إلى شماله أما بالنسبة إلى أول صف وعمود، واللذين لا يوجد لديهما مثل تلك العناصر المجاورة، فإننا نعتمد على الشروط الحدودية التالية: $\binom{n}{0} = 1$ لـ $n \geq 0$ و$\binom{0}{k} = 0$ لـ $k \geq 1$. هذا يعطي إحساساً بالتوافقية. عدد المجموعات الجزئية المكونة من 0 عنصر والمأخوذة من مجموعة مكونة من n عنصر هو 1 لأن ø هي المجموعة الجزئية الوحيدة في هذه الحالة. كذلك، لا يوجد مجموعات جزئية مكونة من k عنصر والمأخوذة من مجموعة مكونة من 0 عنصر لأي قيمة لـ $k \geq 1$.

السؤال 67: استخدم متطابقة باسكال لإيجاد الصف التاسع (أي $n = 9$) في الجدول.

إثباتات توافقية

إثباتات سريعة

متطابقتان أساسيتان تتضمنان الأرقام $\binom{n}{k}$ هما:

(2.2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ لكل قيم k و n، التي تحقق المتباينة $0 \leq k \leq n$

و

(2.3)

$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ لكل قيم $n \geq 0$

لكلتا المعادلتين إثباتات توافقية سريعة. لإثبات المعادلة (2.2)، لاحظ أنك تستطيع اختيار لجنة مكونة من k شخص إما من خلال تحديد أولئك الأشخاص الذين سينضمون للجنة وعددهم k أو بشكل مكافئ تحديد الأشخاص الذين لن ينضموا للجنة وعددهم $n - k$.

لإثبات المعادلة (2.3)، تذكر أن هنالك 2^n مجموعة جزئية يمكن تكوينها من مجموعة مكونة من n عنصر. نستطيع بشكل تبديلي عدّ تلك المجموعات الجزئية من خلال ترتيبها في مجموعات تبعاً لعدد عناصرها. هنالك $\binom{n}{k}$ مجموعة جزئية مكونة من k عنصر وجمع هذه الكمية لجميع قيم k من 0 إلى n يكوِّن الطرف الأيمن من المعادلة.

السؤال 68: ما هو مجموع الأرقام في الصف رقم 15 (أي $n = 15$) في مثلث باسكال؟

(أجب عن هذا السؤال من دون حساب الصف رقم 15).

عدّ اللجان

سنستخدم تفسير $\binom{n}{k}$ لعدّ اللجان لإثبات متطابقتين إضافيتين. فيما يلي المتطابقة الأولى:

$$\binom{n}{k}k = n\binom{n-1}{k-1} \tag{2.4}$$

سؤال: من بين مجموعة مكونة من n شخص، بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من k شخص وتحديد واحد منهم كرئيس للّجنة؟

الإجابة 1: قم بعدّ القائمتين في المجموعة الثنائية ذات الشكل (لجنة، رئيس). نستطيع اختيار اللجنة بـ $\binom{n}{k}$ طريقة، ثم اختيار الرئيس من بين هؤلاء الـ k شخص بواحدة من k طريقة، وباستخدام مبدأ الضرب، هنالك $k\binom{n}{k}$ طريقة ككل.

الإجابة 2: قم بعدّ القائمتين في المجموعة الثنائية ذات الشكل (رئيس، لجنة). نستطيع أولاً اختيار الرئيس من بين n شخص بواحدة من n طريقة. ثم، من بين الـ $n-1$ شخص المتبقيين، نستطيع إكمال اللجنة باختيار الـ $k-1$ شخص بـ $\binom{n-1}{k-1}$ طريقة، وباستخدام مبدأ الضرب، هنالك $n\binom{n-1}{k-1}$ طريقة ككل.

معادلة ڤاندرموند

المعادلة التالية تُدعى صيغة ڤاندرموند:

(2.5)

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}=\binom{m+n}{k}$$

لننتهِ بسؤال جيد، لاحظ أن الجهة اليمنى من المعادلة تعدّ اللجان ذات الـk شخص التي نستطيع تكوينها من $m+n$ شخص. تقترح الحدود المستخدمة ضمن بنود الجمع على الجهة اليسرى من المعادلة أن هنالك نوعين من الأشخاص – لنقل m من الرجال و n من النساء – وأننا نستطيع التقسيم إلى حالات تبعاً لعدد الرجال في اللجنة.

سؤال: من بين مجموعة مكونة من m رجل وn امرأة، كم عدد اللجان التي يمكن تكوينها من k شخص؟

الإجابة 1: يوجد $\binom{m+n}{k}$ من اللجان.

الإجابة 2: اعتمد على عدد الرجال في اللجنة. إذا كان هذا الرقم هو j، حيث $0 \leq j \leq k$، فإن هنالك $\binom{m}{j}$ طريقة لاختيار الرجال ولكل واحدة من هذه الاختيارات فإن هنالك $\binom{n}{k-j}$ طريقة لاختيار النساء وبذلك تكون اللجنة مكونة من k شخص. باستخدام مبدأ الضرب هنالك $\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$ من اللجان تحتوي على j من الرجال وباستخدام مبدأ الجمع هنالك $\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$ من اللجان.

طلبات الكعك

دعنا نعود إلى طلبات الكعك. افترض أن هنالك محلاً يبيع 10 أصناف من الكعك ونريد أن نطلب نصف دزينة، حينئذٍ سيكون هنالك $\left(\binom{10}{6}\right)$ طلب مختلف. إذا ركزنا على صنف واحد، لنقل الكعك اللامع، فإن أي طلب لنصف دزينة يجب أن يحتوي ما بين صفر إلى ست كعكات لامعة. هنالك $\left(\binom{9}{6}\right)$ من الطلبات لا تحتوي على كعكات لامعة و$\left(\binom{9}{5}\right)$ من الطلبات تحتوي على كعكة لامعة واحدة وهكذا وصولاً إلى $\left(\binom{9}{0}\right)$ من الطلبات تحتوي على ست كعكات لامعة وبهذا نكون للتو قد أثبتنا أن:

$$\left(\binom{10}{6}\right)= \left(\binom{9}{6}\right) + \left(\binom{9}{5}\right) + \left(\binom{9}{4}\right) + \left(\binom{9}{3}\right) + \left(\binom{9}{2}\right) + \left(\binom{9}{1}\right) + \left(\binom{9}{0}\right)$$

السؤال 69: عمّم وأثبت صيغة تتضمن $\binom{n}{k}$ بدلاً من $\binom{10}{6}$.

مبرهنة ذات الحدين

تمنح الصفوف في مثلث باسكال معاملات كل حد ناتج عن تفكيك التعبير $(x+y)^n$ وتبسيطه. على سبيل المثال،

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4\\ &= \binom{4}{0}x^4y^0+\binom{4}{1}x^3y^1+\binom{4}{2}x^2y^2+\binom{4}{3}x^1y^3\\ &+\binom{4}{4}x^0y^4\end{aligned}$$

هذا هو موضوع مبرهنة ذات الحدين.

مبرهنة (2.22.) (ذات الحدين) لأي عدد صحيح $n \geq 0$ وأية أعداد حقيقية x وy،

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

لأن y و x هي أعداد حقيقية، وليس بالضرورة أن تكون أعداداً صحيحة موجبة، فإنه يبدو أن الاختبار التوافقي سيكون غير وارد. سنحتال على هذا الأمر من خلال إعطاء إثبات توافقي يكون صحيحاً لكل الأعداد الصحيحة الموجبة y و x ثم توضيح سبب كفاية ذلك الإثبات.

افترض أن y وx هي أعداد صحيحة موجبة. كم عدد كلمات السر المكونة من n حرف التي يمكن تكوينها بحيث يكون هنالك $x + y$ اختياراً لكل حرف؟

يوجد $(x + y)^n$ كلمة سر في هذه الحالة. بطريقة أخرى، تخيل أنه سيتم أخذ أحرف كلمة السر من أبجديتين مختلفتين تماماً: الأبجدية 1 لديها x حرف والأبجدية 2 لديها y حرف. رتّب كلمات السر في مجموعات تبعاً لعدد الأحرف التي تحتوي عليها والمأخوذة من الأبجدية 2. إذا كان هذا العدد هو k، حيث $0 \leq k \leq n$، فإن هنالك $\binom{n}{k}$ طريقة لتحديد مواقع الأحرف من الأبجدية 2، ثم هنالك y^k طريقة لتحديد تلك الأحرف، وأخيراً هنالك x^{n-k} طريقة لتحديد الأحرف من الأبجدية 1 للمواقع $n - k$ المتبقية. لأن k يمكن أن تتراوح من 0 إلى n، فإنه، وباستخدام مبدأ الجمع، يكون هنالك

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

كلمة سر. هذا يثبت مبرهنة ذات الحدين عندما يكون yو x عددين صحيحين موجبين.

لتوسيع النتيجة لتشمل كل الأعداد الحقيقية yو x، لاحظ أن التعبير $(x + y)^n$ هو كثير الحدود في y وx. إذا كانت معادلة كثير الحدود كتلك الموجودة في

مبرهنة ذات الحدين صحيحة لقيم عديدة لا متناهية لـ y وx (هنا، كل الأرقام الصحيحة الموجبة) فإنها حينئذٍ تكون صحيحة لجميع الأعداد الحقيقية y وx.

تُعرف هذه النتيجة بفرادة مبرهنة الكثيرات الحدود. انظر إلى التمرين 13.

عدّ الحلول التكاملية

سننهي هذا القسم بعرض بعض الأمثلة التي توضح نوعاً آخر من أسئلة العدّ التي تكون الإجابة عليها هي$\left(\binom{n}{k}\right)$. ستعرف فائدة هذه الفكرة عندما ندرس توليد الدوال في الفصل 3.

أمثلة

(أ) كم عدد الحلول لدى $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 7$، حيث كل z_i هو عدد صحيح غير سالب؟

$\Longleftarrow$ الحل هو مصفوفة رباعية على الشكل $(z_1، z_2، z_3، z_4)$ والتي تحقق شروط السؤال. على سبيل المثال، كلا (1،2،4،0) و(6،0،0،1) يكوّنان حلّين، ولكن (2،1،2،4) و(−8،0،0،1) ليسا بحلّين.

لاحظ أن الحلول تتوافق بشكل واحد لواحد مع المجموعات الجزئية السباعية المأخوذة من [4]: z_1 هو عدد أرقام الـ 1 في المجموعة الجزئية وz_2 هو عدد أرقام الـ 2 وهكذا. على سبيل المثال، الحل (1،2،4،0) يتوافق مع المجموعة الجزئية .{2,2,2,2,3,3,4}

لذلك يوجد $\left(\binom{4}{7}\right) = \binom{10}{7} = 120$ حلاً.

(ب) كم عدد الحلول لدى $z_1 + z_2 + z_3 = 15$، حيث كل z_i هو عدد صحيح موجب؟

$\Longleftarrow$ لأن كل $z_i \geq 1$، فإن هذه الحلول تتوافق مع مجموعات متعددة مكونة من 15 عنصراً مأخوذة من [3] حيث إن كل عنصر من [3] يظهر مرة واحدة على الأقل. لذلك يكون هنالك $\left(\binom{3}{15-3}\right) = \left(\binom{3}{12}\right) = \binom{14}{12} = 91$ حلاً.

لاحظ أن هذه المسألة مكافئة لعدّ الحلول للمسألة $y_1 + y_2 + y_3 = 15 - 3$ حيث إن كل y_i هو عدد صحيح غير سالب.

(ج) كم عدد الحلول لدى $z_1 + z_2 + z_3 + 4z_4 = 11$، حيث إن كل z_i هو عدد صحيح غير سالب؟

$\Longleftarrow$ الحد $4z_4$ يزيد من صعوبة استخراج الحل قليلاً.

السؤال 70: قم بحل هذه المسألة من خلال التقسيم إلى حالات بناء على قيمة z_4.

الفكرة العامة هي أن $\left(\binom{n}{k}\right)$ تساوي عدد الحلول لـ $z_1 + z_2 + \cdots + z_n =$ k بحيث إن كل z_i هو عدد صحيح غير سالب، وأن $\left(\binom{n}{k-n}\right)$ تساوي عدد الحلول لنفس المعادلة بحيث إن كل z_i هو عدد صحيح موجب.

السؤال 71: كم عدد الحلول لدى $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = k$ بحيث إن كل z_i هو إما 0 أو 1؟

ملخّص

تتوافق المجموعات الجزئية والمجموعات المتعددة مع توزيعات أشياء متطابقة على مستقبلات مختلفة. في هذا القسم، زوّدنا بإثباتات توافقية للعديد من النتائج المهمة التي تتضمن معاملات ذات الحدين $\binom{n}{k}$ والتي من بينها متطابقة باسكال ومبرهنة ذات الحدين. درسنا أيضاً كيف أن $\left(\binom{n}{k}\right)$ تعُد الحلول ذات الأعداد الصحيحة لمعادلات معينة.

تمارين

1. قم بتكوين مسألة العدّ المصاحبة لكل إجابة مما يلي:

(أ) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$

(ب) $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$

(ج) $\binom{20}{10}\binom{10}{5}$

(د) $\sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\left(\binom{n}{2j+1}\right)$

2. برّر توافقياً: $\binom{20}{3}\binom{17}{2}\binom{15}{3} = \binom{20}{8}\binom{8}{5}\binom{5}{3}$

3. أعطِ إثباتاً تقابلياً لمتطابقة باسكال من خلال تعريف ما يلي:

A: = {sets S:$S \subseteq$ [n] and $|S| = k$}

A: = {sets T:$T \subseteq$ [n-1] and $|T| = k - 1$}

A: = {sets U:$U \subseteq$ [n-1] and $|U| = k$}

ثم جد دالة تقابلياً .$F: A \rightarrow B \cup C$

4. أعطِ إثباتات توافقية أو تقابلية لما يلي. جزء من عملك في هذا

السؤال هو تحديد جميع قيم k وn و/أو m التي تجعل المتطابقات التالية صحيحة:

(أ) $3^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \times 2^{n-k}$

(ب) $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$

(ج) $\binom{0}{m} + \binom{1}{m} + \binom{2}{m} + \cdots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}$

(د) $\left(\binom{n}{k}\right) = \left(\binom{k+1}{n-1}\right)$

(ه) $\left(\binom{n}{k-n}\right) = \left(\binom{k-1}{k-n}\right)$

(و) $\left(\binom{1}{k-1}\right) + \left(\binom{2}{k-1}\right) + \left(\binom{3}{k-1}\right) + \cdots + \left(\binom{n}{k-1}\right) = \left(\binom{n}{k}\right)$

5. ماذا يساوي المقدار $\left(\binom{n-1}{k-1}\right) + \left(\binom{n-2}{k-1}\right) + \left(\binom{n-3}{k-1}\right) + \cdots +$

$\left(\binom{k-1}{k-1}\right)$؟ خمّن النتيجة ثم قم بإعطاء إثبات توافقي.

6. أعطِ إثباتاً توافقياً لما يلي: إذا كان y وx عددين حقيقيين وn هو عدد صحيح غير سالب، فإن

$$(x+y)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)_k (y)_{n-k}$$

(ستحتاج، كما هو الحال في إثبات مبرهنة ذات الحدين، لتذكّر خاصية فرادة كثيرات الحدود).

7. حدّد عدد الحلول لكل من الأسئلة التالية. افترض أن كل z_i هي عدد أعداد صحيحة غير سالبة ما لم يذكر غير ذلك.

(أ) $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1$

(ب) $z_1 + z_2 + 10z_3 = 8$

(ج) $z_1 + z_2 + \cdots + z_{20} = 401$ حيث كل $z_i \geq 1$.

(د) $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 12$ حيث $z_1, z_2 \geq 1$ و $z_3, z_4 \geq 2$

(ه) $z_1 + z_2 + z_3 + 3z_4 + 5z_5 = 7$

(و) $z_1 + z_2 + z_3 + \frac{1}{2}z_4 = \frac{11}{2}$

8. كم عدد الحدود الناتجة من فك المقدار $(a+b+c)^9$ وتجميع الحدود المتشابهة؟

9. ثبّت n كعدد موجب. جد، مع الإثبات، قيمة k (حيث $0 \leq k \leq n$) التي ترفع قيمة المقدار $\binom{n}{k}$ إلى القيمة العظمى.

10. متى يكون المقدار $\binom{n}{k}$ زوجياً؟ أعطِ إجابة كاملة قدر الإمكان مع الإثبات.

11. كم عدد المصفوفات التي يمكن تكوينها من k عنصر $(x_1، x_2، ...، x_k)$ بحيث إن كل x_i هو عدد صحيح موجب و≤ $1 \le x_1 \le x_2$ $\cdots \le x_k \le n$؟ أثبت إجابتك.

12. كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من k عنصر والمأخوذة من $[n]$ والتي يمكن تكوينها بحيث لا يظهر أي رقمين متتابعين في المجموعة الجزئية؟

13. (فرادة الكثيرات الحدود) لتكن $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ و$g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ كثيرات حدود من الدرجة n، وافترض أن $x_0، x_1، ...، x_n$ هي أعداد حقيقية متميزة بحيث إن $f(x_i) = g(x_i)$ لجميع قيم i. أثبت أن $g = f$.

ملاحظات

على الرغم أنه من الشائع جداً أن يتم ربط اسم الرياضي الفرنسي بليز باسكال $(1623 - 1662)$ بالمصفوفة المثلثة للأرقام التي تم ذكرها في هذا القسم، إلا أنه تم التعرف بشكل جيد على المثلث والعديد من خصائصه قبل مجيء العالم باسكال من

قبل رياضيين من آسيا والشرق الأوسط وشمال أفريقيا وجنوب أوروبا في مطلع العام 1000. ألقِ نظرة على المقالة المكتوبة من قبل كاتز (Katz) في سنة 1996.

تزود معاملات ذات الحدين بمجموعة لا متناهية من المتطابقات والخصائص الممتعة وسنشاهد المزيد منها خلال هذا الكتاب خصوصاً في القسم 14.. ومرة أخرى، يعد كتاب بنيامين وكوين (2003) (Benjamin & Quinn 2003) مرجعاً ممتازاً. على صعيد ذي صلة، هنالك بحث مهم تم إنجازه في السنوات الأخيرة في مجال خوارزميات إثبات المتطابقات المستخدمة في الحاسوب وهذه مسألة تم حلها جيداً لأنواع عديدة من المتطابقات المهمة متضمنةً معاملات ذات الحدين. ألقِ نظرة على الكتاب الذي يحمل العنوان $A = B$ المؤلف من قبل بيتكوفسيك وويلف وزيلبرغر (Wilf & Zeilberger) في سنة 1996.

تقول مبرهنة فيرما – وايلز (Fermat-Wiles) (التي كانت تدعى سابقاً "مبرهنة فيرما الأخيرة") إنه لا يوجد حلول غير صفرية لـلمعادلة $x^n + y^n = z^n$ للأعداد الصحيحة n وz وy وx عندما $n \geq 3$. في مقالة عن أبيه ("روجيه أبيري (Roger Apéry)، 1994–1916: رياضي متطرف"، الرياضي الذكي، مجلد 18 رقم 2، 1996) (*A Radical Mathematician: The Mathematical Intelligencer*, Volume 18, n.2, 1996) يروي فرانسوا أبيري الطرفة التالية.

خلال عشاء رجل رياضي في كنغستون، كندا، في عام 1979، دار الحوار حول مبرهنة فيرما الأخيرة، واقترح إينريكو بومبيري مسألة لإثبات أن المعادلة التالية ليس لديها حلول غير تافهة.

$$\binom{x}{n} + \binom{y}{n} = \binom{z}{n} \qquad \text{حيث } n \geq 3$$

ترك أبيري الطاولة وعاد على الإفطار بالحل $n = 3$، $x = 10$،$z =$، $y = 16$

17. رد بومبيري بقساوة: أنا قلت "غير تافهة".

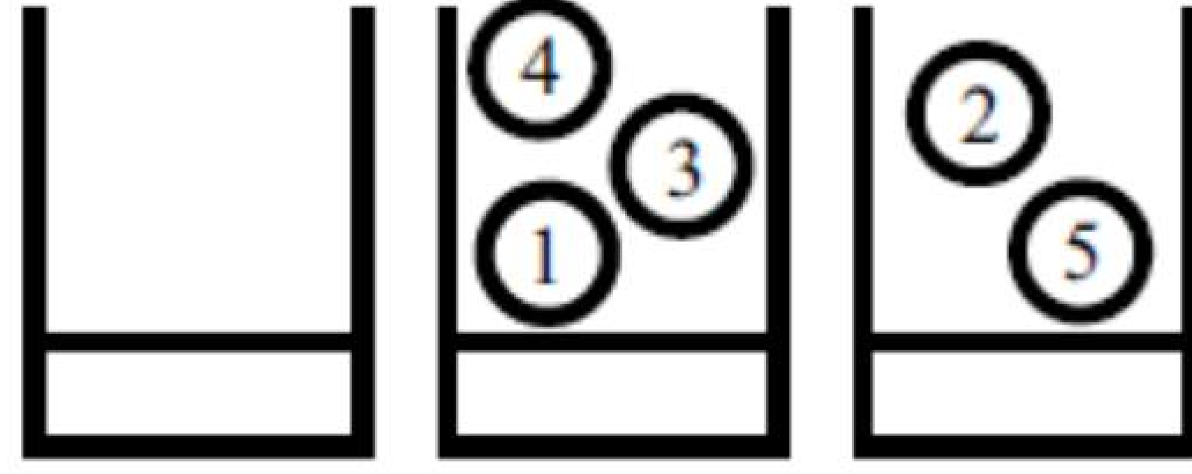
3.2 عد تقسيمات المجموعة

تركنا نوعين من التوزيعات للدراسة: أشياء متميزة على مستقبِلات متماثلة، وأشياء متماثلة على مستقبِلات متماثلة. سندرس النوع الأول في هذا القسم وفي ذلك طرح لأعداد ستيرلينغ من النوع الثاني.

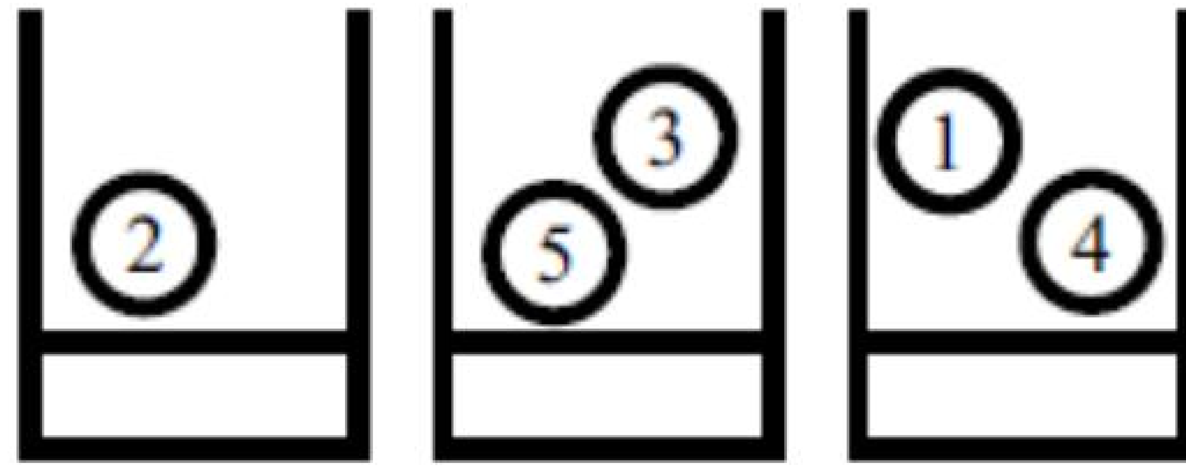
يجب علينا دراسة هذه العائلة المهمة من الأعداد بتفاصيل أكثر في القسم 34..

تقسيمات لمجموعة كتوزيعات

سندرس الآن توزيعات لأشياء متميزة على مستقبلات متماثلة. فيما يلي توزيع لخمسة أشياء متميزة على ثلاثة مستقبلات متماثلة.



وفيما يلي توزيع آخر مماثل.



نستطيع توضيح التوزيع الأول كـ $\{\{2,5\},\{1,3,4\}\}$ والذي هو تقسيم لمجموعة [5] إلى مجموعتين ونستطيع توضيح التوزيع الثاني كـ $\{\{3,5\},\{2\},\{1,4\}\}$ والذي يقسم المجموعة [5] إلى ثلاث مجموعات. لاحظ أنه في التوزيع الثاني يحصل كل مستقبل على شيء واحد على الأقل. (تذكر أننا درسنا التقسيمات في القسم 14).

السؤال 72: ما التوزيع الذي يتطابق مع التقسيم $\{\{1,2,3,4,5\}\}$؟

لأي مجموعة S، يكون تقسيم r من S هو المجموعة غير الخالية المكونة من r عنصر بحيث يكون اتحاد المجموعات المنفصلة منها هو S. تُدعى عناصر التقسيم بكتل التقسيم. يتطابق التقسيم المكون من عنصرين من المجموعة [5] مع التوزيع الأول الموضّح في الفقرة السابقة والمكون من المجموعتين $\{2,5\}$ و$\{1,3,4\}$. إذا كنا

نستطيع أن نفعل ذلك من دون لبس، فإنه أحياناً يكون من الملائم أن نستثني الأقواس الداخلية والفواصل ونكتب بدلاً من ذلك {134, 25}.

هنالك صفتان بارزتان للتقسيم المأخوذ من المجموعة S هما: (1) كل عنصر في S يظهر في كتلة واحدة فقط من التقسيم، و(2) ترتيب الكتل لا يهم عند وضع قائمتها.

أعداد ستيرلينغ من النوع الثاني

لعد تقسيم المجموعة سنعرّف $S(n, k)$ كعدد التقسيمات لـمجموعة مكونة من n عنصر والمكونة من k كتلة، أي عدد التقسيمات المكونة من k عنصر لمجموعة مكونة من n عنصر.

إذن وكما تمت الإشارة إليه فإن،

$S(n, k)$ تساوي (1) عدد التقسيمات المكونة من k كتلة لمجموعة مكونة من n عنصر؛ و(2) عدد التوزيعات لـ n من الأشياء المتميزة على k من المستقبلات المتماثلة بحيث يحصل كل مستقبل على شيء واحد على الأقل.

لاحظ أن عدد التوزيعات لـ k من الأشياء المتميزة على n من المستقبلات المتماثلة بحيث يحصل كل مستقبل على عنصر وا حد على الأقل هو $S(k, n)$ وليس $S(n, k)$. يشير المتغير الأول إلى حجم المجموعة التي يمكن تقسيمها والثاني إلى حجم الكتل وسنعرّف $S(0,0) = 1$.

السؤال 73: في سياق تقسيمات أو توزيعات (بحسب اختيارك)، اشرح لم يكون $S(0,k)=0$ لـ $k\geq 1$ و$S(n,0)=0$ لـ $n\geq 1$.

الأعداد $S(n,k)$ هي **أعداد ستيرلينغ من النوع الثاني**.

أعداد ستيرلينغ المحسوبة بالتعداد الكامل

دعنا نحسب $S(4,k)$ لـ $k=1$، 2، 3، 4 باستخدام التعداد الكامل. بشكل عام، لعدد صحيح موجب كـ n

تكون القيم غير الصفرية الوحيدة لـ $S(n,k)$ هي لقيم k التي تحقق المتباينة $1\leq k\leq n$.

أولاً، $S(4,1)$ تساوي عدد التقسيمات لـ [4] والمكوّنة من كتلة واحدة. والتقسيم الوحيد في هذه الحالة هو $\{\{1,2,3,4\}\}$ ولذلك فإن $S(4,1)=1$.

ثانياً، $S(4,2)$ تساوي عدد التقسيمات لـ [4] والمكونة من كتلتين. هنالك سبعة تقسيمات تحديداً:

$$\{\{1\},\{2,3,4\}\}\quad \{\{2\},\{1,3,4\}\}\quad \{\{3\},\{1,2,4\}\}\quad \{\{4\},\{1,2,3\}\}$$
$$\{\{1,2\},\{3,4\}\}\quad \{\{1,3\},\{2,4\}\}\quad \{\{1,4\},\{2,3\}\},$$

لذلك فإن $S(4,2)=7$.

السؤال 74: استخدم التعداد الكامل لإثبات أن $S(4,3) = 6$ و$1 = S(4,4)$. أيضاً، جد $S(3,k)$ لـ $k = 1$،2،3.

أعداد بيل

سنعرّف $B(n)$ كعدد التقسيمات لمجموعة مكونة من n عنصر، وهذا يعني تقسيمات بأي حجم. على سبيل المثال، $B(4) = 15$ لأن هنالك 15 تقسيماً لـ [4] هي تحديداً (باستخدام الشكل المختصر):

$$\begin{array}{ccccc} \{1234\} & \{1,234\} & \{2,134\} & \{3,124\} & \{4,123\} \\ \{12,34\} & \{13,24\} & \{14,23\} & \{1,2,34\} & \{1,3,24\} \\ \{1,4,23\} & \{2,3,14\} & \{2,4,13\} & \{3,4,12\} & \{1,2,3,4\}. \end{array}$$

تستطيع إيجاد عدد التقسيمات بدون استخدام التعداد الكامل من خلال جمع أعداد ستيرلينغ التي تم إيجادها مسبقاً:

$$B(4) = S(4,1) + S(4,2) + S(4,3) + S(4,4) = 1 + 7 + 6 + 1 = 15$$

السؤال 75: جد $B(3)$.

الأعداد $B(n)$ تدعى **أعداد بيل** وعلاقتها بأعداد ستيرلينغ من النوع الثاني هي:

(2.6)

$B(n)$ لكل $n \geq 1$

$$= \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$$

ماذا عن الصيغ؟

لدينا صيغ جيدة لحساب ($\binom{n}{k}$ و$\binom{n}{k}$ وn_k)، لكن اشتقاق صيغ لـ $S(n,k)$ و $B(n)$ يشكل تحدياً أكبر ويحتاج إلى تقنيات متطورة أكثر. في القسم 13.، سنقوم باشتقاق الصيغة

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j (k-j)^n$$

في ضوء العلاقة بين أعداد ستيرلينغ وأعداد بيل الموضحة في المعادلة (2.6) يمكن لنا أن نحصل على صيغة لـ $B(n)$ ولكننا سنثبت في القسم 34. الصيغة البديلة:

$$B(n) = \frac{1}{e}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^n}{j!}$$

إن هذه الصيغة مهمة جداً لأنها توضح العدد الصحيح $B(n)$ الذي لديه تفسير توافقي كحاصل ضرب العدد غير النسبي $\frac{1}{e}$ وسلسلة لا متناهية.

السؤال 76: جد $B(5)$ و $S(7,3)$ باستخدام الصيغ المعطاة للتو.

الصيغ لحالات خاصة

بدلاً من إيجاد صيغة موحدة لـ $S(n,k)$، دعنا نسلط أنظارنا على إيجاد صيغ لقيم محددة لـ k.

هذه الصيغ هي:

$$S(n,1) = S(n,n) = 1 \qquad S(n,2) = 2^{n-1} - 1 \qquad S(n,n-1) = \binom{n}{2}$$

الصيغ $S(n,n) = 1$ و $S(n,1) = 1$ يجب أن تكون واضحة لأن الطريقة الوحيدة لتقسيم مجموعة مكونة من n عنصر إلى كتلة واحدة هي أن يكون هنالك تقسيماً واحداً يحتوي جميع العناصر n المكونة للمجموعة الأصلية، والطريقة الوحيدة لتقسيم مجموعة مكونة من n عنصر إلى n كتلة هي أن تحتوي كل كتلة على عنصر واحد فقط.

لحساب$S(n,2)$ لاحظ أن الكتل في أي تقسيم من $[n]$ مكون من عنصرين (مجموعتين) تتكون من بعض المجموعات الجزئية غير الخالية من $[n]$ ومتمماتها. هذا يعني أننا نحتاج إلى عد مجموعات على الشكل $\{A, A^c\}$ حيث A وA^c هما مجموعتان جزئيتان غير خاليتين من $[n]$.

دعنا أولاً نقوم بعدّ المجموعتين المكونتين من عنصرين(A, A^c) ذوات الخصائص المتشابهة. يمكننا اختيار المجموعة A من أي من الـ $2^n - 2$ مجموعة جزئية من $[n]$ باستثناء $\emptyset$ و$[n]$ نفسها وبالتالي فإنه يمكن تحديد A^c تلقائياً وعلاوة على ذلك فإنه من المضمون أنها ليست خالية ولذلك فإن هنالك $2^n - 2$ مجموعة كتلك المجموعتين ذاتي العنصرين.

الآن، افترض أن مجموعتين مكونتين من عنصرين تعتبران متكافئتين إذا كانتا تمثلان نفس التقسيم لـ $[n]$. كل فئة متكافئة لديها عنصران نسبة إلى الطريقتين اللتين يمكن بهما ترتيب الكتل في المجموعة ذات العنصرين ولذلك، تبعاً لقانون التكافؤ، فإن هنالك $2^{n-1} - 1 = (2^n - 2)/2$ فئات متكافئة وبالتالي فإن $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$.

السؤال 77: الآن، أثبت الصيغة $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$.

إثباتات توافقية

مثلث ستيرلينغ من النوع الثاني

سنقوم أولاً باشتقاق متطابقة لـ $S(n, K)$ بحيث تكون مشابهة لـمتطابقة باسكال (مبرهنة2 2.1.) لمعاملات ذات الحدين$\binom{n}{k}$. تفحّص التوضيح التالي للحالة

الخاصة $S(5,3)$. أي تقسيم من [5] مكون من ثلاث كتل يجب أن يحتوي على العنصر 5 إما (1) في كتلة لوحدها، أو (2) ليس منفرداً في كتلة. فيما يلي نبين التقسيمات من النوع الأول باستخدام الشكل المختصر:

$$\{5,1,234\} \quad \{5,2,134\} \quad \{5,3,124\} \quad \{5,4,123\}$$
$$\{5,12,34\} \quad \{5,13,24\} \quad \{5,14,23\}$$

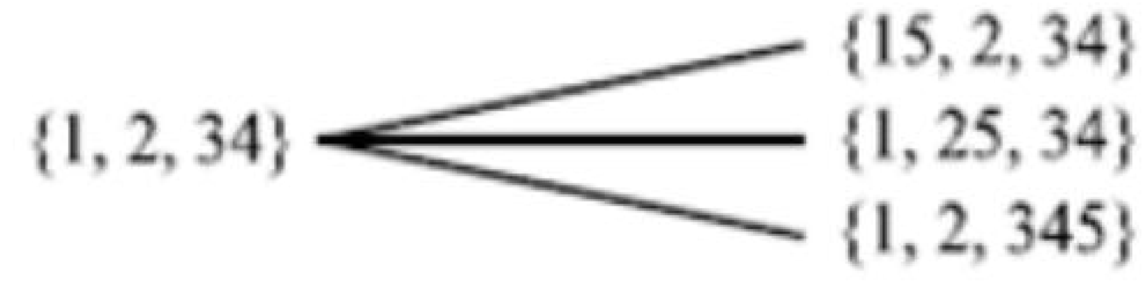
لكن هذه التقسيمات تتوافق بشكل واحد لواحد مع $S(4,2) = 7$ تقسيمات من [4] مكونةً من كتلتين: إزالة الكتلة {5} من كل تقسيم ينتج عنه تقسيم من [4] مكون من عنصرين. هذه العملية هي دالة تقابلية؛ وهي موضحة في النصف العلوي من الشكل 52..

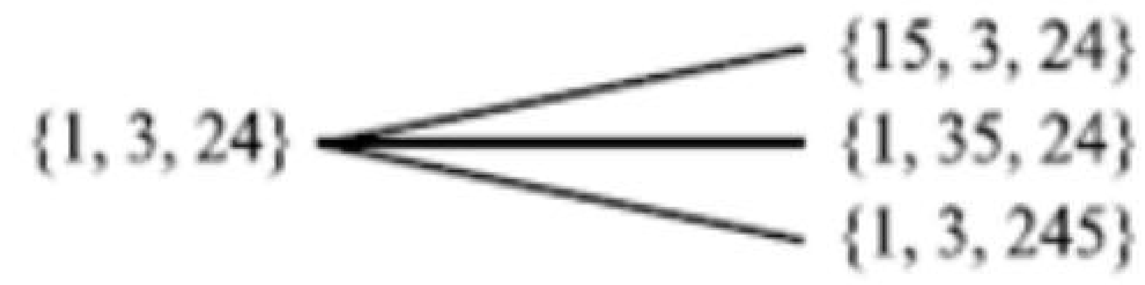
لعد التقسيمات من النوع الثاني، اختر أولاً واحداً من الـ $S(4,3)$ تقسيماً من [4] المكونة من ثلاث كتل، ثم اختر واحدة من تلك الكتل الثلاث التي تحتوي على العنصر 5 مما يضمن أن العنصر 5 لن يكون وحيداً في الكتلة؛ وعلاوةً على ذلك فإن كل اختيار ينتج عنه تقسيم مختلف. هذه العملية موضحة في النصف السفلي من الشكل 52.. باستخدام مبدأ الضرب، حيث يكون هنالك $3.S(4,3)$ تقسيماً من النوع الثاني.

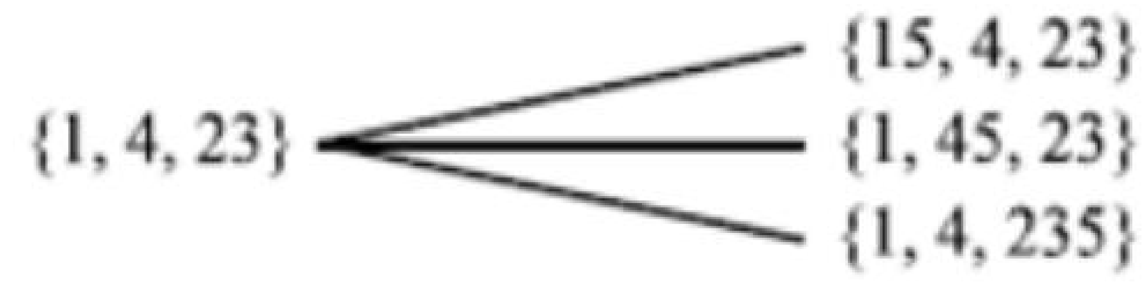
يشير مبدأ الجمع ضمنياً أن هنالك $S(4,2) + 3.S(4,3)$ تقسيمات ككل وبذلك نكون قد أثبتنا المتطابقة أن $S(5,3) = S(4,2) + 3.S(4,3)$ والمبرهنة التالية تستخدم هذه الفكرة.

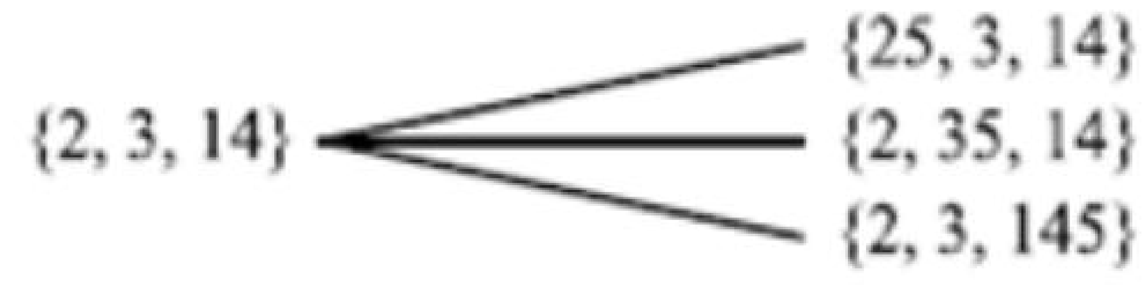
المبرهنة 2.3.1: إذا كانت $1 \geq k$ و $1 \geq n$، فإن:

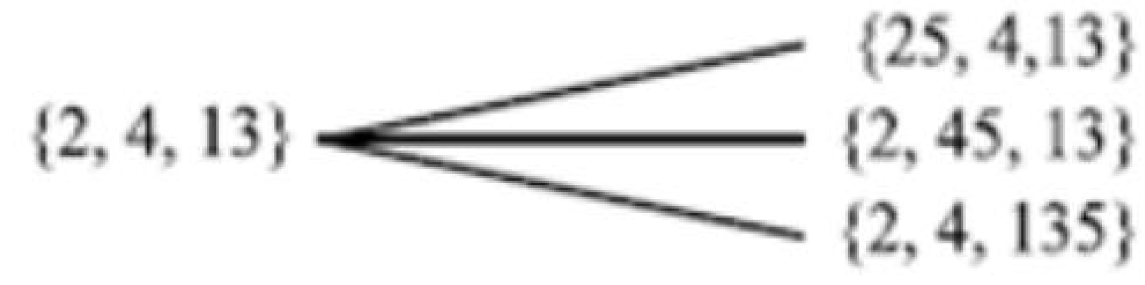
$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k.S(n-1,k)$$

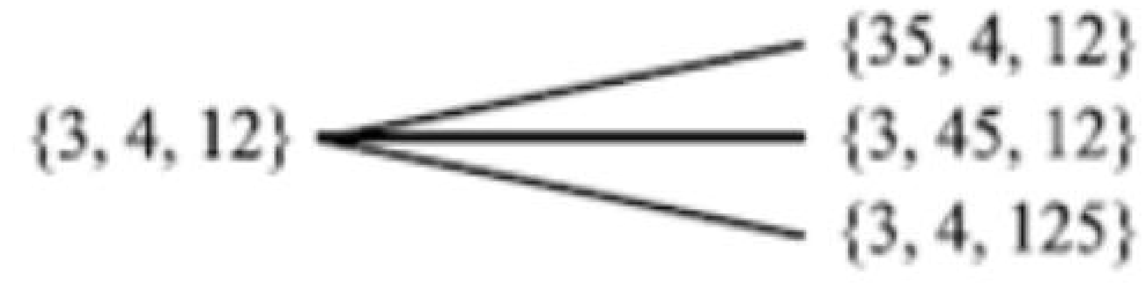












الـ $S(4,3)$ جزءاً من [4] المكونة من ثلاث أجزاء

الأجزاء من [5] المكونة من ثلاث أجزاء مع عدم وجود العدد 5 منفرداً في أي جزء

الشكل 2.5: عدّ تجزئات [5] إلى 3 أجزاء.

إثبات توافقي: كم عدد التقسيمات التي يمكن تكوينها من $[n]$ مكونةً من k كتلة؟

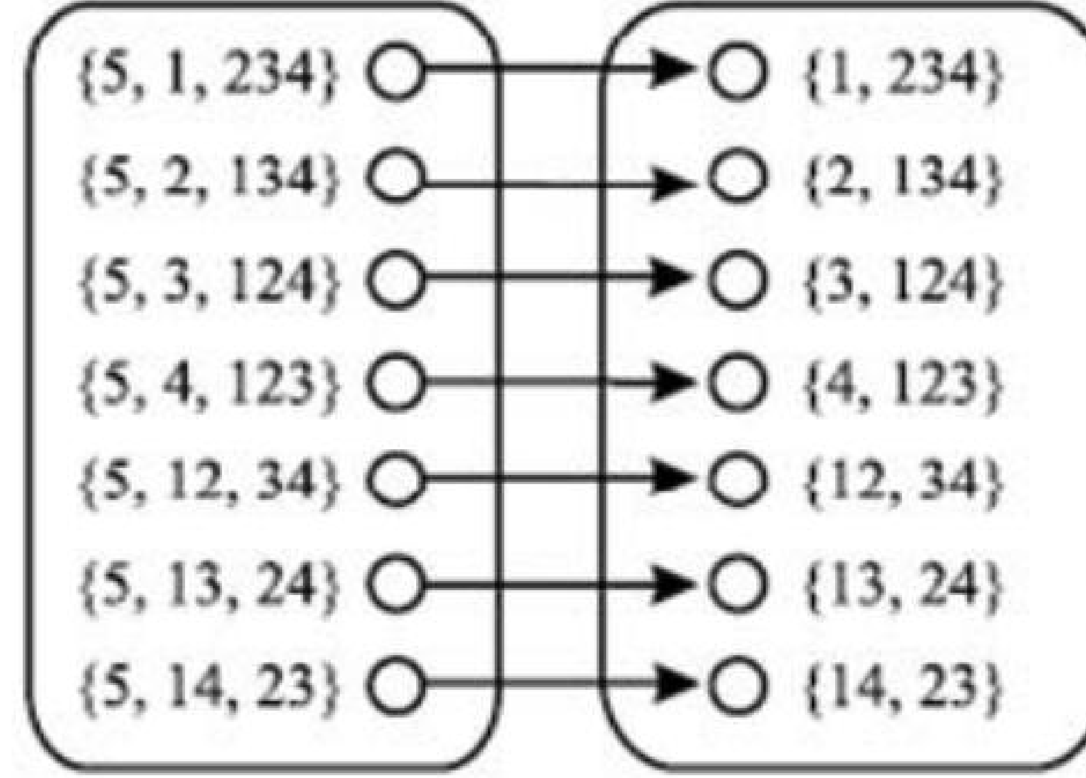
الإجابة 1: يوجد $S(n, k)$.

الإجابة 2: سنعتمد على ما إذا كان العنصر n وحيداً في كتلة. إذا كان كذلك، فإنه يمكن تكوين تلك التقسيمات من خلال تحديد تقسيم من $n - 1$ والمكون من $k - 1$ من العناصر أولاً ثم إضافة الكتلة $\{n\}$ وبذلك يكون هنالك $S(n - 1, k - 1)$ من تلك التقسيمات.

إذا لم يكن العنصر n وحيداً في كتلة، فإنه يمكن تكوين كل تلك التقسيمات من خلال تحديد تقسيم من

$n - 1$ والمكون من k من العناصر أولاً ثم وضع n في واحدة من الكتل k مجموعة وباستخدام مبدأ الضرب، يكون هنالك $S(n - 1, k).k$ من تلك التقسيمات.

أخيراً، وباستخدام مبدأ الجمع، فإن هنالك $S(n - 1, k - 1) + k.S(n - 1, k)$ تقسيماً ككل.



الأجزاء $S(4,2)$ من المجموعة [4] من جزئين

الأجزاء من [5] المكونة من ثلاث أجزاء مع وجود العدد 5 منفردا في كل مجموعة

تسمح المتطابقة الأخيرة أعلاه بحساب **مثلث ستيرلينغ من النوع الثاني**، وهو مصفوفة مثلثة مكونة من الأعداد غير الصفرية $S(n,k)$ لـ $0 \leq k \leq n$ ونوضح فيما يلي أول ثمانية صفوف في هذه المصفوفة:

$n \downarrow$ $k \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
7	0	1	63	301	350	140	21	1

(2.7)

العدد في الصف n والعمود k هو $S(n,k)$ وحسابه يشبه الحساب المستخدم في مصفوفة باسكال لكن كل عدد يساوي العدد المجاور له من الجهة الشمالية الغربية مضافاً إليه k ضعف من العدد المجاور له من الجهة الشمالية حيث k هو رقم العمود.

السؤال 78: باستخدام متطابقة المبرهنة 3.12.، ما هو الصف الثامن (أي $n = 8$) في مثلث ستيرلينغ؟ وما هي أعداد بيل $B(6)$ و$B(5)$؟

متطابقة أخرى تشتمل على أعداد ستيرلينغ

لاشتقاق متطابقة أخرى، دعنا نقوم بتكوين تقسيم من n يتكون من k من الكتل كما يلي. يجب أن يقع العنصر n في كتلة من إحدى التقسيمات، لذلك سنعتمد على عدد العناصر باستثناء n في هذه الكتلة. إذا كان عدد العناصر هو j (حيث $0 \leq j \leq n-1$) فإننا نستطيع تحديد هذه العناصر بـ $\binom{n-1}{j}$ طريقة؛ ولكل طريقة نستطيع أن نقسم العناصر المتبقية $n-j-1$ إلى $k-1$ من الكتل بـ $S(n-j-1,k-1)$ طريقة. وبالتالي فإنه، وباستخدام مبدأ الضرب، فإنه يوجد $\binom{n-1}{j}.S(n-j-1,k-1)$ تقسيماً لتلك القيمة من j. بالجمع لجميع قيم j نثبت المبرهنة التالية:

المبرهنة 2.3.2: إذا كانت $k \geq 1$ و $n \geq 1$، فإن:

$$S(n,k) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} . S(n-j-1, k-1)$$

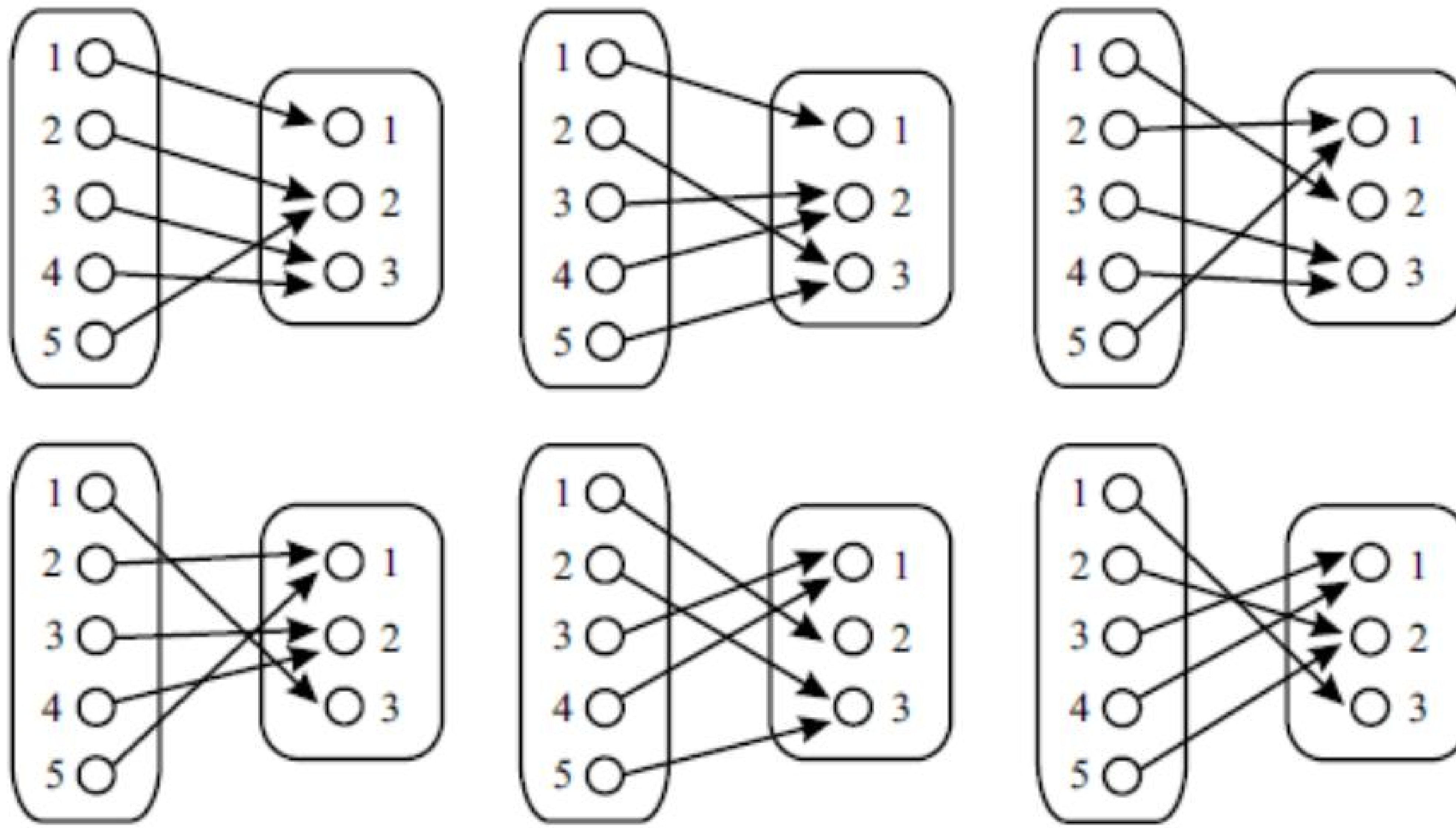
السؤال 79: استخدم المبرهنة ومثلث ستيرلينغ لإثبات أن $S(7,5) = 140$.

متطابقة أعداد بيل

ينتج عن تطبيق فكرة المبرهنة السابقة المتطابقة التالية لأعداد بيل:

المبرهنة 3.32.: إذا كانت $n \geq 1$، فإن:

$$B(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \times B(j)$$



الشكل2.6: الـ !3 دوال شاملة المشتقة من التقسيم $\{\{1\}, \{2,5\}, \{3,4\}\}$

إثبات توافقي: كم عدد التقسيمات في $[n]$؟

الإجابة 1: يوجد $B(n)$ تقسيماً.

الإجابة 2: رتب التقسيمات $[n]$ في متراكمات تبعاً لعدد العناصر غير الموجودة في الكتلة n. افترض أن هذا العدد هو j، حيث $0 \leq j \leq n-1$، حينئذٍ يكون هنالك $\binom{n-1}{j}$ طريقة لتحديد تلك الـ j عنصر، و$B(j)$ طريقة لتحديد التقسيم، من كتلة من تلك الـ j عنصر. وتقع العناصر المتبقية في الكتلة n. وباستخدام مبدأ الضرب، يكون هنالك $\binom{n-1}{j} . B(j)$ تقسيماً في هذه المتراكمة وبالجمع لجميع عناصر j تكون النتيجة النهائية.

السؤال 80: استخدم المبرهنة 3.32. لحساب $B(9)$.

عدّ الدوال الشاملة

نستطيع، باستخدام أعداد ستيرلينغ، أن نغلق النهاية المفتوحة في القسم 2.1 باستخراج صيغة لعدد الدوال الشاملة وسنبدأ فيما يلي بحالة خاصة لعدّ الدوال الشاملة لـ $[5] \to [3]$.

أولاً، قسّم [5] إلى ثلاث كتل بـ $S(5,3) = 25$ طريقة. تأمل واحداً من هذه التقسيمات وليكن $\{1, 25, 34\}$. ابنِ الدوال الشاملة من هذا التقسيم كالتالي: اختر قيمة لـ $f(1)$ بثلاث طرق، ثم اختر قيمة مشتركة لـ $f(5)$و $f(2)$ بطريقتين، ثم اختر قيمة مشتركة لـ $f(4)$و $f(3)$ بطريقة واحدة. تظهر الـ $3! = 6$ دوال المشتقة من التقسيم في الشكل 62.. في هذه الحالة، يكون هنالك:

$$S(5,3).3! = 6.25 = 150$$

دالةً شاملة لـ $[5] \to [3]$.

السؤال 81: كم عدد الدوال الشاملة لـ $[7] \to [4]$؟

بشكل عام، لعد الدوال الشاملة $[n] \to [k]$، نقوم أولاً بتقسيم $[k]$ إلى n من كتلة بـ $S(n,k)$ طريقة، ثم نقوم باختيار قيمة ناتجة مختلفة لكل من الـ n كتلة بـ $n!$ طريقة، وباستخدام مبدأ الضرب يكون هنالك $S(n,k).n!$ دالةً شاملاً.

المبرهنة 3.42.: إذا كانت $n \geq 1$ و $k \geq 1$، فإن عدد الدوال الشاملة لـ $[n] \to [k]$ يساوي

$n!$ و $S(k,n)$.

عودة إلى التوزيعات

نستطيع الآن أن نملأ جدول مسائل التوزيعات كاملاً ما عدا الصف الأخير.

عدد توزيعات k من الأشياء المتميزة على n من المستقبلات المتميزة بحيث يحصل كل مستقبل على شيء واحد على الأقل يساوي عدد الدوال الشاملة لـ$[n] \to [k]$، وهذا يساوي $S(n,k).n!$.

هنالك $S(n,k)$ توزيع لـ k من الأشياء المتميزة على n من المستقبلات المتماثلة بحيث يحصل كل مستقبل على شيء واحد على الأقل. إذا أسقطنا متطلب الحصول على شيء واحد على الأقل، يكون هنالك $\sum_{i=1}^{n} S(k,i)$ توزيعاً. الإجابتيين الأخريين في الصف الثالث بديهيتين. خذ على سبيل المثال توزيع k من الأشياء المتميزة على n من المستقبلات المتماثلة بحيث يحصل كل مستقبل على شيء واحد على الأكثر. إذا كانت $k \leq n$ فإن ذلك يكون ممكناً ولكن بطريقة واحدة؛ كأن تضع كل واحدة من الـ k كرة في صندوق مختلف؛ أما إذا كانت $k > n$ فإن ذلك ليس ممكناً.

توزيعات		**كم عدد العناصر التي يمكن للمستقبلات تلقيها**			
k عنصر	**على n مستقبل**	بدون شروط	≥ 1	≤ 1	$= 1$
متميزة	متميزة	n^{k}	$(n)_{k}$	$S(k,n).n!$	0 أو $n!$
متطابقة	متميزة	$\left(\binom{n}{k}\right)$	$\binom{n}{k}$	$\left(\binom{n}{k-n}\right)$	1 أو 0
متميزة	متطابقة	$\sum_{i=1}^{n} S(k,i)$	1 أو 0	$S(k,n)$	1 أو 0
متطابقة	متطابقة	؟	؟	؟	؟

ملخّص

في هذا القسم، قمنا بدراسة التوزيعات لأشياء متميزة على مستقبلات متماثلة. هذه التوزيعات تكافئ مجموعة التقسيمات وأعداد ستيرلينغ من النوع الثاني $S(n,k)$ تساوي عدد التقسيمات لـمجموعة مكونة من n عنصر بحيث تتكون تلك التقسيمات من k كتلة. أعداد بيل $B(n)$ المتعلقة بذلك تساوي العدد الكلي للتقسيمات للمجموعة ذات الـ n عنصر. أعطينا أمثلة عديدة لإثباتات توافقية تتضمن أعداد ستيرلينغ وأعداد بيل وأوجدنا أيضاً صيغة لعدد الدوال الشاملة بدلالة أعداد ستيرلينغ.

تمارين

1. كم عدد الطرق لترتيب 20 كتاباً مختلفاً في ثلاث متراكمات؟ في ثلاث متراكمات على الأكثر؟ استخرج إجابات عددية دقيقة.

2. لأي عدد صحيح $n \leq 2$، كم عدد الدوال الشاملة الممكنة لـ $[n] \to [n-1]$ ؟ أعطِ صيغة لا تحتوي على أعداد ستيرلينغ.

3. كم عدد الدوال الشاملة الممكنة لـ $[8] \to [5]$؟ استخرج إجابات عددية دقيقة.

4. كم عدد الدوال الشاملة لـ $[7] \rightarrow [9]$ والتي لديها عنصر واحد مرتبط بـ 7؟ استخرج إجابات عددية دقيقة.

5. سمّ الدالة بـ "تقريباً شامل" إذا كان يفتقد إلى عنصر واحد تماماً من مداه. (أي أن، $f: A \rightarrow B$ هو تقريباً شامل إذا كان هنالك تماماً b واحدة $\ni B$ بحيث إن $f^{-1}(b) = \emptyset$)

كم عدد الدوال الممكنة والـ " تقريباً شاملة " لـ $[n] \rightarrow [k]$؟

6. كم عدد الأجزاء لـ $[10]$ والتي لديها كتلة واحدة بالتحديد مكونة من خمسة عناصر؟ استخرج إجابات عددية دقيقة.

7. جد عدد ارتباطات التكافؤ لـمجموعة مكوّنة من n عنصر.

8. أعطِ إثباتاً تقابلياً: إذا كانت $n \geq 1$، فإن $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$.

افعل ذلك من خلال إنشاء تقابل بين أجزاء $[n]$ المكونة من عنصرين والمجموعات الجزئية غير الخالية والمأخوذة من $[n-1]$.

9. أعطِ إثباتاً تقابلياً: إذا كانت $n \geq 1$، فإن $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$.

افعل ذلك من خلال إنشاء تقابل بين أجزاء $[n]$ المكونة من عنصرين والمجموعات الجزئية المكونة من عنصرين والمأخوذة من $[n]$.

10. ليكن $f: A \to B$ دالةً. أثبت أن المجموعة $\{f^{-1}(b): b \in rng(f)\}$ هي جزء من A. (تذكر أن: $f^{-1}(b) = \{a \in A: f(a) = b\}$ هي الصورة المعكوسة من b).

11. أعطِ إثباتاً توافقياً: إذا كانت $n \geq 1$ و $k \geq 1$، فإن:

$$S(n,k) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} S(i,k-1)$$

12. اشرح كيف يمكن اشتقاق المعادلة التالية جبرياً من المتطابقة الواردة في المبرهنة 3.12.، ثم أعطِ إثباتاً توافقياً.

$$S(n,k) = S(n-2,k-2) + (2k-1)S(n-2,k-1) + k^2S(n-2,k)$$

13. أعطِ إثباتاً توافقياً: إذا كانت $n \geq 1$ و $k \geq 1$، فإن:

$$S(n,k) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} S(n-j,k-1)$$

14. فيما يلي برنامج دوري متكرر مكتوب بلغة C لحساب $S(n,k)$ اعتماداً على المبرهنة 2.3.1. يفترض البرنامج أن $n, k \geq 0$.

```
unsigned long S(int n, int k)
{
   if (n == k) return 1;
   else if (n < k) return 0;
   else if (n > 0 && k == 0) return 0;
   else return S(n-1,k-1) + k*S(n-1,k);
}
```

يعمل هذا البرنامج جيداً، وفيه هدر كبير، فسر لماذا؟ ثم صمّم خوارزمية ذات كفاءة أعلى.

15. اشتق الصيغة التالية جبرياً من المعادلة (2.6) والتمرين 11:

$$B(n) = \sum_{j=0}^{n=1} \binom{n-1}{j} B(j)$$

16. أثبت أن المتتالية اللامتناهية التالية تتقارب لأي عدد صحيح موجب كـ n، ثم فسر لم تتقارب لعدد غير نسبي.

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^n}{j!}$$

17. (جبر خطي) حل النظام الخطي الموضح في الأسفل لإيجاد الأعداد a و b و c و d و e التي تجعل معادلة كثير الحدود التالية صحيحة:

$$x^4 = a.(x)_0 + b.(x)_1 + c.(x)_2 + d.(x)_3 + e.(x)_4$$

النظام الخطي $\Leftarrow$ $(x)_4 = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$

و

$$(x)_3 = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

وهكذا، حيث إن $(x)_0 = 1$. اشرح الحل a و b و c و d و e بدلالة أعداد تمت دراستها في هذا القسم.

18. (توزيعات مرتبة) يعتبر هذا التمرين امتداداً للتمرين 16 في القسم 12. . لتكن S مجموعة مكونة من n عنصر. التقسيم المرتب لـ S والمكون من k كتلة هو تقسيم من S مكون من k كتلة ولكن يكون الترتيب فيه مهماً في كل كتلة. على سبيل المثال، الجزء $\{(4,1),(3,6,2),(5)\}$ هو جزء مرتب لـ $[6]$ مكون من 3 مجموعات، هذا الجزء يشبه $\{(4,1),(5),(3,6,2)\}$ لكنه يختلف عن $\{(4,1),(3,2,6),(5)\}$. أيضاً، التقسيم $\{(4,1),(3,2,4,6),(5)\}$ هو تقسيم غير مرتب لـ $[6]$ لأن الكتل غير منفصلة.

ليكن $\beta(k,n)$ يساوي عدد التقسيمات المرتبة، والمكونة من n كتلة، لـمجموعة مكونة من k عنصر:

(أ) اشرح لم يكون $\beta(k,n)$ مساوياً لعدد التوزيعات المرتبة لـ k من الأشياء المتميزة على n من المستقبلات المتماثلة بحيث يحصل كل مستقبل على شيء واحد على الأقل.

(ب) كم عدد التوزيعات المرتبة لـ k من الأشياء المتميزة على n من المستقبلات المتماثلة؟

(ج) أثبت أن $\beta(k,n)=\frac{k!}{n!}\binom{k-1}{n-1}$.

19. (توزيعات مرتبة) أعطِ إثباتات توافقية لكل من المتطابقات التالية:

(أ) $\beta(k,n)=\binom{k}{n}(k-1)_{k-n}$

(ب) $\beta(k,n) = \beta(k-1,n-1) + (k+n-1).\beta(k-1,n)$

ملاحظات

يعتبر جيمس ستيرلينغ (James Stirling) (1692–1770) أول من درس الأعداد $S(k,n)$ ولكن ليس ضمن سياق مجموعة التقسيمات حيث كان اهتمام ستيرلينغ منصباً على الخصائص الجبرية أكثر من الخصائص التوافقية للأعداد، وقد قمنا بالكشف عن بعض تلك الخصائص في القسم 4.3. يقترح الاسم "أعداد ستيرلينغ من النوع الثاني" أن هناك أعداد ستيرلينغ من النوع الأول وهذا ما يجب أن نطلع عليه أيضاً في القسم 43. النتيجة التالية تم اكتشافها من قبل ستيرلينغ عام 1730 وتُعرف باسم **تقريب ستيرلينغ** (Stirling Approximation) أو **صيغة ستيرلينغ** (Stirling's Formula):

$$n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

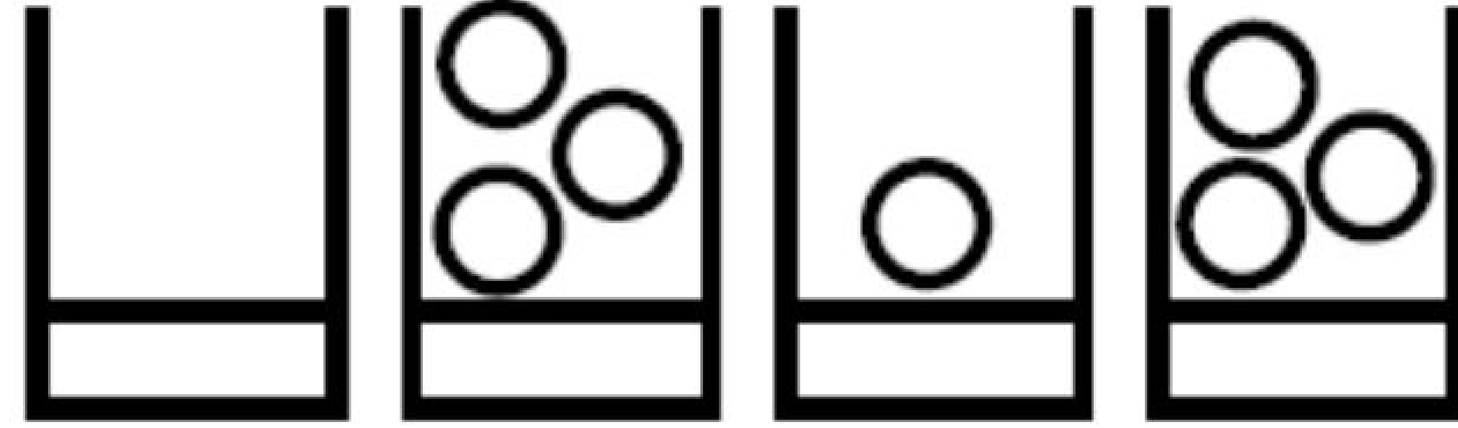
أما أعداد بيل فقد تمت تسميتها كذلك نسبة إلى العالم إيريك تيمبل بيل (Eric Temple Bell) (1883–1960) والتي أطلق عليها اسم الأعداد الأسية (Exponential Numbers).

24. عدّ تقسيمات الأعداد الصحيحة

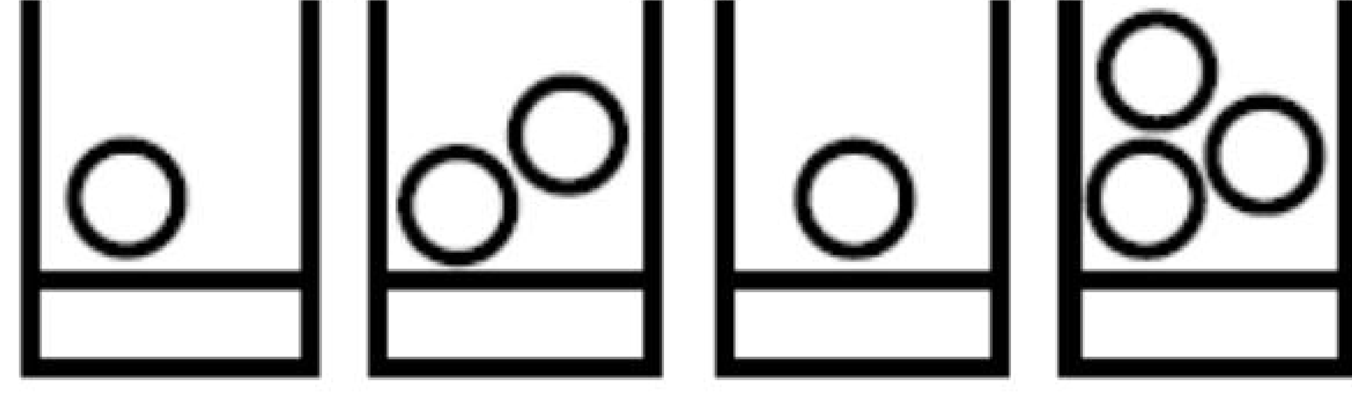
سنقوم بدراسة آخر نوع من مسائل التوزيع وهو توزيع أشياء متماثلة على مستقبلات متماثلة. يعتبر هذا النوع، من بين الـ 16 نوعاً مختلفاً من مسائل التوزيع التي تطرقنا لها، الأصعب في التوصل إلى صيغ مغلقة الشكل. تتوافق مثل هذه التوزيعات مع نوع مختلف من التقسيم عن ذلك الذي قمنا بدراسته في القسم السابق ويسمى بـ "تقسيم العدد الصحيح" وسنقوم في هذه الفصل بدراسة بعض الخصائص التوافقية للأعداد الخاصة بتقسيم الأعداد الصحيحة وسنتطرق لها مرة أخرى في القسم 4.4.

تقسيمات الأعداد الصحيحة كتوزيعات

نوضح في الشكل التالي توزيعاً لـسبعة أشياء متماثلة على أربعة مستقبلات متماثلة.



نستطيع التعبير عن هذا الشكل بالمجموعة المتعددة $\{1,3,3\}$. لاحظ أن ترتيب العناصر في المجموعة غير مهم لأن الأشياء والمستقبلات متماثلة. فيما يلي توزيع لسبعة أشياء متماثلة على أربعة مستقبلات متماثلة بحيث يحصل كل مستقبل على شيء واحد على الأقل.



يتوافق هذا التوزيع مع المجموعة المتعددة $\{3, 2, 1, 1\}$.

في أي من التوزيعين أعلاه، تتكون المجموعة المتعددة المطابقة له من أعداد صحيحة موجبة مجموعها 7. لأي عدد صحيح موجب مثل n و k، تقسيم n والمكون من k جزء هي المجموعة المتعددة المكونة من k عدد صحيح موجب والتي يكون مجموعها مساوياً لـ n. عناصر المجموعة المتعددة هي **الأجزاء** المكونة لذلك التقسيم، لذلك فإن $\{3, 3, 1\}$ هو تقسيم 7 إلى ثلاثة أجزاء و$\{3, 2, 1, 1\}$ هو تقسيم 7 إلى أربعة أجزاء ومن المعروف والملائم أن تكتب هذه التقسيمات كما يلي:

$3 + 2 + 1 + 1$

$3 + 3 + 1$ و

وذلك للتأكيد على أن مجموع الأجزاء يساوي العدد الصحيح الذي تتم تقسيمه. عموماً، يتم ترتيب الأجزاء بصورة غير متزايدة من اليسار إلى اليمين ولكن هذا لا يعد ضرورياً. على سبيل المثال، فإن كلاً من $1 + 3 + 3$ و $3 + 1 + 3$ و $3 + 3 + 1$ تمثل نفس التقسيم للعدد 7 إلى ثلاثة أجزاء.

السؤال 82: عدد خمسة تقسيمات لـ 10 مكونة من 4 أجزاء.

من المألوف أن يتم ببساطة ذكر تقسيم المجموعات وتقسيم الأعداد الصحيحة كـ "تقسيم" فقط لأن نوع ذلك التقسيم يجب أن يكون واضحاً من السياق.

الأعداد الخاصة بتقسيم الأعداد الصحيحة

لعد تقسيمات الأعداد الصحيحة، سنعرف $P(n,k)$ كعدد تقسيمات العدد الصحيح n إلى k جزء، اعتماداً على مشاهداتنا السابقة حول التوزيعات؛ فإن $P(n,k)$ يساوي:

1. عدد تقسيمات n إلى k جزء.

2. عدد التوزيعات لـ n من الأشياء المتماثلة على k من المستقبلات المتماثلة بحيث يحصل كل مستقبل على شيء واحد على الأقل.

لاحظ أن عدد التوزيعات لـ k من الأشياء المتماثلة على n من المستقبلات المتماثلة بحيث يحصل كل مستقبل على شيء واحد على الأقل هو $P(k,n)$ وليس $P(n,k)$ ولاحظ أيضاً أن $P(0,0) = 1$.

السؤال 83: باستخدام التقسيمات أو التوزيعات تبعاً لاختيارك، اشرح لِمَ $P(0,k) = 0$ لـ $k \geq 1$ و $P(n,0) = 0$ لـ $n \geq 1$.

ثمة طريقة أخرى لتوضيح التقسيم باستخدام متجه نوعي (Type Vector).

على سبيل المثال، متجه نوع التقسيم $3 + 3 + 4 + 5 + 6$ للعدد الصحيح 21 هو $[1^0 2^0 3^2 4^1 5^1 6^1]$.

بشكل عام، يتوافق متجه النوع $[1^{P1} 2^{P2} \dots m^{Pm}]$ مع التقسيم الذي لديه p_1 من الأجزاء ذات الطول 1 وp_2 من الأجزاء ذات الطول 2 وهكذا بحيث ترمز الأسس في المتجه إلى عدد مرات تكرار الجمع وليس إلى عملية ضرب. الجزء الذي يتم تقسيمه هو $\sum_{j=1}^{m} j.p_j$ وعدد الأجزاء في التقسيم هو $\sum_{j=1}^{m} p_j$. من المألوف جعل متجه النوع فقط مساوياً لطول الجزء الأكبر في التقسيم، ليكن m، أو بطريقة أخرى، مساوياً لطول العدد الصحيح الذي يتم تقسيمه.

السؤال 84: لمتجه النوع $[1^5 2^1 3^0 4^2 5^0 6^0 7^3]$، ما هو العدد الصحيح الذي تتم تقسيمه؟ كم عدد الأجزاء في هذا التقسيم؟

الأعداد الخاصة بتقسيم العدد الصحيح باستخدام التعداد الكامل

دعنا نقوم بحساب $P(6, k)$ لـ $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. يوضح الشكل التالي جميع تقسيمات العدد 6 إلى k من الأجزاء لـ $k = 1, 2, 3, 4$.

$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
6	$5+1$	$4+1+1$	$3+1+1+1$
	$4+2$	$3+2+1$	$2+2+1+1$
	$3+3$	$2+2+2$	

لذلك فإن $P(6,1) = 1$ و $P(6,2) = P(6,3) = 3$ و $P(6,4) = 2$.

التقسيم الوحيد لـ 6 إلى خمسة أجزاء هي $2 + 1 + 1 + 1 + 1$ والتقسيم الوحيد لـ 6 إلى ستة أجزاء هي

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ لذلك $P(6,5) = P(6,6) = 1$. لاحظ أنه لا يوجد علاقة بين عدد تقسيمات العدد الصحيح 6 والمكونة من جزئين (وهي ثلاثة تقسيمات) وعدد تقسيمات المجموعة [6] والمكونة من جزئين (وهي $S(6,2) = 31$).

السؤال 85: جد $P(7,k)$ لـ $k = 1,2,3,4,5,6,7$ باستخدام التعداد الكامل.

جميع تقسيمات العدد الصحيح

سنعرف $P(n)$ كعدد التقسيمات للعدد الصحيح n وهذا يعني تقسيمات بأي طول. على سبيل المثال، نستطيع إيجاد $P(6)$ كالتالي:

$$\begin{aligned} P(6) &= P(6,1) + P(6,2) + P(6,3) + P(6,4) + P(6,5) + P(6,6) \\ &= 1 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 \end{aligned}$$

لذلك فإن $P(6) = 11$. بشكل عام، لدينا:

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} P(n,k) \qquad \text{لكل} \quad n \geq 1$$

السؤال 86: ما قيمة $P(7)$ ؟

ماذا عن الصيغ؟

إن الصيغ الخاصة بـ $P(n,k)$ أو $P(n)$ أصعب للاستنتاج من صيغ $S(n,k)$ أو $B(n)$. سنثبت في القسم 44. أن $P(n,3)$ يساوي العدد الصحيح الأقرب لـ $n^2/_{12}$ أما الصيغ الخاصة بـ $P(n,4)$ و$P(n,5)$ فإنه يمكن اشتقاقها ولكن بشكل أصعب. إن العديد من النتائج المعروفة عن $P(n,k)$ أو $P(n)$ تشتمل على حدود أو صيغ تقريبية.

صيغ لحالات خاصة

نلاحظ أولاً أن $P(n,1) = P(n,n-1) = P(n,n) = 1$.

السؤال 87: أعطِ تبريراً مختصراً للصيغة أعلاه.

لـ $P(n,2)$، دعنا نلقي نظرة على تقسيمات n المكونة من جزئين لـ $n = 6, 7, 8, 9, 10, 11$:

$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	$n=11$
$5+1$	$6+1$	$7+1$	$8+1$	$9+1$	$10+1$
$4+2$	$5+2$	$6+2$	$7+2$	$8+2$	$9+2$
$3+3$	$4+3$	$5+3$	$6+3$	$7+3$	$8+3$
		$4+4$	$5+4$	$6+4$	$7+4$
				$5+5$	$6+5$

إن هذا يقترح أن $P(n,2)$ يساوي تقريباً لـ $n/_2$ وبشكل أدق يكون لدينا التالي:

$$P(n,2) = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$$

إثباتات توافقية

تحقق الأعداد $P(n,k)$، كما هو الحال لأعداد ستيرلينغ من النوع الثاني $S(n,k)$، العديد من المتطابقات مدعومةً بإثباتات توافقية أو تقابلية ممتعة.

إحدى المتطابقات

خذ مثلاً تقسيمات العدد n إلى k جزء. كل تقسيم فيه (1) أصغر جزء يساوي 1 أو (2) أصغر جزء يساوي عدد معين أكبر من 1 ومن خلال عد التقسيمات لكل نوع، ثم جمعها نستطيع إثبات متطابقة تشتمل على $P(n,k)$.

على سبيل المثال، خذ مثلاً الـ $P(10,3)$ تقسيمات للعدد 10 إلى ثلاثة أجزاء.

من بين التقسيمات الأربعة التي يكون فيها أصغر جزء يساوي 1، نستطيع حذف واحد من الواحدات لنحصل على تقسيم للعدد 9 إلى جزئين وهذه العملية تقابلية كالتالي:

$$\begin{array}{lcl} 8+1+1 & \longrightarrow & 8+1 \\ 7+2+1 & \longrightarrow & 7+2 \\ 6+3+1 & \longrightarrow & 6+3 \\ 5+4+1 & \longrightarrow & 5+4 \end{array}$$

يوجد $P(9,2)$ من مثل هذه التقسيمات. من ناحية أخرى، إذا كان الجزء الأصغر هو 2 على الأقل، نستطيع طرح 1 من كل جزء لنحصل على تقسيم لـ $10-3=7$ مكون من ثلاثة أجزاء. مرة أخرى، هذه العملية تقابلية وهي موضحة في الشكل التالي:

$$\begin{array}{lcl} 6+2+2 & \longrightarrow & 5+1+1 \\ 5+3+2 & \longrightarrow & 4+2+1 \\ 4+4+2 & \longrightarrow & 3+3+1 \\ 4+3+3 & \longrightarrow & 3+2+2 \end{array}$$

يوجد $P(7,3)$ من مثل هذه التقسيمات. أثبتنا للتو أن $P(10,3)=P(9,2)+P(7,3)$ والمبرهنة التالية تلخص النتيجة العامة:

مبرهنة 4.12.: إذا كانت $n \geq 1$ و $k \geq 1$، فإن:

$$P(n,k)=P(n-1,k-1)+P(n-k,k)$$

إثبات توافقي: كم عدد تقسيمات العدد n إلى k جزء؟

الإجابة 1: يوجد $P(n, k)$.

الإجابة 2: كل تقسيم فيه (1) أصغر جزء يساوي 1 أو (2) أصغر جزء يساوي 2 على الأقل. للنوع الأول، حذف جزء طوله 1 يُنتج تقسيماً لـ $n - 1$ مكوناً من $k - 1$ جزء وهذا يعد تقابلاً لذلك يوجد $P(n-1, k-1)$ مثل هذه التقسيمات. للنوع الثاني، طرح 1 من كل جزء يُنتج تقسيماً لـ $n - k$ مكوناً من k جزء، وفي هذه الحالة لا يختفي أي جزء في حال كان طوله الأصلي يساوي 2 على الأقل. هذا أيضاً يعد تقابلاً لذلك يوجد $P(n-k, k)$ تقسيماً من النوع الثاني، إجمالي عدد التقسيمات يساوي

$P(n-1, k-1) + P(n-k, k)$ تقسيماً.

على سبيل المثال، يمكننا استخدام ما استنتجناه سالفاً لحساب:

$$P(7,3) = P(6,2) + P(4,3) = 3 + 1 = 4$$

و

$$P(7,4) = P(6,3) + P(3,4) = 3 + 0 = 3$$

السؤال 88: باستخدام المتطابقة، ما هو $P(9,3)$؟ وما هو $P(9,4)$؟

متطابقة ذات صلة

إن الإلهام لمتطابقة أخرى يتأتى من هذه المشاهدة: لتقسيم معين لـ n إلى k جزء، إذا طرحنا 1 من كل جزء؛ فإنه يتبقى تقسيم لـ $n - k$ مكون من k جزء على الأكثر.

على سبيل المثال، قم بطرح 1 من كل من الـ $P(10,3) = 8$ تقسيمات لـ 10 إلى ثلاثة أجزاء وتجاهل الأجزاء الناتجة ذات الطول 0 لينتج ما هو موضح في الشكل التالي:

$$\begin{array}{lcl} 8+1+1 & \longrightarrow & 7 \\ 7+2+1 & \longrightarrow & 6+1 \\ 6+3+1 & \longrightarrow & 5+2 \\ 6+2+2 & \longrightarrow & 5+1+1 \\ 5+4+1 & \longrightarrow & 4+3 \\ 5+3+2 & \longrightarrow & 4+2+1 \\ 4+4+2 & \longrightarrow & 3+3+1 \\ 4+3+3 & \longrightarrow & 3+2+2 \end{array}$$

في الشكل أعلاه وعلى الطرف الأيمن تظهر تقسيمات 7 إلى ثلاثة أجزاء على الأكثر ويوجد $P(7,1) + P(7,2) + P(7,3)$ منها وبذلك نكون قد وضحنا أن:

$$P(10,3) = P(7,1) + P(7,2) + P(7,3)$$

والآن لنلخص ذلك من خلال المبرهنة التالية:

المبرهنة 4.22.: إذا كانت $n \geq 1$ و $k \geq 1$ فإن:

$$P(n,k) = \sum_{j=1}^{k} P(n-k,j)$$

إثبات تقابلي: عرف دالة من مجموعة التقسيمات لـ n إلى k من الأجزاء ومجموعة التقسيمات لـ $n-k$ إلى k من الأجزاء على الأكثر من خلال العملية التالية: اطرح 1 من كل جزء وتجاهل الأجزاء الناتجة ذات الطول 0. هذه الدالة تقابلية

ولذلك، باستخدام مبدأ التقابل، يكون للمجموعتين الطول ذاته. طول المجموعة الأولى يساوي $P(n,k)$ وطول المجموعة الثانية يساوي (باستخدام مبدأ الجمع):

$$P(n-k,1)+P(n-k,2)+\cdots+P(n-k,k)=\sum_{j=1}^{k}P(n-k,j)$$

السؤال 89: احسب $P(9,3)$ باستخدام المبرهنة والتحليل السابق لها.

تتيح المبرهنة حساب مثلث عدد التقسيمات كما هو موضح في الأسفل.

$n\downarrow$ $k\rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	1	1					
4	0	1	2	1	1				
5	0	1	2	2	1	1			
6	0	1	3	3	2	1	1		
7	0	1	3	4	3	2	1	1	
8	0	1	4	5	5	3	2	1	1

العدد في الصف n والعمود k هو $P(n,k)$.

من الممكن أيضاً اشتقاق متطابقة المبرهنة 4.12. جبرياً من متطابقة المبرهنة 4.22. كما يلي:

$$P(n,k) - P(n-1,k-1) = \sum_{j=1}^{k} P(n-k,j) - \sum_{j=1}^{k-1} P((n-1)-(k-1),j)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} P(n-k,j) - \sum_{j=1}^{k-1} P(n-k,j)$$

$$= P(n-k,k)$$

ولذلك فإن $P(n,k) = P(n-1,k-1) + P(n-k,k)$.

باستخدام متجه النوع

يمكّننا مفهوم متجه النوع من جعل الإثبات التقابلي دقيقاً. في النظرية التالية، التقابل هو الدالة التي تضيف جزءاً طوله 1 إلى التقسيم.

المبرهنة 4.32.: إذا كانت $n \geq 1$، فإن عدد التقسيمات لـ n يساوي عدد التقسيمات لـ $n+1$ التي يكون أصغر جزء فيها يساوي 1.

إثبات تقابلي: لتكن A مجموعة التقسيمات لـ n و B هي مجموعة التقسيمات لـ $n+1$ والتي يكون أصغر جزء فيها يساوي 1. عرّف الدالة $f: A \to B$ كالتالي:

$$f([1^{P1}2^{P2} \dots n^{Pn}]) = [1^{P1+1}2^{P2} \dots n^{Pn}]$$

أي أن f يأخذ تقسيماً لـ n ويضيف لها جزءاً طوله 1.

واحد لواحد: لتكن $[1^{P1}2^{P2} \dots n^{Pn}]$ و $[1^{q_1}2^{q_2} \dots n^{q_n}]$ تجزئات في المجموعة A، وافترض أن:

$$f([1^{p1}2^{p2} \dots n^{pn}]) = f([1^{q_1}2^{q_2} \dots n^{q_n}])$$

هذا يعني أن $[1^{p1+1}2^{p2} \dots n^{pn}] = [1^{q_1+1}2^{q_2} \dots n^{q_n}]$ وبالتالي (بتساوي الأسس) فإن $p_i = q_i$

لجميع قيم i. لذلك فإن $[1^{p1}2^{p2} \dots n^{pn}] = [1^{q_1}2^{q_2} \dots n^{q_n}]$.

شامل: لتكن $[1^{q_1}2^{q_2} \dots n^{q_n}]$ في المجموعة B . لاحظ أن هذا التقسيم لـ $n+1$ بجزء واحد على الأقل طوله 1، ولذلك لا يمكن أن تحتوي على أية أجزاء من الطول $n+1$. (أي أننا بررنا إنهاء متجه النوع عند n^{q_n}). لأن $q_1 \geq 1$، يتوافق متجه النوع $[1^{q_1-1}2^{q_2} \dots n^{q_n}]$ مع تجزئة لـ n ولذلك فإنه يكون في المجموعة A . وعلاوة على ذلك فإن:

$$f([1^{q_1-1}2^{q_2} \dots n^{q_n}]) = \left[1^{(q_1-1)+1}2^{q_2} \dots n^{q_n}\right] = [1^{q_1}2^{q_2} \dots n^{q_n}]$$

لذلك فإن f هو دالة شامل.

عودة إلى التوزيعات

نستطيع الآن إكمال الجدول الخاص بمسائل التوزيع. هنالك $P(k,n)$ توزيعاً لـ k من الأشياء المتماثلة على n من المستقبلات المتماثلة بحيث يحصل كل مستقبل على شيء واحد على الأقل وإذا أسقطنا الشرط "شيء واحد على الأقل"، يكون هنالك

$\sum_{i=1}^{n} P(k,i)$ توزيعاً. لاحظ أن التوزيعين المتبقيين في الصف الأخير في الجدول بديهيّان.

توزيعات		كم عدد العناصر التي يمكن للمستقبلات تلقيها			
k عنصر	**على n مستقبل**	بدون شروط	≥ 1	≤ 1	$= 1$
متميزة	متميزة	n^{k}	$(n)_{k}$	$S(k,n) \times n!$	0 أو $n!$
متطابقة	متميزة	$\left(\binom{n}{k}\right)$	$\binom{n}{k}$	$\left(\binom{n}{k-n}\right)$	1 أو 0
متميزة	متطابقة	$\sum_{i=1}^{n} S(k,i)$	1 أو 0	$S(k,n)$	1 أو 0
متطابقة	متطابقة	$\sum_{i=1}^{n} P(k,i)$	1 أو 0	$P(k,n)$	1 أو 0

ملخّص

أكملنا في هذا القسم تصنيفنا ودراستنا لمسائل التوزيع من خلال دراستنا لتوزيع أشياء متماثلة على مستقبلات متماثلة حيث يتم عدها باستخدام الأعداد الخاصة بتقسيم العدد الصحيح. العدد $P(n,k)$ يساوي عدد التقسيمات لـلعدد الصحيح n إلى k من الأجزاء، حيث إن كل تقسيم هو مجموعة متعددة مكونة من k عدد صحيح موجب يكون مجموعها مساوياً لـ n. من الصعب الحصول على صيغة مغلقة لـ $P(n,k)$؛ لكننا أوجدنا صيغاً لحالات خاصة واستخدمنا إثباتات توافقية لتكوين بعض المتطابقات.

تمارين

1. إذا كان لديك 40 قطعة من الحلوى ستوزعها على عشرة أطفال، جد عدد الطرق الممكنة لتوزيعها في كل من الحالات التالية، ودوّن إجاباتك برموز موحدة:

(أ) قطع الحلوى مختلفة وسيحصل كل طفل على قطعة واحدة على الأقل.

(ب) قطع الحلوى غير متميزة وسيحصل كل طفل على أي عدد من القطع.

(ج) قطع الحلوى مختلفة ولكنها ستوزع على 10 حقائب ورقية غير متميزة.

(د) قطع الحلوى غير متميزة لكنك ستوزعها على 10 حقائب ورقية غير متميزة بحيث تحتوي كل حقيبة على قطعة واحدة على الأقل.

(ه) قطع الحلوى مختلفة لكن سيحصل كل طفل على قطعة واحدة على وجه التحديد، لذلك سيتبقى هنالك بعض القطع.

(و) قطع الحلوى مختلفة وسيحصل فرانك على أربع قطع.

2. استخدم المتجهات النوعية لإنشاء تقابل (تم ذكره في إثبات المبرهنة 4.12.) بين تقسيمات n إلى k من الأجزاء بحيث يكون أصغر جزء مساوياً لـ 1 على الأقل وتقسيمات $n-1$ إلى $k-1$ من الأجزاء.

3. استخدم المتجهات النوعية لإنشاء تقابل (تم ذكره في إثبات المبرهنة 4.12.) بين تقسيمات n إلى k من الأجزاء بحيث يكون أصغر جزء مساوياً لـ 2 على الأقل وتقسيمات $n-k$ إلى k من الأجزاء.

4. استخدم المتجهات النوعية لإنشاء التقابل في المبرهنة 2.4.2.

5. جد وأثبت صيغة لـ $P(n,n-2)$ لـ $n \geq 3$.

6. اشرح كيف يمكن اشتقاق المتطابقة $P(n,2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ جبرياً من متطابقة المبرهنة 2.4.1.

7. ما هي الشروط على n و k التي تجعل الجملة التالية صحيحة:

$$P(n,k) = P(n-1,k-1)$$

8. أعطِ إثباتاً تقابلياً لما يلي: عدد التقسيمات لـ n يساوي عدد التقسيمات لـ $2 \times n$ مكونة من n جزء.

9. وضحنا كيف نستخدم المبرهنة 4.22. لإثبات المبرهنة 4.12. . قم الآن باستخدام المبرهنة 4.12. لإثبات المبرهنة 2.4.2.

10. أثبت ما يلي باستخدام المتجهات النوعية: عدد التقسيمات لـ n إلى k جزء يساوي عدد التقسيمات لـ n والتي يكون فيها الجزء الأكبر مساوياً لـ k.

11. ما هو سؤال العدّ الذي يعطي جواب؟

12. أثبت أن $P(n+2) + P(n) \geq 2.P(n+1)$.

13. لتكن $Q(n,k)$ ترمز إلى عدد التقسيمات n إلى k من الأجزاء المتميزة. على سبيل المثال، $Q(8,3) = 2$ لأن التقسيمات ذات الصلة هي $5 + 2 + 1$ و $4 + 3 + 1$.

(أ) اشتق وأثبت متطابقة لـ $Q(n,k)$ بشكل مشابه لتلك الواردة في المبرهنة 4.12. سابقاً.

(ب) احسب $Q(n,k)$ لـ $0 \leq n،k \leq 8$ باستخدام المتطابقة الواردة في الفرع السابق.

(ج) اشتق وأثبت الصيغة لـ $P(n,k)$ بدلالة الأعداد $Q(.,.)$.

ملاحظات

كما في العديد من مجالات الرياضيات، فإن بعض النتائج الأولى المهمة تعود إلى العالم ليونارد أويلر (1707–1783). إثبات أويلر الشهير (في سنة 1740) أن عدد التقسيمات لـ n إلى أجزاء مختلفة يساوي عدد التقسيمات لـ n إلى أجزاء فردية أسس لتقسيمات العدد الصحيح التي تستحق الدراسة. لكن، ما هو مهم أكثر أن أويلر اخترع أساساً مفهوم تكوين الدوال في أثناء إثباته لذلك. سنقوم بدراسة تكوين الدوال في الفصل 3 وهي واحدة من أهم الأدوات المستخدمة في الرياضيات التوافقية. سنتطرق إلى إثبات يولر في القسم 43. . ألقِ نظرة على دونهام (Dunham) (1999) للاطلاع على القصة المثيرة لاكتشاف أويلر.

تعد أشكال فيرير (Ferrer's Diagrams) تمثيلات مرئية مفيدة لتقسيمات العدد الصحيح وسوف نتطرق لها في القسم 4.4.

الفصل الثالث

أدوات جبرية

سنغطي في هذا الفصل ثلاث أدوات مهمة: الاحتواء - الاستثناء (Inclusion-Exclusion)، والاستقراء الرياضي، والدوال المولّدة (Generating Functions). وسبب تسميتها بالأدوات الجبرية (Algebraic Tools) أنها على النقيض من طريقتي الاندماج والتناظر المستخدمتين في البرهنة، فهي يمكن أن تقلل من المسائل الاندماجية لتصبح مجرد حسابات جبرية روتينية نسبياً.

3.1 الاحتواء والاستثناء

يعتبر مبدأ الاحتواء والاستثناء بمثابة الأخ الأكبر لصيغ اتحاد المجموعات، مثل:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

و

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &\\ = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| &\\ - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\end{aligned}$$

في هذا القسم، نبيّن كيفية تطبيق مبدأ الاحتواء – الاستثناء لحل بعض مسائل التوافيق: عد القواسم، وعد ما يسمى بـ التشويش (Derangements) وعد الدوال الشاملة، التي يصعب حلّها باستخدام الأدوات التي تعلمّناها لغاية الآن.

إطار عمل لمبدأ الاحتواء – الاستثناء

يتطلب استخدام مبدأ الاحتواء – الاستثناء أمرين ضروريين، سواء كان ذلك ضمنياً أو صريحاً: عالماً من الأشياء [مجموعة إحصائية من العناصر] (Universe) ومجموعة من الخصائص. يرمز للمجموعة الإحصائية بالرمز U، وهي مجرد مجموعة فحسب. يشير المصطلح ["مجموعة إحصائية"] إلى أنها تتضمن أكثر من مجرد عناصر الأشياء التي نرغب بعدّها. يرمز لمجموعة الخصائص بالرمز P، وهي تصف الخصائص التي قد تمتلكها أو لا تمتلكها المجموعة الإحصائية. لو كان عدد الخصائص n فإننا نعبّر عن مجموعة الخصائص على النحو

$$P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$$

من التطبيقات النموذجية لمبدأ الاحتواء – الاستثناء السؤال "كم عدد الأشياء في المجموعة الإحصائية التي ليس لها أي من الخصائص؟" ستساعدك الأمثلة التالية على فهم نوعين من الأسئلة التي ينطبق عليها مبدأ الاحتواء – الاستثناء طبيعياً، وكيفية تحديد المجموعة الإحصائية وخصائصها. سنقوم بحلّ هذه المسائل بالتوازي مع التقدم في هذا القسم.

مثال: عدّ الأعداد الصحيحة في [100] التي لا تقبل القسمة على 2 أو 3 أو 5

كم عدد الأعداد الصحيحة في [100] والتي لا تقبل القسمة على 2 أو 3 أو 5؟

يبدو أن التعداد سيستغرق وقتاً؛ إذ يمكنك كتابة الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100 وشطب مضاعفات 2 و3 و5، ومن ثم عدّ الأعداد المتبقية. هذه الطريقة قابلة للتطبيق، لكنها قد تكون غير فعّالة.

حدّد المجموعة الإحصائية [100] والخصائص التي سنتجنّبها:

U:= [100]

d_2 := "العدد الصحيح الذي يقبل القسمة على 2"

d_3 := "العدد الصحيح الذي يقبل القسمة على 3"

d_5:= "العدد الصحيح الذي يقبل القسمة على 5"

إذن فعدد الأعداد الصحيحة التي لا تقبل القسمة على 2 أو 3 أو 5 مساوٍ لعدد الأعداد الصحيحة في U التي لا تنطبق عليها أي من الخصائص الثلاث.

السؤال 90: كم عدد الأعداد الصحيحة في U التي تنطبق عليها الخاصية d_2 (وخصائص أخرى ربما)؟ كم عدد الأعداد الصحيحة التي تنطبق عليها الخاصيتان d_3 و d_5 (والخاصية d_2 ربما)؟

مثال: عدّ الشيفرات

في نظرية الترميز (Coding Theory)، تُنشِئ شيفرة إبدال الحرف الأوحد (Monoalphabetic Substitution Cipher) رسالةً مرمّزة باستبدال كل رمز في الرسالة الأصلية برمز بديل فريد بهدف الحصول على رسالة مرمزة، على سبيل المثال، إذا كانت الشيفرة:

الرسالة الأصلية: A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

الرسالة المرمزة: W X B D A H J K P R Y Z M L F I S Q C U E G O N V T

وعليه فإن الرسالة MEET ME AT MIDNIGHT تشفّر كـ MAAU MA WU MPDLPJKU. إذن إبدال (W, X, B, …, V, T) من الأحرف الأبجدية الإنجليزية A-Z سيحقق هدف إنشاء الشيفرة.

في مثل هذه الشيفرة، يفضّل عدم وجود حرف ثابت، أي إبدال الحرف بنفسه. لا تنطبق هذه الخاصية على الشيفرة السابقة لأن حرفي D و M ثابتان. كم عدد شيفرات إبدال الحرف الأوحد الممكنة بحيث لا يكون أي حرفٍ ثابتاً؟

حدد المجموعة الإحصائية وخصائصها كما يلي:

U:= مجموعة كافة الإبدالات الممكنة للأحرف A-Z

f_A:= إبدال ثابت للحرف A

f_B:= إبدال ثابت للحرف B

⋮

f_Z:= إبدال ثابت للحرف Z

إذن عدد الشيفرات من دون وجود أحرف ثابتة يساوي عدد الإبدالات في المجموعة U التي لا تنطبق عليها أي من الخصائص 26 [عدد أحرف الألفباء الإنجليزية]

السؤال 91: ما هو حجم المجموعة U؟ كم عدد الإبدالات التي تبقي الحرفين D وM ثابتين (وربما غيرهما من الأحرف)؟

مثال: عدّ الدوال الشاملة [n] → [k]

كم عدد الدوال الشاملة [n] → [k] الممكنة؟ من المعروف أن الدالة f لا "تغفل" أي من العناصر في المجال المقابل [n]. أي أنه، بغض النظر عن العناصر التي تنتمي للمجال المقابل $j \in [n]$ فإنه يوجد دائماً عنصر $i \in [k]$ على الأقل، حيث دالة $f(i) = j$

لعدّ الدوال الشاملة، حدد المجموعة الإحصائية وخصائصها كما يلي:

U:= مجموعة كافة الدوال الممكنة للأحرف [n] → [k]

m_1 := الدالة لا تحوي العنصر $1 \in [n]$

m_2 := الدالة لا تحوي العنصر $[n] \ \in \ 2$

⋮

m_n:= الدالة لا تحوي العنصر $[n] \ \in \ n$

إذن عدد الدوال الشاملة [n] → [k] يساوي عدد الدوال في المجموعة U التي تتضمن أي من خصائص n.

السؤال 92: ما هو حجم المجموعة U؟ كم عدد الدوال التي لا تتضمن العناصر 1 و2 و3 (وربما غيرها)؟

في كل هذه الأمثلة، عليك أن تلاحظ أمرين. الأول أن المجموعة الإحصائية تحوي عناصر أكثر من تلك التي نريد إحصاءها. والثاني هو أن الخصائص تصف المزايا التي لا تمتلكها العناصر التي نريد إحصاءها.

الدوال (J) ≤ N و (J) = N

يمكننا الآن أن نضع مسائل العدّ ضمن إطار الاحتواء – الاستثناء، ونتفحص كيف نجيب عليها. إن المفتاح هو أن نكون قادرين على عد الأشياء التي تمتلك مجموعة جزئية من الخصائص.

في السؤال 90، عددنا الأعداد الصحيحة في المجموعة [100] التي تقبل القسمة على 2. يوجد $[\frac{100}{2}]$ = 50 عدداً، تحديداً: 2, 4, 6, 8, 10, ... 98, 100.

بعض هذه الأعداد يقبل أيضاً القسمة على 3 أو 5 أو عليهما معاً، وبذا فهي تحقق خصائص إضافية. لا ينبغي القلق من هذا الأمر، لأننا نريد إحصاء الأعداد التي تحقق الخاصية d_2 وربما غيرها من الخصائص. بصورة مماثلة، يوجد $[\frac{100}{3.5}] = 6$ أعداد صحيحة تقبل القسمة على 3 و 5 معاً، تحديداً: 15, 30, 45, 60, 75، 90.

مرة أخرى، بعض هذه الأرقام يقبل القسمة على 2 لكن هذا لا يهم.

السؤال 93: كم عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 2 وعلى 5؟ والأعداد التي تقبل القسمة على 2 و3 و5؟

في السؤال 91، عددنا الشيفرات التي تجعل حرفي D وM ثابتين. يجب أن تكون الإجابة 24! لأنه بكون هذين الحرفين ثابتين فإن أي عملية إبدال للأحرف الـ 24 الباقية سيحقق الخاصيتين f_Dو f_M. بعض الشيفرات الـ 24 ستجعل من أحرف أخرى ثابتة وبالتالي ستحقق خصائص إضافية. هذه النقطة الحرجة هي أننا عددنا الشيفرات التي تجعل الحرفين D وM ثابتين وربما أحرف أخرى أيضاً.

السؤال 94: افترض أننا أعطينا المجموعة الجزئية *j* والتي تتكون من الأحرف A-Z. كم عدد الشيفرات التي تبقي هذه الأحرف على الأقل ثابتة؟

في السؤال 92، عددنا الدوال الشاملة التي تغفل العناصر 1، 2، 3 من المجموعة $[n]$. لابدّ أن تكون إجابتك $(n-3)^k$ لأن أي دالة من $[k]$ إلى {4 ,5 , ..., n} سيغفل العناصر 1، 2، 3. بعض الدوال $(n-3)^k$ تغفل بعض العناصر

الأخرى من المجموعة $[n]$، لكننا عددنا الدوال التي تغفل العناصر 1، 2، 3 على الأقل.

السؤال 95: افترض أننا أُعطينا المجموعة الجزئية j من المجموعة $[n]$. كم عدد الدوال التي تغفل العناصر j على الأقل؟

في هذه الأمثلة، التعبير "على الأقل" مهم ويصنع فرقاً. إذا أردنا إحصاء الدوال التي تغفل العناصر 1، 2، 3 تحديداً، سيتعيّن علينا عد الدوال الشاملة! $[k] \rightarrow \{4, 5, \ldots, n\}$. لكن هذا صعب كما هو الحال في السؤال الأصلي المتعلق بعد الدوال الشاملة $[k] \rightarrow [n]$. تنطبق نفس الملاحظة على المثالين الآخرين.

الآن نعرّف عدّ الدوال للتعامل مع الشرط "على الأقل" والشرط "تحديداً".

التعريف 3.1.1: لنفرض أن U هي مجموعة من الأشياء وP هي مجموعة من الخصائص التي تملكها أو لا تملكها تلك العناصر. لأي مجموعة جزئية J من P، حدّد التعبيرات التالية:

- $N \geq (J)$ تساوي عدد العناصر في U والتي تمتلك الخصائص المحددة في J وخصائص أخرى محتملة.
- $N = (J)$ تساوي عدد العناصر في U والتي الخصائص المحددة في J فقط.

هنا، الرمز " $\geq$ " يعني "على الأقل" والرمز "=" يعني "تحديداً".

قمنا مسبقاً بحساب قيم الدالة $N \geq$ في الأمثلة الثلاثة، وهي تحديداً:

$N \geq (\{d_2\}) = 50$ مثال على عدّ الأعداد الصحيحة

$N \geq (\{f_D, f_M\}) = 24!$ مثال على الشيفرة

$N \geq (\{m_1, m_2, m_3\}) = (n-3)^k$ مثال على الدوال الشاملة

من الآن فصاعداً، اكتبها على النحو $N \geq (d_2)$، $N \geq (\{f_D f_M\})$، $N \geq (\{m_1 m_2 m_3\})$ وذلك للتبسيط. في الأمثلة الثلاثة، بحثنا عن عدد العناصر التي لا تمتلك الخصائص، وتعرف بخلاف ذلك بـ $N = (\emptyset)$

السؤال 96: ما قيمة $N \geq (\emptyset)$ في أي مسألة من مسائل الاحتواء - الاستثناء؟

الفكرة وراء صيغة الاحتواء - الاستثناء

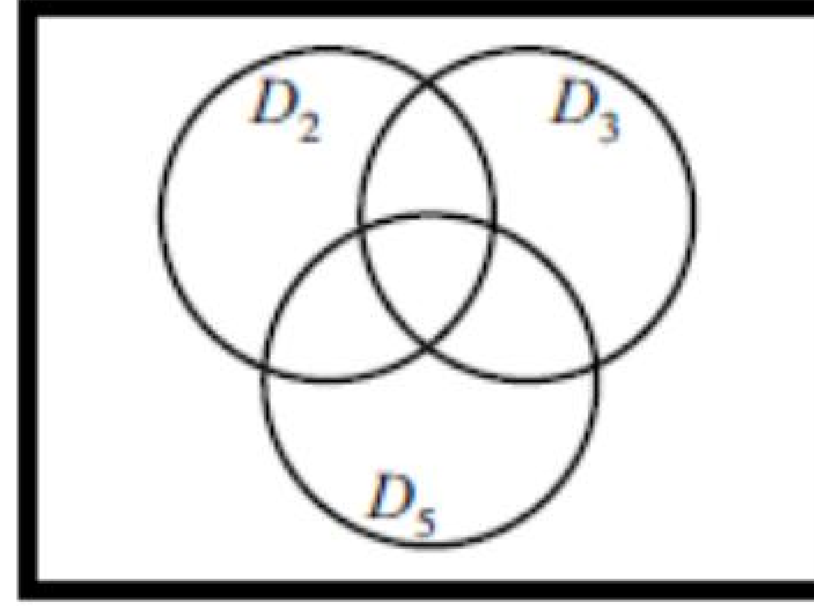
صيغة الاحتواء - الاستثناء، التي نقوم باشتقاقها الآن، ما هي إلا خدعة العدّ نفسها التي تعلمتها عند عدّ حجم المجموعات الناتجة عن اتحاد مجموعتين أو ثلاث باستخدام مخطط فين (Venn). ظهرت هذه الصيغ في بداية هذا القسم.

لتوضيح الفكرة رسماً، لنعد إلى مثال عدّ الأعداد الصحيحة [100] التي لا تقسم على 2 أو 3 أو 5. فيما يلي المجموعات الجزئية من [100] موضّحة بالخصائص الثلاث:

$$D_2 \coloneqq \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 100\}$$
$$D_3 \coloneqq \{3,6,9,12,15, \ldots,99\}$$
$$D_5 \coloneqq \{5, 10,15,20,25, \ldots, 100\}$$

استخدمنا الرمز D_i (الحرف الكبير) للتفريق بين المجموعات الفعلية وبين الخصائص d_i التي تصفها. فيما يلي المجموعات ممثلة بمخطط فين:

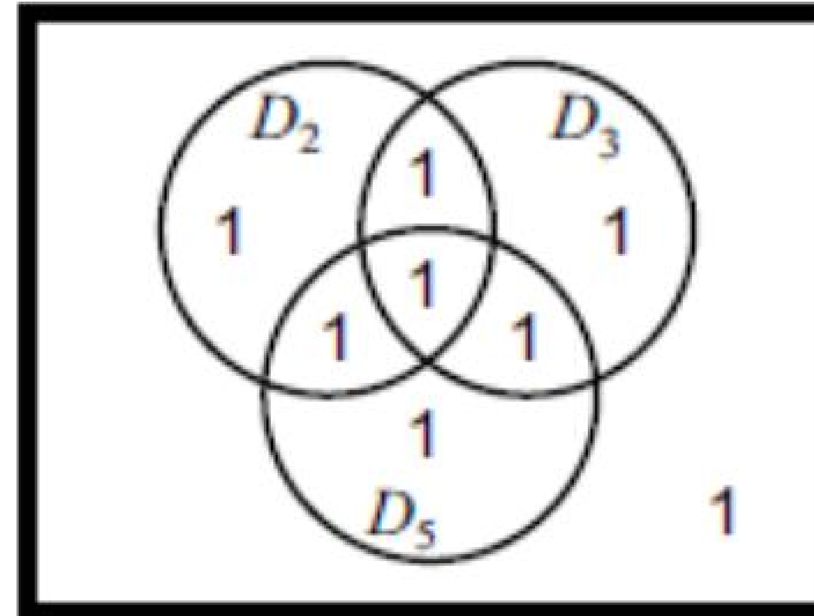
مجموعة الأعداد الصحيحة [100]



تذكّر أن هدفنا هو عدّ الأعداد الصحيحة ليس في أي من المجموعات، باستخدام قيم $N \geq (.)$.

ابدأ بشمول كل شيئ في [100] في العدّ، وهذا ما تحققه $N \geq (\emptyset)$

مجموعة الأعداد الصحيحة [100]



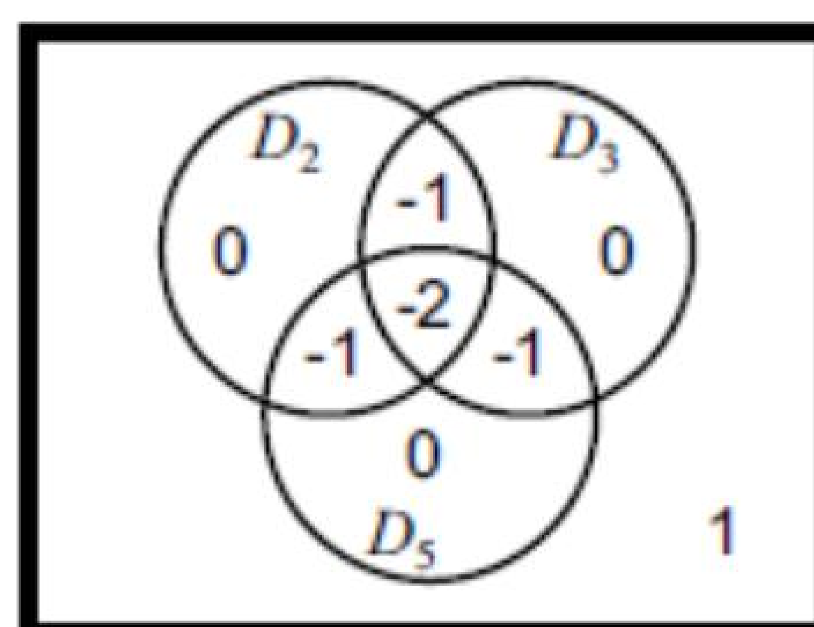
$N_{\geq}(\emptyset)$

تشير الأرقام 1 إلى أننا عددنا كل عدد صحيح في المناطق الثمان المنفصلة في مخطط فين مرة واحدة تحديداً. لقد شملنا الكثير طالما أن هدفنا الحصول على 1 في المنطقة الواقعة خارج الدوائر (تتضمن الأعداد الصحيحة في [100] والتي لا تنطبق

عليها أي من الخصائص) والأصفار في المناطق السبع الأخرى (يتضمن كلٌ منها الأعداد الصحيحة التي ينطبق عليها خاصية واحدة على الأقل).

لمعالجة هذا الإفراط في العدّ، نستثني الأعداد الصحيحة التي خصائصها d_2 والتي خصائصها d_3 والتي خصائصها d_5. وبطرح $N \geq (d_2)$ و $N \geq (d_3)$ و$N \geq (d_5)$ نحصل على:

مجموعة الأعداد الصحيحة [100]

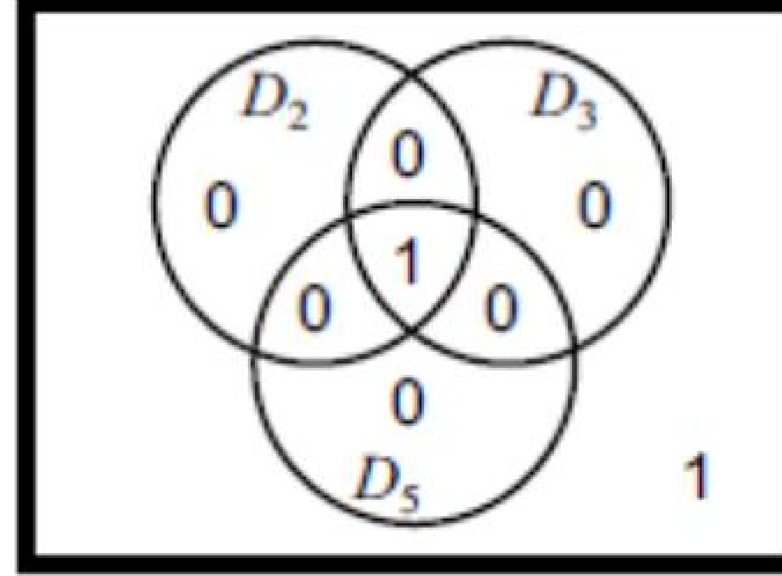


$N_{\geqslant}(\emptyset) - (N_{\geqslant}(d_2) + N_{\geqslant}(d_3) + N_{\geqslant}(d_5))$

نحن نقترب من الحل، لكننا "عددنا أنقص –1" (بمفهوم الشبكة) تلك الأعداد الصحيحة التي تمتلك خاصيتين تحديداً. الأسوأ من ذلك أننا "عددنا أنقص –2" اثنتين من الواحدات تلك الأعداد الصحيحة التي تمتلك الخصائص الثلاث كلها. يأتي –2 من إضافة +1 من $N \geq (\emptyset)$ أما –1 الثلاثة وانقص ثلاث واحدات فقد نتجت عن طرح $N \geq (d_2)$ و $N \geq (d_3)$ و$N \geq (d_5)$.

الآن نضمّن الأعداد الصحيحة التي تتشارك في أي خاصيتين، والتي تحققها إضافة كل من $N \geq (d_2 d_3)$ و$N \geq (d_3 d_5)$ و$N \geq (d_2 d_5)$:

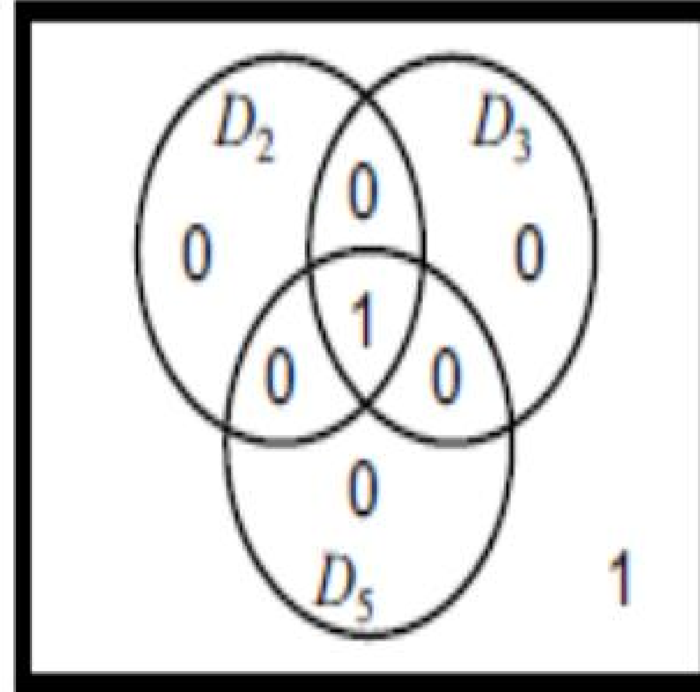
مجموعة الأعداد الصحيحة [100]



$N_{\geqslant}(\emptyset) - (N_{\geqslant}(d_2) + N_{\geqslant}(d_3) + N_{\geqslant}(d_5)) + (N_{\geqslant}(d_2 d_3) + N_{\geqslant}(d_3 d_5) + N_{\geqslant}(d_2 d_5))$

نقوم بالتسوية الأخيرة بطرح $N \geq (d_2 d_3 d_5)$:

مجموعة الأعداد الصحيحة [100]



$N_{\geqslant}(\emptyset) - (N_{\geqslant}(d_2) + N_{\geqslant}(d_3) + N_{\geqslant}(d_5)) + (N_{\geqslant}(d_2 d_3) + N_{\geqslant}(d_3 d_5) + N_{\geqslant}(d_2 d_5))$

حققنا هدفنا، وبذا نكون قد أثبتنا المعادلة:

(3.1)

$$N = (\emptyset) = N \geq (\emptyset) - \big(N \geq (d_2) + N \geq (d_3) + N \geq (d_5)\big) + \big(N \geq (d_2 d_3) + N \geq (d_3 d_5) + N \geq (d_2 d_5)\big) - N \geq (d_2 d_3 d_5)$$

لاحظ وجود ثمانية بنود، واحد لكل مجموعة جزئية ممكنة من $P = \{d_2, d_3, d_5\}$. إضافة لذلك، وهذه البنود التي ترتبط بمجموعات جزئية حجمها عدد زوجي هي موجبة، بينما البنود التي ترتبط بالمجموعات الجزئية التي حجمها عدد فردي هي سالبة.

إكمال المثال الأول

لإكمال المثال، نحتاج إلى ثمان قيم من $N \geq (.)$. قمنا بحساب بعضها مسبقاً في السؤال 90.

$$N \geq (\emptyset) = 100 \qquad N \geq (d_2 d_3) = \left\lfloor \frac{100}{2.3} \right\rfloor = 16$$
$$N \geq (d_2) = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = 50 \qquad N \geq (d_3 d_5) = \left\lfloor \frac{100}{3.5} \right\rfloor = 6$$
$$N \geq (d_3) = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33 \qquad N \geq (d_2 d_5) = \left\lfloor \frac{100}{2.5} \right\rfloor = 10$$
$$N \geq (d_5) = \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20 \qquad N \geq (d_2 d_3 d_5) = \left\lfloor \frac{100}{2.3.5} \right\rfloor = 3$$

الجواب: 100 – (50 + 33 + 20) + (16+6+10) – 3 = 26

إثبات صيغة الاحتواء – الاستثناء

قبل إكمال المثالين الآخرين، نثبت صيغة الاحتواء - الاستثناء التي تعمم الصيغة التي اشتققناها بمساعدة مخطط فين. المفاجأة الوحيدة في البرهان قد تظهر عند ظهور المجموع في السؤال التالي:

السؤال 97: جد قيمة $\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(-1)^{j}$ (توجيه: مبرهنة ذات الحدين)

قبل إثبات الصيغة العامة لمبدأ الاحتواء - الاستثناء، لنتحقق من مسألة الترميز. المجموع الذي ظهر في صيغة الاحتواء – الاستثناء هو مجموع مجموعة جزئية. التعبير $\sum J{:}J\subseteq P$ يعني أن المجموع أكبر من كافة المجموعات الجزئية J المأخوذة من المجموعة P، من المجموعة الفارغة إلى P نفسها. على سبيل المثال، يمكن كتابة البند الأيمن من المعادلة (3.1) على النحو:

$$\sum_{J:J\subseteq P}(-1)^{|J|}N\geq(J)$$

حيث $P=\{d_2,d_3,d_5\}$ هي مجموعة الخصائص.

المبرهنة 3.1.2 (المبدأ الأساسي للاحتواء - الاستثناء): لنفرض أن U هي مجموعة أشياء إحصائية ولنفرض أن P هي مجموعة الخصائص التي قد تمتلكها أو لا تمتلكها تلك الأشياء. وعليه فإن عدد الأشياء في U التي لا تمتلك أياً من الخصائص هو:

$$N=(\emptyset)=\sum_{J:J\subseteq P}(-1)^{|J|}N\geq(J)$$

البرهان: لتكن U مجموعة إحصائية من الأشياء وP مجموعة الخصائص التي قد تمتلكها أو لا تمتلكها تلك الأشياء. نثبت أن عدد المرات التي يتضمّن فيها الطرف الأيمن من الصيغة كل شيء في U يساوي 1 عندما لا يمتلك الشيء أياً من الخصائص ويساوي 0 عندما يمتلك الشيء خاصية واحدة على الأقل. رتّب المجموع بحسب حجم المجموعة الجزئية J المأخوذة من المجموعة P :

(3.2)

$$\sum_{J:J\subseteq P}(-1)^{|J|}N \geq (J) = \sum_{|J|=0}(-1)^0 N \geq (J) + \sum_{|J|=1}(-1)^1 N \geq (J) + \sum_{|J|=2}(-1)^2 N \geq (J) + \cdots + \sum_{|J|=n}(-1)^n N \geq (J)$$

عدد الحدود في المجموع الأول هو $\binom{n}{0}$ وفي المجموع الثاني $\binom{n}{1}$ وفي الثالث $\binom{n}{2}$، وهكذا.

أولاً نأخذ شيئاً في U لا يمتلك أي خصائص. في أي بند من بنود الصيغة (3.2) يتم عدّ هذا الشيء؟ بما أن هذا الشيء لا يمتلك أياً من الخصائص، تعدّه الصيغة في المجموع $|J| = 0$ والذي يساوي $N \geq (\emptyset)$ بما أنه يوجد $\binom{n}{0} = 1$ مجموعة جزئية حجمها 0 من المجموعة P. وعليه فإنه يُعدّ مرة واحدة تحديداً. قطعنا نصف الطريق للحل.

الآن نأخذ شيئاً في U يمتلك خاصية واحدة على الأقل. دعنا نحدّد ذلك بـ m يمتلك الخاصية n، حيث $1 \leq m \leq n$. في أي من بنود الصيغة (3.2) يتم عدّه؟

الإجابة هي أنه سيتم عدّه في البنود $|J| = 0$ و$|J| = 1$ وهكذا إلى أن نصل إلى الحد $|J| = m$. لكن لن يتم عدّه عندما $|J| > m$ لأن هذا الشيء يمتلك الخاصية m تحديداً، وهكذا. إذن عندما تكون $|J| = j$ حيث $0 \leq j \leq m$، فإنه يوجد $\binom{m}{j}$ طريقة لاختيار مجموعة جزئية j من مجموعة الخصائص m التي يمتلكها الشيء، وفي كل مرة يتم عدّه فيها، فإنه يضيف $(-1)^j$ إلى المجموع. الإضافة الإجمالية عندما $|J| = j$ تساوي $\binom{m}{j}(-1)^j$. وعليه فإن الصيغة تعد هذا الشيء

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^j$$

مرة. هذا المجموع يساوي 0 من السؤال 97، وهذا يُكمل البرهان.

إكمال المثالين الآخرين

مثال: عدّ الشيفرات

لإكمال هذا السؤال، يلزم $N \geq (J)$ لكل مجموعة جزئية J المأخوذة من مجموعة الخصائص-26 والتي يرمز لها بـ P.

الأصل أن يتم تقسيم العمل حسب حجم المجموعة الجزئية J.

في السؤال 94، وجدت أنه بإعطاء أي مجموعة جزئية J مأخوذة من مجموعة الأحرف *A-Z*، فإن عدد الشيفرات التي تجعل عناصر المجموعة الجزئية ثابتة هو $(26-j)!$، وهذا يعني:

$N \geq (J) = (26-j)!$ لكل العناصر $J \subseteq P$ حيث $|J| = j$.

يوجد $\binom{26}{j}$ من المجموعات الجزئية J، وبذا فإن مساهمتها في جزء الصيغة يكون

$\binom{26}{j}(-1)^j(26-j)!$. بجمع هذا المقدار بأخذ كل القيم الممكنة لـ j نحصل على الإجابة التالية:

$$N = (\emptyset) = \sum_{j=0}^{26} \binom{26}{j} (-1)^j (26-j)!$$

المجموع يساوي 148,362,637,348,470,135,821,287,825. قارن الإجابة بعدد الشيفرات الممكنة والتي تجعل الأحرف ثابتة: 26! = 403,291,461,126,605,635,584,000,000

حوالي 37٪ منها ليس فيه أحرف ثابتة.

$$\frac{148{,}362{,}637{,}348{,}470{,}135{,}821{,}287{,}825}{403{,}291{,}461{,}126{,}605{,}635{,}584{,}000{,}000} = 0.367879$$

هذا الرقم أساساً هو e1/. طالع التمرين 7.

السؤال 98: بيّن أن المجموع في المعادلة (3.3) يمكن تبسيطه جبرياً على النحو

$26! \sum_{j=0}^{26} \frac{(-1)^j}{j!}$

مثال: عدّ الدوال الشاملة $[\boldsymbol{k}] \rightarrow [\boldsymbol{n}]$

للإجابة عن سؤال عدّ الدوال الشاملة، قسّم العمل بناءً على حجم المجموعة الجزئية J. في السؤال 94، وجدنا أنه بإعطاء أي مجموعة جزئية- j مأخوذة من $[n]$، فإن عدد الدوال التي تغفل هذه العناصر j هو $(n-j)^k$. وهذا يعني:

$$|J| = j \text{ حيث } J \subseteq P \text{ لجميع } N \geq (J) = (n-j)^k$$

يوجد $\binom{n}{j}$ من هذه المجموعات الجزئية J، وبذا تكون المساهمة في جزء الصيغة $\binom{n}{j}(-1)^j(n-j)^k$. بجمع هذا المقدار بأخذ كافة القيم الممكنة لـ j نحصل على الإجابة:

$$N = (\emptyset) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} -1^j (n-j)^k$$

الدوال الشاملة وأعداد ستيرلينغ من النوع الثاني

في الفصل الثاني، قمنا باشتقاق $S(k,n).n!$ كصيغة لعدد الدوال الشاملة من المجموعة المكونة من k عنصر إلى مجموعة المكونة من n. لم يكن ذلك مُرضِياً لأنه لم يكن لدينا صيغة لـ $S(k,n)$ لكن ثمة صيغة لدينا الآن.

مبرهنة 3.1.3 (عدد الدوال الشاملة): لنفرض أن k و n هما عددان صحيحان موجبان. عدد الدوال الشاملة من المجموعة المكونة من k عنصر إلى مجموعة المكونة من n هو:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j (n-j)^k$$

تتبع ذلك صيغة عدد ستيرلينغ من النوع الثاني $S(k,n)$.

انتبه إلى أن n و k قد أبدل مكانهما.

المبرهنة 3.1.4 (عدد تقسيمات المجموعة): لنفرض أن k وn هما عددان صحيحان غير سلبيين. عدد تقسيمات المجموعة –n إلى عدد k من الأجزاء هو:

$$s(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j (k-j)^n$$

البرهان: بما أن صيغة المبرهنة 3.1.1 تنطبق فقط على القيم الموجبة لـ n وk، سنتحقق من أن الصيغة تعمل عند وجود قيمة صفرية واحدة على الأقل لكل من n و k

عندما $n = k = 0$، فإن الصيغة تعطينا:

$$S(0,0) = \frac{1}{0!}\sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} (-1)^j (0-j)^0 = 1.\binom{0}{0} (-1)^0 0^0 = 1$$

حيث $0^0 = 1$ هذا صحيح طالما أن عدد التقسيمات في المجموعة الفارغة يساوي 1 (أي التقسيم الفارغ). سنترك لك أمر التحقق من الحالتين الآخرتين في السؤال التالي.

السؤال 99: إذا كان $n > 1$، ما هي القيمة التي يأخذها $S(n,0)$؟ هل يتوافق ذلك مع الصيغة؟ إذا كان $k > 1$، وما هي القيمة التي يأخذها $S(0,k)$؟ هل يتوافق ذلك مع الصيغة؟

مثال آخر وتنبيه

تُعرف مسألة عدّ الشيفرات بـ "مسألة التشويش" (Derangements): كم عدد تباديل $[n]$ التي ليس فيها نقاط ثابتة؟ (النقطة الثابتة للدالة f هي قيمة i حيث $f(i) = i$). كما تُعرف بـ مسألة اختبار القبعة (Hat-Check) بكم طريقة يمكن إعادة توزيع قبعات n من الأشخاص بحيث يحصل كل شخص على قبعة واحدة بالضبط وبشرط أن لا يحصل أي شخص على قبعته الأصلية؟ مسألة الشيفرات تعادل أياً من هاتين المسألتين عندما n=26.

ضع في اعتبارك تعديل مسألة اختبار القبعات وذلك بحذف الشرط "أن يحصل كل شخص على قبعة واحدة فقط". أي يُسمح لأي شخص باستلام أي عدد من القبعات، لكن يبقى الشرط أن لا يحصل أي شخص على قبعته الأصلية. يتضمن هذا عدّ الدوال بدلاً من التباديل، وقد نستخدم تطبيق الاحتواء – الاستثناء

U:= مجموعة كل الدوال الممكنة [n]→[n]

f_i:= الدالة تثبت قيمة العنصر i لجميع قيم $i \in [n]$.

كالعادة، نريد أن تكون $N = (\emptyset)$. أي مجموعة جزئية -J من الخصائص تتبع $N \geq (J) = n^{n-j}$. وهذا يعني أن الإجابة:

$$N = (\emptyset) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j (n)^{n-j}$$

هذا صحيح، لكن إذا طبّقنا مبرهنة ذات الحدين على هذا المجموع نحصل على:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j (n)^{n-j} = (-1+n)^n = (n-1)^n$$

لابدّ من وجود تفسير بسيط لهذه الإجابة البسيطة، وهي: لكل عنصر $i \in [n]$، يوجد عدد من الخيارات $n-1$ (أي خيار باستثناء i) لقيمة $f(i)$.

تنبهنا هذه المسألة إلى أهمية البحث عن أبسط الحلول أولاً قبل تجريب المزيد من الطرق المعقّدة.

الصيغة الأكثر عمومية

ينطبق المبدأ الأساسي للاحتواء – الاستثناء على عدّ الأشياء التي تحقق إحدى الخصائص. كيف يمكننا عدّ الأشياء التي تحقق بعض الخصائص؟

المبرهنة 3.1.5 (المبدأ العام للاحتواء - الاستثناء): لنفرض أن U مجموعة إحصائية من الأشياء، ولتكن $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ مجموعة الخصائص التي قد تمتلكها أو لا تمتلكها الأشياء. إذا كانت S أي مجموعة جزئية في P، فإن عدد الأشياء في U التي تحقق الخصائص في المجموعة الجزئية S ولا خصائص غيرها هو:

$$\mathrm{N} = (\mathrm{S}) = \sum_{J:S\subseteq J\subseteq P} (-1)^{|J|-|S|}\, N \geq (J)$$

في هذه الحالة، يفوق المجموع كافة المجموعات الفرعية في P والتي تحتوي عناصر S. تجد برهان المبدأ العام في التمرين 16 ويستخدم نفس التكنيك المستخدم في برهان المبدأ الأساسي.

مثال: عدّ القواسم مرة أخرى

كم عدد الأعداد الصحيحة في [100] تقبل القسمة على 2 لكن لا تقبل القسمة على 3 أو على 5؟

من معطيات السؤال أن U=[100] و $P = \{d_2, d_3, d_5\}$ كما هو محدّد مسبقاً، لكن الآن نحن نبحث عن قيمة $N = (d_2)$. لذا نطبّق الصيغة في المبرهنة حيث $S = \{d_2\}$. سيكون المجموع أكبر من المجموعات الجزئية الأربع:

$$\{d_2\}, \{d_2, d_3\}, \{d_2, d_5\}, \{d_2, d_3, d_5\}$$

الصيغة تعطي

$$N = (d_2) = N \geq (d_2) - \left(N \geq (d_2 d_3) + N \geq (d_2 d_5)\right) + N \geq (d_2 d_3 d_5)$$

قمنا مسبقاً بحساب هذه القيم. الإجابة هي $50 - (16 + 10) + 3 = 27$.

السؤال 100: كم عدد الأعداد الصحيحة في [100] التي تقبل القسمة على 3 لكن لا تقبل القسمة على 2 أو على 5؟ كم عدد الأعداد التي تقسم على 2 وعلى 3 لكن لا تقسم العدد 5؟

الملخص

الاحتواء – الاستثناء هي طريقة موصى بها لحل مسائل العدّ التي تتناسب مع إطار المجموعات الإحصائية/ الخصائص. تصف الخصائص عادةً المزايا "السيئة"،

وصيغة الاحتواء - الاستثناء تعدّ العناصر التي لا تنطبق عليها أي من المزايا السيئة. عند تطبيق الصيغة، تتيح بعض المسائل استخدام المختصرات لأن قيمة $N \geq (J)$ تعتمد فقط على حجم J. انطبقت هذه الحالة على أمثلة الشيفرات والدوال الشاملة. من المسائل الأخرى التي لا تسمح باستخدام المختصرات مسألة عد الأعداد الصحيحة التي لا تقبل القسمة على 2 أو 3 أو 5. في ذلك المثال، حسبنا كل قيمة لـ $N \geq (J)$ على حدة.

التمارين

1. كم عدد الأعداد الصحيحة في [10000] التي لا تقبل القسمة على 2 أو 3 أو 5؟ كم عدد الأعداد الصحيحة التي لا تقبل القسمة على 2 أو 3 أو 5 أو 13؟

2. كم عدد الأعداد الصحيحة في [100] التي لا تقبل القسمة على 4 أو 6 أو 7؟

3. استخدم مبدأ الاحتواء - الاستثناء لبرهنة الصيغة

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1A_2| - |A_1A_3| - |A_2A_3| + |A_1A_2A_3|$$

(الترميز A_1A_2 يعني $A_1 \cap A_2$)

4. كم مجموعة من 13 ورقة يمكن سحب من مجموعة أوراق اللعب والتي عددها 52 ورقة:

أ) بحيث يوجد ورقة واحدة على الأقل من كل فئة [من الفئات الأربع في ورق اللعب]

ب) التي تخلو من فئة واحدة تحديداً. ("خلو البستوني" (Void in Spades يعني عدم وجود أي ورقة بستوني في الأوراق المسحوبة).

5. بعد يوم من ممارسة رياضة التزلج، قامت عائلة مكوّنة من 6 أفراد بغسل ملابس التزلج بها في ذلك القفازات. في اليوم التالي، سحب كل فرد زوجاً من القفازات من الكومة.

أ) افترض أن كل شخص يسحب قفازاً لليد اليسرى وآخر لليد اليمنى. بكم طريقة يمكنهم تحقيق هذا الغرَض بحيث لا يحصل أي شخص على قفازاته الأصلية؟

ب) أجب عن الفرع الأول من السؤال لكن بافتراض أن كل شخص يسحب أي زوجين من القفازات.

6. أجب عن سؤال "اختبار القبعات" (أي مسألة التشويش (Derangements)) لـ n بشكلٍ عام. يعرف هذا العدد بـ D_n.

7. افترض أن D_n معرّفة كما في التمرين السابق.

أ) احسب $\lim_{n\to\infty}\frac{D_n}{n!}$. فسّر إجابتك.

ب) برهن أنه لأي قيمة n فإن D_n تساوي أقرب عدد صحيح لـ $n!/e$

8. بكم طريقة يمكنك توزيع 20 غرضاً متطابقاً لـ 10 أشخاص متميزين، بحيث يحصل كل شخص على 5 أغراض على الأكثر؟ بكم طريقة يمكنك ذلك إذا كان كل شخص سيحصل على غرض واحد على الأقل و5 أغراض على الأكثر؟

9. بصياغة أكثر تعميماً للمسألة السابقة: بكم طريقة يمكنك توزيع عدد k من الأغراض المتطابقة على عدد n من الأشخاص المتميزين، بحيث يحصل كل شخص على عدد r من الأغراض على الأكثر؟

10. كم عدد الدوال $[7] \to [6]$ التي تتضمن سهمين يؤشران على كل عنصر في المجال المقابل على الأقل؟

11. إذا كان $k < n$، ما قيمة المجموع $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j(n-j)^k$؟ فسّر من الناحية التوافقية.

12. اشتق تعريفاً لـ $\binom{n}{k}$ باستخدام مبدأ الاحتواء - الاستثناء، عن طريق عدّ المجموعات المتعددة-k المأخوذة من المجموعة *[n]* التي يظهر فيها كل عنصر في المجموعة *[n]* مرة واحدة على الأقل. استخدم $p_i =$ "عنصر i يظهر أكثر من مرة في المجموعة المتعددة" كخاصية في المرتبة i، لـ $1 \le i \le n$

13. في مسألة احتواء-استثناء، افترض وجود الدالة f بحيث $N \geq (J) = f(|J|)$ لأي مجموعة جزئية J مأخوذة من المجموعة P. برهن:

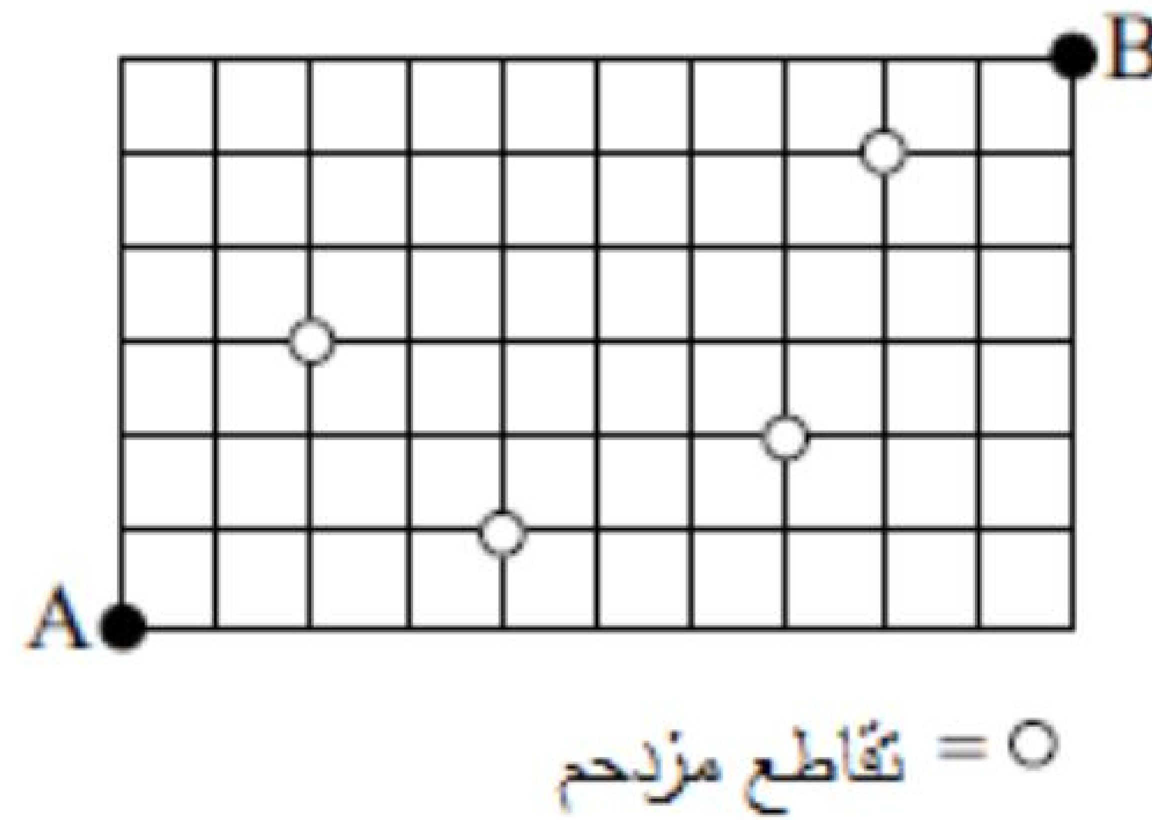
$$N = (\emptyset) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j f(j)$$

14. أعطِ برهاناً توافقياً لتعريف $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j = 0$ حيث تم حساب الطرف الأيسر باستخدام مبدأ الاحتواء - الاستثناء.

15. برهن توافقياً باستخدام الاحتواء - الاستثناء التعريف الناتج عن تعويض القيم $x = -1$ و $y = 2$ في مبرهنة ذات الحدين (المبرهنة 2.2.2)

16. برهن المبرهنة 3.1.5 باستخدام التقنية التي استخدمناها لبرهان المبرهنة 3.1.2

17. يقود سائق سيارة أجرة من التقاطع A إلى التقاطع B في شبكة من الشوارع كما هو موضّح في الشكل. السائق يقود فقط نحو الشمال (أعلى) ونحو الشرق (اليمين).



تشير تقارير المرور إلى وجود ازدحامات مرورية في تقاطعات محددة. كم مساراً يمكن للسائق أن يتّخذ ليصل من A إلى B:

أ) بحيث يتجنّب كل التقاطعات المزدحمة

ب) بحيث يمرّ على تقاطع مزدحمٍ واحد على الأكثر

18. لوحة لعبة البحث عن الكلمات مساحتها 4×4 هي عبارة عن مصفوفة 4×4 من الأحرف الكبيرة. كم عدد حالات البحث عن كلمات 4×4 التي تظهر فيها كلمة *MATH* مرة واحدة على الأقل إما أفقياً أو عمودياً أو قطرياً؟ فيما يلي أمثلة لأربع لوحات بحث مختلفة:

F H M A M A T H	*M M M M*	*M A T H*
M A T H A T H M	*G A A P*	*M A T H*
G Z Z Q T S M E	*Z R T Y*	*M A T H*
F A Y U H E E N	*K L H H*	*M A T P*

افترض أن *MATH* تظهر من اليمين إلى اليسار، ومن الأعلى إلى الأسفل، ومن الأعلى إلى اليسار إلى الأسفل إلى اليمين فقط.

ملاحظات سريعة

ارتبط العديد من رياضيي القرن التاسع عشر في اكتشاف صيغة الاحتواء والاستثناء، منهم دانيال دا سيلفا (Daniel de Silva)، وأبراهام دو هوافر (Abraham de Hoivre)، وجيمس جوزيف سلفستر (James Joseph Sylvester)، لكن كان أول من نشرها دا سيلفا (da Silva) عام 1854.

الجزء الأصعب في نظرية الاحتواء – الاستثناء هو الترميز. إن استخدام $N \geq$ و $N =$ أمر شائع لكنه ليس عالمياً. أما استخدام مجموع المجموعة الجزئية $\sum_{J:J\subseteq p}$ فيتجنب الاستخدام غير الملائم لـ "..." في صيغ تشبه

$$N = (\emptyset) = N \geq (\emptyset) - \sum_{i} N \geq (p_i) + \sum_{i \neq j} N \geq (p_i p_j) - \sum_{i,j,k\ different} N \geq (p_i p_j p_k) + \cdots + (-1)^n N \geq (p_1 p_2 \ldots p_n)$$

في القسمين 8.5 و 8.6، سندرس تعميماً فعّالاً للاحتواء – الاستثناء، يعرف باسم تحويل موبيوس العكسي (Möbius Inversion). في ورقة عمل مؤسسي تختص بانعكاس موبيوس، بدأ روتا (Rota) (1964) بإعلان أن "أحد أهمّ مبادئ الإحصاء التعددي فائدة في نظرية الاحتمالات المنفصلة والتوافقيات، وهو مبدأ الاحتواء – الاستثناء الشهير. عندما نطبق هذا المبدأ بمهارة، فإنه سيحلّ العديد من مسائل التوافقية.

3.2 الاستقراء الرياضي

إذا كان القارئ على دراية بالاستقراء، فيمكنه حذف هذا القسم أو المرور سريعاً على الأمثلة الواردة فيه.

في هذا القسم، نسلط الضوء على كيفية استخدام الاستقراء لاستكمال تقنيات برهنة التوافيق. أحياناً ستكتشف أولاً حقيقة التطابق باستخدام الاستقراء، ثم ستدرك

لاحقاً برهنة التوافيق. أحياناً أخرى، يكون الاستقراء هو الأمر الوحيد الذي يمكن تطبيقه.

مبدأ الاستقراء الرياضي

يوفّر مبدأ الاستقراء الرياضي شرطاً كافياً لضمان صحة التعبير الذي يعتمد على عدد صحيح.

المبرهنة 3.2.1 (الاستقراء الرياضي): ليكن n_0 عدداً صحيحاً، وليكن $S(n)$ تعبيراً يتضمن عدداً صحيحاً n. إذا كان الشرطان التاليان صحيحين فإن التعبير $S(n)$ يكون صحيحاً لكل $n \geq n_0$.

- **الحالة الأساسي**: $S(n_0)$ صحيح.
- **الخطوة الاستقرائية**: إذا كان k عدداً صحيحاً، و $k \geq n_0$ و$S(k)$ صحيحاً، فإن $S(k+1)$ يكون صحيحاً.

البرهان موجود في نهاية هذا القسم.

لاستخدام الاستقراء الرياضي، عليك تأكيد الحالة الأساس، والخطوة الاستقرائية للمبرهنة. يجب أن تتضمن الحالة الأساسة إثباتاً على أن $S(n_0)$ صحيح. أما الخطوة الاستقرائية فهي برهان "إذا-فإن" بذاتها. عليك أن: (1) تفترض أن k عدد صحيح، و$k \geq n_0$، (2) تفترض أن $S(k)$ صحيح، و (3) إثبات أن $S(k+1)$ صحيح.

يحدث معظم العمل والإبداع في الخطوة (3). كون $S(k)$ صحيحاً في الخطوة (2) أمر يُعرف

بـ "فرضية الاستقراء" (Inductive Hypothesis). كل برهان بالاستقراء يجب أن يستخدم فرضية الاستقراء (اختصاراً IHYP في الأمثلة التي تتبع) في مرحلة ما. أما إن لم يستخدم، فأغلب الظن أن البرهان سيكون غير صحيح.

المثال #1: المتسلسلات الهندسية الجزئية

في الأقسام اللاحقة التي سنتناول فيها الدوال المولّدة، استفدنا من المطابقة التالية

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

والذي ينطبق على أي عدد حقيقي $x \neq 1$ وعلى أي عدد صحيح $n \geq 0$. لقد استخدمت هذه الصيغة في حسابات التفاضل والتكامل لإيجاد المجموع الجزئي لمتسلسلات الهندسية (Geometric Series).

السؤال 101: احسب $1 - 2 + 4 - 8 + 16 + 32 + 64 - 128$ باستخدام الصيغة.

سنبرهن هذه المبرهنة باستخدام الاستقراء على n.

المبرهنة 3.2.2 إذا كان x عدداً حقيقياً، $x \neq 1$، إذن لكل عناصر $n \geq 0$

$$\sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

البرهان باستخدام الاستقراء على n: افترض أن x عدداً حقيقياً و$x \neq 1$. لكل $n \geq 0$، لنعرف $S(n)$ كالتالي

$$S(n): \sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

عندما $n = 0$ فإن طرف المعادلة الأيسر $S(0)$ يساوي $\sum_{j=0}^{o} x^j = x^0 = 1$ حيث x^0 تساوي 1 لجميع الأعداد الحقيقية بما فيها الصفر. الطرف الأيمن من التعبير $S(0)$ يساوي $\frac{1-x^{0+1}}{1-x} = \frac{1-x}{1-x} = 1$ حيث $x \neq 1$. إذن الطرفان متساويان، إذن $S(0)$ صحيح.

الآن، لنفترض أن k عدد صحيح، $k \geq 0$ وأن $S(k)$ تعبير صحيح، بالتالي:

$$\sum_{j=0}^{k} x^j = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$$: فرضية الاستقراء

علينا أن نُثبت أن صيغة $S(k+1)$ صحيحة، تحديداً

$$\sum_{j=0}^{k+1} x^j = \frac{1 - x^{k+2}}{1 - x}$$

لإجراء ذلك، ابدأ بالطرف الأيسر:

$$\sum_{j=0}^{k+1} x^j = \left(\sum_{j=0}^{k} x^j\right) + x^{k+1}$$

بفصل البند الأخير

$$= \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} + x^{k+1}$$

باستخدام فرضية الاستقراء

$$= \frac{1 - x^{k+1} + x^{k+1}(1 - x)}{1 - x}$$

قاسم مشترك

$$= \frac{1 - x^{k+1} + x^{k+1} - x^{k+2}}{1 - x}$$

$$= \frac{1 - x^{k+2}}{1 - x}$$

وعليه فإن $S(k + 1)$ صحيحة. إذن $S(n)$ صحيحة لكل $n \geq 0$.

المثال #2: برهنة متباينة

قد تكون المتباينة التالية $\sum_{j=1}^{n} j! < (n + 1)!$ صحيحة لكل الأعداد الصحيحة $n \geq 1$، لأن

$$
\begin{aligned}
1! &= 1 < 2 = 2! \\
&++\text{-}(3.4) \\
1! + 2! &= 3 < 6 = 3! \\
1! + 2! + 3! &= 9 < 24 = 4! \\
1! + 2! + 3! + 4! &= 33 < 120 = 5! \\
1! + 2! + 3! + 4! + 5! &= 153 < 720 = 6!
\end{aligned}
$$

قد تبدو بداية مبشّرة.

لنعرف $S(n)$ على أنها

$$S(n): \sum_{j=1}^{n} J! < (n+1)!$$

للبرهنة بالاستقراء، لاحظ أن السطر الأول من المتباينات (3.4) ويظهر أن $S(1)$ صحيحة.

الآن لنفرض أن k عدد صحيح و $k \geq 1$، وأن $S(k)$ صحيحة، تحديداً

$$\sum_{j=0}^{k} j! < (k+1)!$$: فرضية الاستقراء

يجب أن نبيّن أن $\sum_{j=1}^{k+1} j! < (k+2)!$. الحسابات التالية ستقوم بالمهمة:

$$\sum_{j=1}^{k+1} j! = \left(\sum_{j=1}^{k} j!\right) + (k+1)!$$

بفصل البند الأخير

$$< (k+1)! + (k+1)!$$

باستخدام فرضية الاستقراء

$$= 2(k+1)!$$
$$< (k+2)(k+1)!$$

$2 < k+2$ بما أن $k \geq 1$

$$= (k+2)!$$

وعليه فإن $S(k+1)$ صحيحة، إذن $S(n)$ صحيحة لكل $n \geq 1$.

المثال #3: حل علاقة التكرار

هذا مثال على علاقة تكرار

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_n &= 2a_{n-1} + n - 1 \qquad n \geq 1 \end{aligned} \qquad (3.5)$$

علاقة التكرار (Recurrence Relation) تحكم الحساب التكراري للأعداد... $a_0, a_1, a_2, a_3,$.

القيمة

$a_0 = 1$ هي شرط البداية، ثم للحصول على القيم المتتالية... $a_1, a_2, a_3,$ عليك أن تطبّق القاعدة $a_n = 2a_{n-1} + n - 1$ تكراراً:

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 2a_0 + 1 - 1 = 2(1) + 0 = 2$$
$$a_2 = 2a_1 + 2 - 1 = 2(2) + 1 = 5$$
$$a_3 = 2a_2 + 3 - 1 = 2(5) + 2 = 12$$
$$\vdots$$

السؤال 102: ما قيمة a_6؟

لتحديد قيمة a_{100} وa_{1000} بالتكرار، ستتطلب صيغة تتيح لنا القفز مباشرة للقيمة a_{1000} من دون حساب البنود الأسبق منها. احسب المزيد من البنود ثم حدّد النمط:

n								
a_n				2	7	8	21	48

يبدو من الجدول أن القيم تتعلق بقوى العدد 2،

$$a_0 = 1 = 2^1 - 1$$
$$a_1 = 2 = 2^2 - 2$$
$$a_2 = 5 = 2^3 - 3$$
$$a_3 = 12 = 2^4 - 4$$

$$a_4 = 27 = 2^5 - 5$$
$$a_5 = 58 = 2^6 - 6$$
$$a_6 = 121 = 2^7 - 7$$
$$a_7 = 248 = 2^8 - 8$$

تخميننا هو أن $a_n = 2^{n+1} - n - 1$ وتنطبق على كل $n \geq 0$.

لإثبات هذا التخمين باستخدام الاستقراء على المجموعة n، تحقق أولاً من الصيغة عندما $n = 0$. تبيّن الصيغة أن $a_0 = 2^{0+1} - 0 - 1 = 1$. التكرار يجعل $a_0 = 1$، إذن الصيغة صحيحة في هذه الحالة.

الآن لنفترض أن k عدد صحيح، و $k \geq 0$، وأن $a_k = 2^{k+1} - k - 1$، وهذه فرضية الاستقراء. علينا أن نبرهن أن $a_{k+1} = 2^{k+2} - (k+1) - 1$، أو بصورة مكافئة أن

$$a_{k+1} = 2^{k+2} - k - 2$$

فيما يلي البرهان:

$$a_{k+1} = 2ak + k$$

حسب علاقة التكرار

$$= 2(2^{k+1} - k - 1) + k$$

حسب فرضية الاستقراء

$$2^{k+2} - 2k - 2 + k$$
$$= 2^{k+2} - k - 2$$

هذا يُثبت أن $S(k+1)$ صحيحة. وعليه فإن $a_n = 2^{n+1} - n - 1$ صحيحة لجميع قيم $n \geq 0$.

المثال #4: حل مسائل العدّ

فيما يلي مثال مباشر ونموذجي عن الطريقة التي قد تتبعها لاستخدام الاستقراء في التوافيق. فأنت تحاول عدّ تقسيمات $[n]$ المقسّمة إلى كتلتين، لكنك لا تعرف كيفية الانتقال مباشرة إلى صيغة. بدلاً من ذلك، تقوم بتعريف p_n ليمثّل عدد تقسيمات $[n]$ المقسمة إلى كتلتين، لكل $n \geq 2$. باستخدام التعداد الكامل، تجد أن $p_2 = 1$، $p_3 = 3$، $p_4 = 7$، $p_5 = 15$. على سبيل المثال، تقسيمات $[3]$ المقسمة إلى كتلتين هما:

$$\{\{1\},\{2,3\}\}, \quad \{\{2\},\{1,3\}\}, and \ \{\{3\},\{1,2\}\}$$

ثم تكتشف البرهان التوافيقي للتعريف $p_n = 2p_{n-1} + 1$ لـ $n \geq 3$.

السؤال 103: أعطِ البرهان التوافقي؟

نبدأ بـ $p_2 = 1$، نجري بعض الحسابات:

$$p_2 = 1$$
$$p_3 = 2p_2 + 1 = 3$$
$$p_4 = 2p_3 + 1 = 7$$
$$p_5 = 2p_4 + 1 = 15$$
$$p_6 = 2p_5 + 1 = 31$$
$$p_7 = 2p_6 + 1 = 63$$

تتوافق القيم الأربع الأولى مع تلك التي وجدتها بالتعداد الكامل – وهذا أمرٌ جيد. إضافة لذلك، يبدو أن النمط المتّبع واضح:

$$p_n = 2^{n-1} - 1$$

لكل $n \geq 2$.

بكلمات أخرى، ينبغي عليك إثبات أن الأعداد المعرّفة بالعلاقة التكرارية

$$p_2 = 1$$
$$p_n = 2^{n-1} - 1 \quad \text{لكل} \; n \geq 3.$$

هي الأعداد $p_n = 2^{n-1} - 1$ لكل $n \geq 2$ فحسب.

السؤال 104: برهن بالاستقراء، كما في المثال #3.

الاستقراء الرياضي القوي

عند استخدام الاستقراء، أحياناً لا تكون صحّة $S(k)$ وحدها قوية بما فيه الكفاية للدلالة على صحّة $S(k+1)$. في مثل هذه الحالات، يمكننا تجريب الاستقراء القوي (Strong Induction). في فرضية الاستقراء للاستقراء القوي، نفترض أن صحة $S(j)$ لكل قيم j التي تقع بين القيمة الأساسية n_0 وعدد صحيح عشوائي k.

المبرهنة 3.2.3 (الاستقراء الرياضي القوي): لنفترض أن n_0 و n_1 عددان صحيحان، $n_0 \leq n_1$، ولنفترض أن $S(n)$ تعبير يتضمن العدد الصحيح n. إذا كان الشرطان التاليان صحيحين، فإن $S(n)$ تكون صحيحة لكل قيم $n \geq n_0$:

- **الحالة (الحالات) الأساس**: $S(n_0), \ldots, S(n_1)$ تكون صحيحة.
- **الخطوة الاستقرائية**: إذا كان k عدداً صحيحاً، و$k \geq n_1$ و $S(j)$ صحيحة لكل قيم j التي تحقق $n_0 \leq j \leq k$، وبالتالي فإن $S(k+1)$ تكون صحيحة.

لاحظ أنه قد يكون من الضروري التحقق من أن أكثر من عبارة واحدة تكون صحيحة في الحالة الأساس. بما أن الافتراضات أقوى من تلك المفترضة في المبرهنة 3.2.1، فإن نفس البرهان ينطبق بالضرورة. (تجد برهان المبرهنة 3.2.1 في نهاية هذا القسم).

السؤال #5: بنود الحدود في العلاقة التكرارية

لنأخذ علاقة تكرارية أخرى:

$$L_0 = 2 \qquad (3.6)$$
$$L_1 = 1$$
$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

لكل $n \geq 2$.

وهذا يعني أن $L_2 = L_1 + L_0 = 3$ وأن $L_3 = L_2 + L_1 = 4$ وهكذا:

n	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	…
L_n	*2*	*1*	*3*	*4*	*7*	*11*	*18*	*29*	…

هذا هو التسلسل المعروف لأعداد لوكاس (Lucas) والتي سنستخدمها أكثر من مرة في هذا الكتاب. صيغة L_n غير واضحة. لاحقاً في هذا الفصل، سنتطوّر تقنية ممنهجة تتيح لنا اشتقاق صيغة.

لكن إن لم تنجح في البداية، عليك أن تخفض معاييرك: أحياناً مجرد وجود حد علوي للبند ذي الترتيب n في التسلسل أمر مفيد. في هذه الحالة، أحد الحدود العليا

السهلة هو $L_n < 2^n$ والتي يبدو أنها تستوعب كل قيم $n \geq 1$. على الأقل التعبير صحيح لـ $1 \leq n \leq 7$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128

(في الواقع، يبدو أن الحد وافر جداً. يطلب التمرين 9 منك إثبات حدّ أضيق).

لإثبات الحد العلوي، عرّف التعبير:

$$S(n): L_n < 2^n$$

تم الإثبات بالاستقراء القوي. عندما $n = 1$ يكون $L_1 = 1$ بالتعريف. إضافة لذلك فإن $2 = 2^1$، ويتبع ذلك إن $L_1 < 2^1$ وهكذا تكون $S(1)$ صحيحة. عندما $n = 2$ يكون $L_2 = 3$ و$2^2 = 4$. ويتبع ذلك أن $L_2 < 2^2$ وهكذا تكون $S(2)$ صحيحة. (عندما طبّقنا المبرهنة 3.2.3 اخترنا $n_0 = 1$ و $n_1 = 2$. تتطلب جزئية الحالات الأساس أن نُظهر أن $S(1)$ و $S(2)$ صحيحتان، وهذا ما قمنا به).

الآن، افترض أن k عدد صحيح، و$k \geq 2$ وأن $S(j)$ صحيحة لكل قيم j التي تحقق المتباينة $1 \leq j \leq k$، تحديداً:

$L_j < 2^j$ لكل قيم j التي تحقق المتباينة $1 \leq j \leq k$.

يجب أن نبيّن أن $S(k+1)$ صحيحة، تحديداً $L_{k+1} < 2^{k+1}$. الآن،

$L_{k+1} = L_k + L_{k-1}$ باستخدام علاقة التكرار

$$< 2^k + 2^{k-1} \quad \text{باستخدام } IHYP$$

$$= 2^{k-1}(2 + 1)$$
$$= 2^{k-1}.3$$
$$< 2^{k-1}.2^2$$
$$= 2^{k+1}$$

وعليه فإن $L_{k+1} < 2^{k+1}$، إذن $S(k+1)$ تكون صحيحة. وعليه تكون $L_n < 2^n$ لكل الأعداد الصحيحة $n \geq 1$.

من الأهمية بمكان فهم كيف يمكن أن نطبّق فرضية الاستقراء على كلٍ من L_k وL_{k-1} في السطر الثاني من الحسابات المبينة أعلاه. وسبب ذلك أنه، لأن k قيمتها 2 على الأقل فإن $k - 1$ تكون على الأقل 1. بما أن فرضية الاستقراء تفترض أن $S(j)$ صحيحة لكل قيم j التي تحقق المتباينة $1 \leq j \leq k$ فإننا نستطيع استخدام $L_k < 2^k$ و$L_{k-1} < 2^{k-1}$.

السؤال 105: ماذا سيحدث إذا ما حاولتَ إثبات أن $L_n < 2^n$ لكل قيم $n \geq 0$ ولا تحقق الحالات الأساسية؟

إثبات مبدأ الاستقراء الرياضي

يستخدم إثبات المبرهنة 3.2.1 مبدأ بديهياً يعرف بـ "مبدأ الترتيب الحسن" (The Well-Ordering Principle).

البديهية 3.2.4 (مبدأ الترتيب الحسن): مجموعة جزئية غير فارغة من الأعداد الصحيحة محدودة من الأسفل تحتوي عنصراً أصغر.

"محدودة من الأسفل" (Bounded Below) تعني وجود عدد L بحيث يكون $L \leq x$ لكل عدد صحيح x في المجموعة. لا ينطبق مبدأ الترتيب الحسن على مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية $\{0, \pm 2, \pm 4, ...\}$ لأنها ليست محدودة من الأسفل.

برهان المبرهنة 3.2.1: نبرهن بالتناقض. افترض أن شَرطَي المبرهنة صحيحان، لكنها ليست الحالة أن $S(n)$ صحيحة لكل $n \geq n_0$. خذ مجموعة الأعداد الصحيحة $\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, ...\}$.

يوجد على الأقل عدد صحيح واحد في هذه المجموعة يجعل التعبير S خاطئ. اجمع كافة الأعداد الصحيحة في مجموعة وسمّها F، لاحظ أن كل عنصر في F يكون على الأقل $n_0 + 1$. وهذا لأن $S(n_0)$ صحيحة بافتراض الحالة الأساس.

وعليه فإن هذه المجموعة F من الأعداد الصحيحة تكون غير فارغة ومفتوحة من الأسفل، وهكذا يخبرنا مبدأ الترتيب الحسن أنه يتضمن عنصراً أصغر؛ لنفترض إنه m، لاحظ أن $m \geq n_0 + 1$. وعليه تكون $S(m)$ خاطئة بكل تأكيد، لكن $S(m-1)$ لابدّ أن تكون صحيحة. وسبب هذا هو أن m هو العدد الصحيح

الأصغر قيمة في المجموعة $\{n_0, n_0+1, n_0+2, ...\}$ والذي يجعل التعبير خاطئاً، أيضاً لأن $m-1 \geq n_0$.

لكن فرضية المبرهنة تشير إلى أن $S(m-1)+1) = S(m)$ هو تعبير صحيح، ما يدحض حقيقة أن $S(m)$ صحيحة! وعليه فإن $S(n)$ صحيحة لكل قيم $n \geq n_0$.

الملخص

الاستقراء الرياضي هو تقنية لإثبات العبارة الرياضية $S(n)$ التي تعتمد على عدد صحيح n. يتطلب الاستقراء الرياضي جزئين: التحقق من الحالة الأساس وإثبات الخطوة الاستقرائية. في الخطوة الاستقرائية نبرهن أن صحّة $S(k)$ تتضمن إثبات صحة $S(k+1)$. أحياناً لا تنطبق صحّة $S(k)$ لوحدها على صحّة $S(k+1)$، وعليه فإن مبدأ الاستقراء الرياضي القوي قد يعمل. في هذه الخطوة الاستقرائية، يفترض أن صحة $S(j)$ لجميع قيم j التي تحقق $j \leq k$ وهذا بالتالي يثبت أن $S(k+1)$ صحيحة.

التمارين

1. (أ) برهن: لـ $n \geq 0$، $3^n - 1$ تقبل القسمة على 2.

(ب) برهن: لـ $n \geq 0$، $4^n - 1$ تقبل القسمة على 3.

ضع مبرهنة عامّة وبرهنها.

2. لنفترض أن a وb عددان صحيحان غير متساويين. برهن أنه لـ $n \geq 0$، $a^n - b^n$ تقبل القسمة على $a - b$.

3. برهن: لـ $n \geq 2$، $\prod_{j=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{j^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$. رمز الضرب يعني

$$\prod_{j=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{j^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

4. استكشف وبرهن الصيغ لكل من الضرب التالية:

(أ) $\prod_{j=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{j}\right)$

(ب) $\prod_{j=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{j}\right)$

5. استكشف وبرهن صيغة للمجموع $\sum_{j=1}^{n}(-1)^j j^2$

6. خمّن وبرهن صيغة للمجموع $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j$. (يمكنك أن تسمّي هذا بصيغة "أيام عيد الميلاد الاثني عشر" لأنه عندما $n = 12$ فإن المجموع يساوي إجمالي عدد الهدايا المذكورة في الأغنية)(*).

7. أعطِ برهاناً توافقياً: لـ $n \geq 1$، $\sum_{j=1}^{n} j! < (n+1)!$

قم بذلك بطرح سؤال ثم جادل التخلف في العدّ أو الإفراط في العدّ (Down-Count) أو (Over-Count) بإحدى الإجابات.

(*) هي إحدى ترانيم عيد الميلاد الإنجليزية المعروفة، لمزيد من المعلومات، طالع: (https://en.wikipedia.org/wiki/The_Twelve_Days_of_Christmas_(song) (المترجمة).

8. يقترح الحل في (3.4)، أن المجموع $\sum_{j=1}^{n} j! \leq \frac{1}{2}(n+1)!$ قد يكون صحيحاً.

(أ) أثبت هذه المتباينة الحادة(*) بالاستقراء

(ب) أعطِ براهناً توافقياً.

9. بالنسبة إلى علاقة التكرار المعطاة في (3.6) أثبت أن $L_n < 2^n$ لـ $n \geq 1$.

(أ) أثبت هذه المتباينة $L_n \leq 1.7^n$. عند أي قيمة من قيم n يجب أن تبدأ الاستقراء؟

(ب) ما هو الشيء المميز للرقم 1.7؟ اضبط حلّك في الفرع (أ) من السؤال لإنشاء أضيق حد ممكن.

10. عرّف العلاقة التكرارية من خلال $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ و $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ لـ $n \geq 3$. برهن أن $a_n \leq 1.9^n$ لجميع قيم $n \geq 0$. هل يمكنك برهنة حدٍ أضيق؟

11. عرّف $a_0 = 1$ لـ $n \geq 1$، عرّف $a_n = na_{n-1} + 1$. برهن: لكل قيم $n \geq 0$، $a_n = \sum_{j=0}^{n} (n)_j$.

(*) المتباينة الحادة تعني أنه قد تم الوصول إلى الحد النظري ولا يوجد متسع لتحسين تلك المتباينة تحديداً (المترجمة).

12. برهن: إذا كانت n عدداً صحيحاً، $n \geq 2$، فإنه إما أن تكون n عدداً أولياً أو أنها محللة إلى ضرب من الأعداد الأولية. (هذه هي المبرهنة الأساسية للحساب).

13. افترض أن العبارة التالية صحيحة: إذا كان A و B مجموعتين مفكوكتين محدودتين، فإن $|A \cup B| = |A| + |B|$. أثبت ما يلي باستخدام الاستقراء على n: لـ $n \geq 2$ إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات محدودة ومفكوكة، فإن:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

14. لتكن $n \geq 1$. برهن أنه في أي لوحة شطرنج أبعادها $2^n \times 2^n$ إذا ما أزيل مربع واحد فإنه يمكن تبليطها كاملة باستخدام بلاطات على شكل حرف L. (تحتل هذه البلاطات 3 مربعات متجاورة على شكل حرف L في اللوحة).

3.3 استخدام الدوال المولّدة، الجزء الأول

مهمتنا فيما يخص ما تبقى من هذا الفصل هي تعريف واستخدام الدوال المولّدة لحل مسائل التوافيق. يُستخدم الجبر لمحاكاة الحسابات التي تتضمن مبدئي الجمع والضرب. إن كمية المعلومات التي يمكن استخراجها من الدوال المولّدة هائلة. ويقود استخدامها غالباً إلى براهين ذكية وتبصرة جديدة.

بكم طريقة يمكن لفريق تسجيل 6 نقاط في لعبة كرة السلة؟ (في كرة السلة، تكسب كل رمية نقطة أو نقطتين أو ثلاث نقاط. هنا نهتم بعدد كل نوع من الرميات، وليس ترتيب أداء تلك الرميات).

على نحو لا يمكن إنكاره، هذه المسألة بسيطة بما يكفي لحلها بالقوة الفظة لأن 6 ليس بعددٍ كبير. في الواقع، نحتاج لعد تقسيمات 6 إلى أجزاء بحجم 3 كحدٍ أقصى.

يوجد 7 تقسيمات، وهي تحديداً:

3+3 2+2+2 1+1+1+1+1+1

1+2+3 1+1+2+2

1+1+1+3 1+1+1+1+2

لكن هذا يصبح غير منطقيٍ عندما يكون السؤال عن 98 نقطة مثلاً – وهو عدد أكثر واقعية في مباريات كرة السلة – بدلاً من 6 نقاط.

السؤال 106: بكم طريقة يمكن تسجيل 7 نقاط؟

الدوال المولّدة ستجيب عن سؤالي النقاط الست وسؤال 98 نقطة بنفس الجهد، وهنا تكمن المنفعة. دعنا نبدأ بمعالجة سؤال النقاط الست أولاً.

- عند تسجيل 6 نقاط، فإن مساهمة كل رمية ذات نقطة واحدة في الإجمالي:

0 نقطة ⊕ نقطة واحدة ⊕ نقطتان ⊕ 3 نقاط ⊕ 4 نقاط ⊕ 5 نقاط ⊕ 6 نقاط

حيث ⊕ تعني (أو) حصرياً. بتمثيل هذا التعبير جبرياً على النحو

$$x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

حيث استبدلت رموز ⊕ بالجمع العادي ويظهر إجمالي المساهمة في القوى.

- مساهمة الرميات ذات النقطتين في إجمالي 6 نقاط:

0 نقطة ⊕ نقطتان ⊕ 4 نقاط ⊕ 6 نقاط

جبرياً: $x^0 + x^2 + x^4 + x^6$.

- أخيراً، مساهمة الرميات ذات الثلاث نقاط:

0 نقطة ⊕ 3 نقاط ⊕ 6 نقاط

جبرياً: $x^0 + x^3 + x^6$

اضرب هذه التعابير الجبرية الثلاثة معاً باستخدام حساب من نوع مبدأ الضرب والدوال المولّدة

$$\underbrace{(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)}_{\text{مساهمات الرميات ذات النقطة}}\underbrace{(1 + x^2 + x^4 + x^6)}_{\text{مساهمات رميات النقطتين}}\underbrace{(1 + x^3 + x^6)}_{\text{من رميات 3 نقاط}}$$

ثم وزّع البنود واجمعها، (وأفضل طريقة لعمل هذا استخدام معالج رمزي كـ مابل (*Maple*) لإعادة كتابة التعبير على النحو:

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + 7x^7 + 8x^8 + 8x^9 + 8x^{10} + 7x^{11} + 7x^{12} + 5x^{13} + 4x^{14} + 3x^{15} + 2x^{16} + x^{17} + x^{18}$$

للإجابة عن السؤال الأصلي، نجد معامل البند x^6، وهو 7.

لماذا تنجح هذه الطريقة؟ يكشف الشكل 3.1 التفاصيل الجبرية المخفية. يوجد $3 \times 4 \times 7 = 84$ بند عندما يتم ضرب الدالة (3.7) ويظهر كل بند قبل التبسيط على هيئة x^{a+b+c}، حيث a هو إجمالي مساهمات الرميات ذات النقطة الواحدة، وb هو إجمالي مساهمات الرميات ذات النقطتين، وc هو إجمالي مساهمات الرميات ذات الثلاث نقاط. بعد تبسيط الأسس، فإن كل أس يخزّن إجمالي النقاط. ثم بتجميع البنود المتشابهة – الخطوة الأساسية – نحصل على أن معامل x^6 يساوي عدد الطرق التي يمكن أن يسجل الفريق بها k نقاط تحديداً.

$$
\begin{aligned}
&(x^0 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^0 + x^2 + x^4 + x^6)(x^0 + x^3 + x^6) \\
&\quad = x^{0+0+0} + x^{1+0+0} + x^{2+0+0} + x^{3+0+0} + x^{4+0+0} + x^{5+0+0} + x^{6+0+0} \\
&\qquad + x^{0+2+0} + x^{1+2+0} + x^{2+2+0} + x^{3+2+0} + x^{4+2+0} + x^{5+2+0} + x^{6+2+0} \\
&\qquad + x^{0+4+0} + x^{1+4+0} + x^{2+4+0} + x^{3+4+0} + x^{4+4+0} + x^{5+4+0} + x^{6+4+0} \\
&\qquad + x^{0+6+0} + x^{1+6+0} + x^{2+6+0} + x^{3+6+0} + x^{4+6+0} + x^{5+6+0} + x^{6+6+0} \\
&\qquad + x^{0+0+3} + x^{1+0+3} + x^{2+0+3} + x^{3+0+3} + x^{4+0+3} + x^{5+0+3} + x^{6+0+3} \\
&\qquad + x^{0+2+3} + x^{1+2+3} + x^{2+2+3} + x^{3+2+3} + x^{4+2+3} + x^{5+2+3} + x^{6+2+3} \\
&\qquad + x^{0+4+3} + x^{1+4+3} + x^{2+4+3} + x^{3+4+3} + x^{4+4+3} + x^{5+4+3} + x^{6+4+3} \\
&\qquad + x^{0+6+3} + x^{1+6+3} + x^{2+6+3} + x^{3+6+3} + x^{4+6+3} + x^{5+6+3} + x^{6+6+3} \\
&\qquad + x^{0+0+6} + x^{1+0+6} + x^{2+0+6} + x^{3+0+6} + x^{4+0+6} + x^{5+0+6} + x^{6+0+6} \\
&\qquad + x^{0+2+6} + x^{1+2+6} + x^{2+2+6} + x^{3+2+6} + x^{4+2+6} + x^{5+2+6} + x^{6+2+6} \\
&\qquad + x^{0+4+6} + x^{1+4+6} + x^{2+4+6} + x^{3+4+6} + x^{4+4+6} + x^{5+4+6} + x^{6+4+6} \\
&\qquad + x^{0+6+6} + x^{1+6+6} + x^{2+6+6} + x^{3+6+6} + x^{4+6+6} + x^{5+6+6} + x^{6+6+6}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 \\
&\quad + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} \\
&\quad + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} \\
&\quad + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} \\
&\quad + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} \\
&\quad + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} \\
&\quad + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} \\
&\quad + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16} \\
&\quad + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16} + x^{17} + x^{18} \\
&= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + 7x^7 + 8x^8 + 8x^9 \\
&\quad + 8x^{10} + 7x^{11} + 7x^{12} + 5x^{13} + 4x^{14} + 3x^{15} + 2x^{16} + x^{17} + x^{18}.
\end{aligned}$$

الشكل 3.1: البنود الـ 84 في مثال توسيع الدالة المولّدة.

الإجابة عن أسئلة أخرى

يجيب الدالة المولّدة (3.8) عن أكثر من مجرد السؤال الأصلي. بكم طريقة يمكن للفريق تسجيل 5 نقاط؟ الإجابة هي معامل x^5، وهو 5. ماذا عن 3 نقاط؟ الإجابة هي معامل x^3، وهو 3.

على الرغم من أن معامل x^{10} هو 8، لا يوجد 8 طرق لتسجيل 10 نقاط في كرة السلة. وهذا بسبب أن دالة $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(1 +$ $x^2 + x^4 + x^6)(1 + x^3 + x^6)$ يحدّ من مساهمة كل نوع من أنواع الرميات لست نقاط على الأكثر. إذن إجابة السؤال "بكم طريقة يمكن للفريق تسجيل 10 نقاط إذا سجل هذا الفريق على الأكثر 6 رميات ذات النقطة الواحدة، على الأكثر 3 رميات ذات نقطتين، على الأكثر رميتان ذات 3 نقاط؟" هو 8.

السؤال 107: هل معامل x^7 في الدالة المولدة مساوٍ لعدد الطرق التي يستطيع الفريق بها أن يسجّل سبع نقاط أم أن نفس الموضوع سيثار؟

للإجابة عن سؤال عدد الطرق التي يستطيع بها الفريق تسجيل 10 نقاط، يجب أن نجد معامل x^{10} في $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{10})(1 + x^3 + x^6 + x^9)$

باستخدام مابل، الإجابة هي 14. بالرجوع إلى السؤال الأصلي عن عدد الطرق التي يمكن أن يسجل بها الفريق 98 نقطة، علينا أن نجد معامل x^{98} في

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{98})(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{98})(1 + x^3 + x^6 + \cdots + x^{96})$$

بمساعدة مابل، نحصل على الإجابة 850.

إن الدوال المولّدة قادرة على الإجابة عن العديد من الأسئلة دفعة واحدة. هل من الممكن وجود دالة مولّدة واحدة تجيب عن سؤال عدد طرق إحراز الفريق عدد k من النقاط لأي قيمة k؟ يوجد:

$$(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots) \quad (3.9) \ldots\ldots$$

إجابة السؤال تساوي معامل x^k في الدالة المولّدة أعلاه.

قد تثير الدالة المولّدة الأخيرة بعض الاستغراب. كيف يمكننا لعملية الضرب أن تكون مقنعة في حين أن كل بند هو مجموع متناه؟ هل حقاً يمكن الإجابة عن سؤالي النقاط الست والنقاط الـ98 ببذل نفس الجهد؟

كل بند في عملية الضرب المبيّنة في (3.9) هي متسلسلة قوى. أما صيغة المتسلسلة الهندسية المتعارف عليها في علم التفاضل والتكامل فهي:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad \text{لـ} \quad |x| < 1$$

إذا استبدلت x بـ x^2 تحصل على:

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + \cdots$$
$$= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$$

أما إذا استبدلت x بـ x^3 تحصل على:

$$\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + (x^3)^2 + (x^3)^3 + \cdots$$
$$= 1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots$$

وهكذا توجد طريقة مختصرة لكتابة الدالة المولّدة (3.9) لعدد الطرق التي يمكن أن يسجل بها الفريق أي عددٍ من النقاط:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

هل مثل هذا التعبير إجابة مقنعة للسؤال الأصلي؟ بمعنى آخر، إذا سألت عن عدد الطرق التي يستطيع بها فريق كرة السلة تسجيل عدد k من النقاط وأخبرك أحدهم أن الإجابة هي معامل x^k في الدالة المولّدة المعطاة، فهل هذه إجابة جيّدة؟ هذا القسم والقسم التالي كفيلان بإقناعك بذلك.

المزيد من السحر

إن مسألة النقاط الست مكافئة لـ: كم عدد القوائم المكونة من 3 عناصر (z_1, z_2, z_3) التي تحقق $z_1 + z_2 + z_3 = 6$، حيث $z_1 \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ و$z_2 \in \{0,2,4,6\}$ و$z_3 \in \{0,3,6\}$؟ هنا z_1 هي المساهمة من الرميات ذات النقطة الواحدة، z_2 هي المساهمة من الرميات ذات النقطتين و z_3 هي المساهمة من الرميات ذات النقاط الثلاث. المسائل التي تناسب هذا الشكل يوصى بها للدوال المولّدة. قدّمنا مثل هذه المسائل في القسم 2.2.

مثال: البريد

بكم طريقة يمكننا تحضير رسالة قيمتها البريدية 39 سنتاً باستخدم طوابع بريدية من فئة 3 سنتات و5 سنتات فقط؟

يمكن تمثيل مساهمة الطوابع من فئة 3 سنتات جبرياً كـ:

$$x^0 + x^3 + x^6 + \cdots + x^{36} + x^{39}$$

أما مساهمة الطوابع من فئة 5 سنتات فيمكن تمثيلها جبرياً كـ:

$$x^0 + x^5 + x^{10} + \cdots + x^{30} + x^{35}$$

الإجابة هي معامل x^{39} في:

$$(1 + x^3 + x^6 + \cdots + x^{36} + x^{39})(1 + x^5 + x^{10} + \cdots + x^{30} + x^{35})$$

باستخدام مابل نجد أن قيمة المعامل هي 3.

السؤال 108: كم طريقة يوجد لصرف 14 سنتاً باستخدام 5 قطع من فئة البنس، و3 قطع من فئة النيكيل [خمسة سنتات] وقطعة واحدة من فئة دايم [عشرة سنتات]؟ اكتب دالة مولدة وجد المعامل.

كما في سؤال كرة السلة، يمكن الإجابة عن سؤال عدد الطرق التي يمكن فيها وضع طوابع بريدية بقيمة k سنتاً باستخدام طوابع من فئة 3 سنتات وأخرى من فئة 5 سنتات، باستخدام معامل x^k في الدالة المولدة الموسّعة $(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots)$ أو باستخدام الصيغة المكافئة المختصرة:

$$\frac{1}{(1-x^3)(1-x^5)} \qquad (3.10)$$

هذه المسألة مكافئة لعدّ قوائم مكونة من عددين صحيحين (z_1, z_2) يحققان المعادلة:

$$z_1 + z_2 = 39$$
$$z_1 \in \{0,3,6,9,\ldots,\}$$
$$z_2 \in \{0,5,10,15,\ldots,\}$$

لأن z_1 تساوي مساهمة الطوابع من فئة 3 سنتات في إجمالي القيمة وz_2 تساوي مساهمة الطوابع من فئة 5 سنتات.

السؤال 109: كيف يمكن أن يتغيّر الدالة المولّدة المختصرة إذا كان بإمكانك استخدام طابعين من فئة اثني عشر سنتاً أيضاً؟

مثال: تقسيمات العدد الصحيح

كم تقسيماً للعدد 12 تتضمن أجزاءً حجمها 5 على الأكثر؟

يوجد تقسيمات بعدد القوائم المكونة من 5 عناصر $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ التي تحقق المعادلة:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 12$$
$$z_1 \in \{0,1,2,3, \dots\}$$
$$z_2 \in \{0,2,4,6, \dots\}$$
$$\vdots$$
$$z_5 \in \{0,5,10,15, \dots\}$$

الإجابة هي معامل x^{12} في المعادلة:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)$$
$$(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots),$$

أو بالصورة المختصرة

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

باستخدام مايبل، الحل هو 47.

السؤال 110: كيف يمكن أن يتغيّر الدالة المولّد المختصر إذا أردت معرفة عدد تقسيمات من 12 التي تتضمن أجزاء بحجم 5 على الأكثر، لكن بدون أي أجزاء بحجم 4؟

الدوال المولّدة البسيطة

الآن وبعد أن تعرّفنا بعض الشيء على ما تفعله الدوال المولّدة، آن الأوان لتعلّم ماهيتها. بصورة غير شكلية، الدالة المولّدة هو متسلسلة قوى ترتّب تسلسل أعداد بهدف عرضها. الدالة المولّدة البسيطة للتسلسل $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ هو:

دالة المولد العادي (Ordinary Generating Function) (OGF)

$$\sum_{k \geq 0} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

ثمة طريقة في متناول اليد لاختصار التسلسل $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$، وهي $\{a_k\}_{k \geq 0}$. لاحظ أن المجموع من $k = 0$ إلى مالانهاية.

التعريف 3.3.1 (**دالة المولّد العادي**): دالة المولد العادي لتسلسل أرقام $\{a_k\}_{k \geq 0}$ يُعَرّف كمجموع

$$\sum_{k \geq 0} a_k x^k$$

الميّزة الأساسية هي أن a_k هو معامل x^k. بهذه الطريقة، تشبه دالة المولّد العادي خزانة ملفات، وx^k هو ترمز الملف الذي يحتوي البند a_k. أما المصطلح "بسيط" فيميّز هذه الدالة المولد عن أنواع أخرى. يتضمن القسم 3.4 المزيد عن هذا الموضوع.

متسلسلات القوى شبه الشكلية: حوار ضروري

الدوال المولّدة هي متسلسلات قوى، إذن يبدو أننا بحاجة للاعتماد على حسابات التفاضل والتكامل للتعامل معها. هذا صحيح جزئياً. ذكرنا أن إحدى أبرز متسلسلات القوى التي درستها في التفاضل والتكامل كانت المتسلسلات الهندسية:

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} x^k$$
$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

هذا التقارب، إذا وفقط إذا، كان $|x| < 1$ (نصف قطر التقارب)، وإذا تحقق الشرط، فإنه يتقارب نحو $\frac{1}{1-x}$

وهذا يعني أنه من وجهة النظر التحليلية، يصح إن نقول أن هاتين الدالتين لـ x متشابهتان طالما أن $|x| < 1$؛ بمعنى أن:

$$\sum_{k\geq 0} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \text{لـ} \quad |x| < 1$$

السؤال 111: ما هي قيمة المتسلسلة $\sum_{k\geq 0}(-\frac{1}{3})^k$؟ وقيمة المتسلسلة $\sum_{k\geq 1} 4^k 5^{-k}$؟ وقيمة المتسلسلة $\sum_{k\geq 0} 3^k$؟

كما يمكننا تنفيذ أمورٍ أخرى كاستبدال x بـ $2x$ وتمثيل متسلسلة القوى للدالة $\frac{1}{1-2x}$؛ أي أن:

$$\sum_{k\geq 0}(2x)^k = \sum_{k\geq 0} 2^k x^k = \frac{1}{1-2x} \qquad \text{لـ} \quad |x| < \frac{1}{2}$$

السؤال 112: لماذا نصف قطر تقارب المتسلسلة هو $|x| < \frac{1}{2}$ بدلاً من $|x| < 1$؟

في الواقع، أجرينا شيئاً شبيهاً بهذا عندما استبدلنا x بـ x^2 للحصول على الصيغة المختصرة للدالة المولدة (3.9).

في التوافيق، يكون منظورنا على الأغلب جبرياً وليس تحليلياً. متسلسلة القوى $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ تعرض التسلسل 1,1,1,1... لأن معامل x^k يكون دائماً 1. بهذه الطريقة نعتبر أن $\sum_{k\geq 0} x^k$ دالة مولد عادية للتسلسل $\{1\}_{k\geq 0}$. لكننا أيضاً سنستعير الصيغة المختصرة $\frac{1}{1-x}$ من التفاضل والتكامل [التحليل] وسنكتب المجموع

$$\sum_{k\geq 0} x^k = \frac{1}{1-x} \tag{3.11}$$

ثم نستمر بجميع أنواع العمليات على هذين التعبيرين كما لو أنهما كانا تبادليين. لن نذكر التقارب حتى. بنفس الطريقة، سنذكر أن التعبيرات على طرفي إشارة المساواة = في المعادلة التالية هي دوال مولدة بسيطة لـ $\{2^k\}_{k\geq 0}$.

$$\sum_{k\geq 0} 2^k\, x^k = \frac{1}{1-2x} \tag{3.12}$$

الطرف الأيسر هو صورة مبسّطة (معامل x^k متاح) والطرف الأيمن هو صورة مختصرة.

تتيح لنا النظرية الجبرية لمتسلسلة القوى الشكلية الاستفادة من مثل هذا التبسيط الركيك. جميع العمليات الجبرية التي يلزمنا تنفيذها في الدوال المولّدة مشمولة، ويتضمن هذا الإضافة والضرب والتحليل الجزئي. كما يمكن اعتبار التفاضل والتفاضل العكسي عمليات شكلية. لن نطوّر هذه النظرية، لكننا سنستخدمها بحرّية. طالع التمارين في القسم 3.4 للاطلاع على بعض النتائج الأساسية.

في هذا السياق، فإن الرمز x في الدالة المولّدة *غير محددة* بدلاً من أن يكون **متغيراً**. يمكن الحصول على معلومات مفيدة عن طريق تقييم الدوال المولّدة عند قيم محددة لـ x. لكن ضع في الاعتبار أن القيام بذلك يتطلب العودة إلى النظرية التحليلية واختبار قضايا التقارب.

الدوال المولّدة العادية الأساسية

يحتاج مستخدمو الدوال المولّدة بعض السلاسة في ترجمة التسلسل إلى دوال مولّدة مختصرة وبالعكس. فيما يلي توضيح لتطبيق هذه التقنيات على أهم ثلاث فئات من الدوال المولّدة البسيطة.

الدوال المولّدة البسيطة والمتسلسلات الهندسية

رأينا مسبقاً أن $\frac{1}{1-x}$ هي صيغة مبسطة للدالة المولدة البسيطة لجميع التسلسلات الأولى $\{1\}_{k\geq 0}$، لأن

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k\geq 0} x^k$$

بصورة أكثر عمومية، إذا كانت c عدداً حقيقياً، فإن الدالة المولدة البسيطة لـ $\{c^k\}_{k\geq 0}$ هو $\frac{1}{1-cx}$ لأن:

$$\frac{1}{1-cx} = \sum_{k\geq 0}(cx)^k = \sum_{k\geq 0} c^k\, x^k$$

الحالة الخاصة $c = -1$ تستخدم بكثرة:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\, x^k$$

وعليه فإن $\frac{1}{1+x}$ هي الدالة المولدة البسيطة للتسلسل البديل $\{(-1)^k\}_{k\geq 0}$.

السؤال 113: ما هو التسلسل الذي يعتبر $\frac{1}{1+3x}$ الدالة المولدة البسيطة له؟

الدالة المولدة البسيطة ومبرهنة ذات الحدين

لنفترض أن $y = 1$ في مبرهنة ذات الحدين للحصول على المعادلة:

$$((1+x)^n) = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\right) x^k = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k} x^k$$

وهذا يعني أنه للقيمة الثابتة n فإن$(1+x)^n$ هو الدالة المولدة البسيطة لمعاملات ذات الحدين $\{\binom{n}{k}\}_{k\geq 0}$. لاحظ أن المجموع الأول يتوقف عند قيمة n، في حين أن المجموع الثاني لامتناه. لا بأس بكتابة المتباينة بين المجموعين لأن $\binom{n}{k} = 0$ عندما $k > n$. في هذا السياق، فإننا نبرر قولنا إن التعبير $(1+x)^n$ هو الدالة المولدة البسيطة للتسلسل اللامتناهي:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}, \underbrace{\binom{n}{n+1}}_{=0}, \underbrace{\binom{n}{n+2}}_{=0}, \dots$$

بدلاً من مجرد كونه دالة مولدة بسيطة للتسلسل المحدود $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$.

السؤال 114: ما هو معامل x^5 في التعبير $(1-x)^9$؟

الدوال المولّدة البسيطة والمجموعات المتعددة

يمكننا استخدام تقنية المتسلسلة الرمزية لاشتقاق الدالة المولدة البسيطة لمعاملات ذات الحدين $\binom{n}{k}$ في الطريقة التالية دون استخدام مبرهنة ذات الحدين. معامل ذات الحدين $\binom{n}{k}$ يساوي عدد القوائم التي تتضمن n من العناصر التي تحلّ المعادلة $z_1 + z_2 + \dots + z_n = k$، حيث إن كل z_i يساوي إما 0 أو 1. نرمز خيار كل z_i بالبند $x^0 + x^1$ أو $x + 1$. أما ضرب عدد من نسخ n من هذا البند ببعضها فيعطينا الدالة المولدة البسيطة لعدد القوائم المكونة من n التي تحل المعادلة:

$$\underbrace{(1+x)}_{z_1\in\{0,1\}}\underbrace{(1+x)}_{z_2\in\{0,1\}}\dots\underbrace{(1+x)}_{z_n\in\{0,1\}} = (1+x)^n$$

هذا كل ما في الأمر، طالما أننا نعرف عدد القوائم المكونة من n التي تحل المعادلة الحدين $\binom{n}{k}$.

تنطبق نفس الفكرة للحصول على الصيغة المبسطة من الدالة المولدة البسيطة لتسلسل معاملات متعددة الاختيارات $\left\{\left(\binom{n}{k}\right)\right\}_{k\geq 0}$. للعدد الصحيح الموجب الثابت n، نعلم أن $\left(\binom{n}{k}\right)$ هو عدد القوائم المكونة من n $(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)$ التي تحلّ المعادلة $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = k$، حيث إن كل z_i هو عدد صحيح غير سالب. بالاستئناف كما أوردنا سابقاً، المتسلسلة الرمزية لكل z_i هي $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. لدينا صيغة مختصرة لهذا وهي $\frac{1}{1-x}$. أما ضرب نسخ من n ببعضها فيعطينا الدالة المولدة البسيطة للمعاملات متعددة الاختيارات:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^n = \frac{1}{(1-x)^n}$$

ثمة ازدواجية لطيفة بين الدوال المولّدة البسيطة لمعاملات ذات الحدين والمعاملات متعددة الاختيارات:

- $(1+x)^n$ هو الدالة المولدة البسيطة لـ $\left\{\left(\binom{n}{k}\right)\right\}_{k\geq 0}$.
- $(1-x)^{-n}$ هو الدالة المولدة البسيطة لـ $\left\{\binom{n}{k}\right\}_{k\geq 0}$.

السؤال 115: ما هو معامل $(x)^8$ في الحد $\frac{1}{(1-x)^7}$؟

أمثلة عديدة

نعرف الآن أن العديد من الدوال المولّدة البسيطة تكون بصورة مختصرة أو بصورة مبسّطة. هنا، n هي عدد صحيح موجب ثابت و c هي عدد حقيقي ثابت:

الدالة المولد البسيط (مختصر)	الدالة المولد البسيط (مبسّط)	الاختصار	التسلسل
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k\geq 0} x^k$	$\{1\}_{k\geq 0}$	$1,1,1,1, \ldots$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k\geq 0} (-1)^k x^k$	$\{(-1)^k\}_{k\geq 0}$	$1, -1, 1, -1, \ldots$
$\frac{1}{1-cx}$	$\sum_{k\geq 0} c^k x^k$	$\{c^k\}_{k\geq 0}$	$1, c, c^2, c^3, \ldots$
$(1 + x)^n$	$\sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} x^k$	$\left\{\binom{n}{k}\right\}_{k\geq 0}$	$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots$
$\frac{1}{(1-x)^n}$	$\sum_{k\geq 0} \left(\binom{n}{k}\right) x^k$	$\left\{\left(\binom{n}{k}\right)\right\}_{k\geq 0}$	$\left(\binom{n}{0}\right), \left(\binom{n}{1}\right), \left(\binom{n}{2}\right), \left(\binom{n}{3}\right),$

أول سطرين في الجدول هما حالتان خاصتان للسطر الثالث.

السؤال 116: ما هو معامل x^k في $\frac{1}{(1-5x)^9}$؟

توضّح الأمثلة التالية كيفية استخدام هذه الحقائق في حل مسائل التوافيق.

مثال: مسألة عن التوزيع

بكم طريقة يمكننا توزيع 15 شيئاً متطابقاً على 6 أشخاص متميزين إذا كان كل شخص سيأخذ شيئاً واحداً على الأقل؟

فكّر في المسألة كعدٍّ حلول المعادلة $z_1 + z_2 + \cdots + z_6 = 15$ حيث إن كل $z_i \in \{1,2,3,\dots\}$. وهذا يعني أنه للحصول على الدالة المولدة البسيطة نضرب 6 نسخ من $x + x^2 + x^3 + \cdots$ ببعضها البعض، $(x + x^2 + x^3 + \cdots)^6$ والإجابة هي معامل x^{15}.

هذا الدالة المولدة البسيطة لا يمكن التعرف عليه حتى نحلل x إلى العوامل:

$$x + x^2 + x^3 + \cdots = x(1 + x + x^2 + \cdots) = x \times \frac{1}{1 - x}$$

لذا فإن الدالة المولدة البسيطة المختصر هو $\frac{x^6}{(1-x)^6}$. للحصول على معامل x^{15}، ما علينا سوى إيجاد معامل $x^{15-6} = x^9$ في البند $\frac{1}{(1-x)^6}$. نظراً لأننا ندرك أن هذه هي الدالة المولدة البسيطة لـ $\left\{\left(\binom{6}{k}\right)\right\}_{k\geq 0}$، والإجابة هي $\left(\binom{6}{9}\right) = 2002$.

من الجدير بالذكر أن العامل x^9 له دور. فهو يغيّر المعامل الذي نريد إيجاده من معامل x^{15} إلى معامل x^9.

توافقياً، يرتبط هذا بتوزيع شيء واحد على كل من الأشخاص الستة (ثمة طريقة واحدة لعمل ذلك)، ومن ثم توزيع الأشياء الباقية $15 - 6 = 9$ بدون قيود.

السؤال 117: استخدم الدالة المولدة البسيطة للإجابة عن نفس السؤال، لكن بشرط أن يستلم كل شخص شيئين على الأقل.

مثال: مسألة توزيع أخرى

بكم طريقة يمكننا توزيع عدد k من الأشياء المتطابقة على 4 أشخاص متميزين، إذا كان كل شخص سيحصل على شيئين على الأكثر؟

هذا مكافئ لعد حلول المعادلة $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = k$ في مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة z_i

حيث إن كل $z_i \leq 2$. الدالة المولدة هو:

$$(1 + x + x^2) = (1 + x + x^2 + x^3 \ldots)^3 = \frac{1 + x + x^2}{(1 - x)^3}$$

توسيع المعادلة يعطي

$$\frac{1}{(1 - x)^3} + \frac{x}{(1 - x)^3} + \frac{x^2}{(1 - x)^3}$$

لإيجاد معامل x^k في التعبير السابق، ما علينا سوى تحديد معامل x^k في كل حدٍّ من البنود الثلاثة وجمعها. الإجابة هي:

$$\left(\binom{3}{k}\right) + \left(\binom{3}{k - 1}\right) + \left(\binom{3}{k - 2}\right)$$

والسبب هو، على سبيل المثال، معامل x^k في الحد $\frac{1}{(1-x)^3}$ يساوي $\left(\binom{3}{k}\right)$، لذا فإن معامل x^k في الحد $\frac{1}{(1-x)^3}$ يساوي $\left(\binom{3}{k-1}\right)$.

السؤال 118: فسّر الإجابة في سياق التوافيق. كيف يمكنك اشتقاق الإجابة بدون استخدام الدوال المولّدة؟

مثال: رمي أحجار النرد والتطابق الهام

بكم طريقة يمكننا الحصول على مجموع 18، عند رمي 5 أحجار نرد؟

لنفترض أن z_i هي القيمة الظاهرة على حجر النرد ذي الترتيب i، نريد حل المعادلة

$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 18$، حيث إن كل $z_i \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

وعليه فإننا نريد معامل x^{18} في $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^5$.

كيف يمكننا إيجاد هذا المعامل دون مساعدة الحاسوب وبدون ضرب المعاملات يدوياً؟ أولاً لاحظ أن:

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^5 = x^5(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^5$$

الآن نستخدم التطابق $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \frac{1-x^6}{1-x}$ من المبرهنة

3.2.2. نعوّض للحصول على الدالة المولدة البسيطة:

$$x^5\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^5 = x^5.(1-x^6)^5.\frac{1}{(1-x)^5}$$

المطلوب إيجاد معامل x^{18} في هذا الدالة المولدة البسيطة. وهذا يساوي معامل $x^{18-5} = x^{13}$ في البند

$$(1-x^6)^5.\frac{1}{(1-x)^5}$$

للحصول على هذا المعامل، من الأفضل استخدام الصيغة الموسّعة (المحللة) لكلا البندين في هذا الضرب. يمكن تحليل البند $(1-x^6)^5$ باستخدام نظرية ذات الحدين:

$$(1-x^6)^5 = \binom{5}{0} - \binom{5}{1}x^6 + \binom{5}{2}x^{12} - \binom{5}{3}x^{18} + \binom{5}{4}x^{24} - \binom{5}{5}x^{30}$$

أصبح تحليل التعبير $\frac{1}{(1-x)^5}$ واضحاً الآن:

$$\frac{1}{(1-x)^5} = \binom{5}{0} + \left(\!\binom{5}{1}\!\right)x + \left(\!\binom{5}{2}\!\right)x^2 + \left(\!\binom{5}{3}\!\right)x^3 + \cdots$$

الدالة المولدة البسيطة هو حاصل ضرب هذه البنود، لذا ولإيجاد معامل x^{13} في الضرب علينا تحديد كيف ينتج الحد x^{13} عند إجراء عملية الضرب. تدخل في هذه العملية 3 بنود فقط:

- البند $\binom{5}{0}$ في $(1-x^6)^5$ مضروب بالبند $x^{13}\left(\binom{5}{13}\right)$ في $\frac{1}{(1-x)^5}$.
- البند $-\binom{5}{1}x^6$ في $(1-x^6)^5$ مضروب بالبند $x^7\left(\binom{5}{7}\right)$ في $\frac{1}{(1-x)^5}$.
- البند $\binom{5}{2}x^{12}$ في $(1-x^6)^5$ مضروب بالبند $x\left(\binom{5}{1}\right)$ في $\frac{1}{(1-x)^5}$.

الجواب:

$$\binom{5}{0}\left(\binom{5}{13}\right)-\binom{5}{1}\binom{5}{7}+\binom{5}{2}\binom{5}{1}=780$$

ملخّص

الدالة المولّدة هي متسلسلة قوى تخزّن تسلسلاً عددياً. الدالة المولّدة البسيطة للتسلسل ... a_0, a_1, a_2 هو $\sum_{k\geq 0} akx^k$. تتضمّن تطبيقات التوافيق النموذجية للدوال المولّدة استخدام التعداد كما في مبدأ الضرب: نحدد الدالة المولّدة لكل طريقة لتحديد الأشياء التي يتم عدّها ومن ثم تنفيذ الضرب. أما التطبيق الجبري لضرب وجمع البنود فيتكفّل بالعدّ بالنيابة عنا.

تفيد الدوال المولّدة عند الإجابة عن أسئلة مثل: كم قائمة مكونة منn من الأعداد الصحيحة غير السالبة $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ التي تحقق $z_1 + z_2 + \cdots + z_n =$ k مع وجود بعض القيود الإضافية المحتملة؟ أعطينا أمثلة عديدة على ذلك.

تمارين

1. في لعبة كرة القدم الأميركية، يسجّل فريق عدداً من النقاط بالطرق التالية: نقطتين (أمان)، ثلاث نقاط (هدف ميدان)، ست نقاط (نقطة تماس فقط)، سبع نقاط (نقطة تماس ونقطة إضافية)، ثمان نقاط (نقطة تماس ونقطتين إضافيتين). جِد دالة مولداً مختصراً لـ $\{a_k\}_{k\geq 0}$، حيث a_k عدد الطرق التي يمكن أن يسجل بها الفرق k نقطة.

2. في كل حالة مما يلي، جِد دالة مولدة مختصرة للإجابة عن السؤال وتحديد المعامل الذي تريد.

أ. كم طريقة يوجد لتوزيع 14 شوكة على 10 أشخاص بحيث يحصل كل شخص على شوكة أوشوكتين؟

ب. يمكنك شراء المشروبات الغازية إما بالعلبة أو في عبوات تحتوي 6 أو 12 أو 24 أو 30 علبة. بكم طريقة يمكنك شراء عدد k من العلب؟

ج. بكم طريقة يمكنك وضع طوابع بريدية قيمتها الإجمالية 75 سنتاً على رسالة، باستخدام طوابع من فئات 3، 5، 10، 13 سنتاً؟

د. في صالة السينما، يمكنك اختيار 24 قطعة حلوى من بين 5 أنواع مختلفة. بكم طريقة يمكنك ذلك إذا أردت قطعتين من كل نوع على الأقل؟

ه. ما هو عدد حلول المعادلة $z_1 + z_2 + z_3 = 15$، حيث إن z_i هي أعداد صحيحة تحقق المتباينة $0 \leq z_i \leq 8$؟

و. كم طريقة يوجد لصرف دولار باستخدام قطع البنسات سنت والنيكلات 5 سنتات والدايم (15 سنتات) والأرباع (25 سنتاً)؟

3. جد معاملاً كل من:

أ. x^{60} في $\frac{1}{(1-x)^{23}}$

ب. x^k في $\frac{1+x+x^4}{(1-x)^5}$

ج. x^3 في $\frac{x}{(1-x)^8}$

د. x^{50} في $(x^9 + x^{10} + x^{11} + \cdots)^3$

ه. x^{k-1} في $\frac{1+x}{(1-2x)^5}$

4. يصحح أستاذ جامعي امتحاناً يتكون من 20 سؤالاً درجة كل منها 5 علامات. يضع الأستاذ علامة صفر أو واحد أو اثنين أو ثلاثة أو أربعة أو خمسة لكل سؤال. جد دوال مولدة بسيطة يمكن استخدامه لتحديد عدد طرق الحصول على علامة نهائية للامتحان k.

5. يقدّم مطعم وجبة أجنحة الدجاج بالأحجام والأسعار التالية:

عدد القطع	7	10	15	25	60	120
السعر بالدولار	5.49	7.49	10.49	15.99	35.99	69.99

أ. حدد دالة مولدة بسيطة بحيث يكون المعامل x^k مساوياً لعدد طرق طلب وجبة مكونة من k قطعة تحديداً.

ب. حدد دالة مولدة بسيطة بحيث يكون المعامل x^k مساوياً لعدد طرق إنفاق k دولار تحديداً. (هل يمكنك الحفاظ على القيم بالدولار أو أنك تحتاج إجراء ضبط للمبلغ؟)

6. جد عدد طرق توزيع 15 قطعة حلوى متطابقة على 8 أشخاص، بحيث يحصل 5 من الأشخاص (البالغين) على قطعة واحدة على الأكثر، في حين يحصل الثلاثة الباقين (أطفال) على أي عدد من القطع.

7. جد عدد حلول المعادلة $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 10$، حيث إن z_i هي أعداد صحيحة غير سالبة تحقق المتباينة $z_i \leq 4$، z_2 عدد فردي، z_3 عدد أولي، $z_4 \in \{1,2,3,6,8\}$.

8. جد عدد حلول المعادلة $6z_1 + 9z_2 + 20z_3 = 150$، حيث إن z_i هي أعداد صحيحة غير سالبة.

9. استخدم تحليل الكسور الجزئي لإيجاد معامل x^k في كل دالة مولدة بسيطة مما يلي:

أ. $\frac{1}{(1-x)(1-2x)}$

ب. $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$

4.3 استخدام الدوال المولّدة، الجزء الثاني

في هذا القسم الثاني المتعلّق بالدوال المولّدة، ستتمرن على التعامل الجبري اللازم لاستخراج المعاملات وبالتالي حلّ مسائل العدّ. كما أننا سنشتق بعض التعاريف التوافقية وسنبرهن معادلة أويلر التي تتعلق بتقسيم الأعداد الصحيحة. أخيراً، سنقدمّ الدالة المولّدة الأسّية (Exponential Generating Function).

ترميز استخراج المعامل

معظم مسائل التوافيق تسعى لإيجاد معاملٍ في دالة مولد معين، وهذا يساعد في وضع الرموز لتيسير العملية. إذا كان $f(x)$ دالة مولّدة، فإننا نعرّف:

$$f(x) \text{ في } x^k \text{ معامل} = [\![f(x)]\!]_{x^k}$$

إذن إذا كان $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ $f\ (x)$ فإن $[\![f(x)]\!]_{x^k} = a_k$

فيما يلي بعض خصائص هذا الترميز. يتبع ذلك تفسيرٌ أو برهان لكلٍ منها.

1. $[\![c.f(x)]\!]_{x^k} = c.[\![f(x)]\!]_{x^k}$

2. $[\![f(x) + g(x)]\!]_{x^k} = [\![f(x)]\!]_{x^k} + [\![g(x)]\!]_{x^k}$

3. $[\![x^j . f(x)]\!]_{x^k} = [\![f(x)]\!]_{x^{k-j}}$

4. $[\![\frac{1}{1-cx}]\!]_{x^k} = c^k$

5. $[\![(1+x)^n]\!]_{x^k} = \binom{n}{k}$

6. $[\![\frac{1}{(1-x)^n}]\!]_{x^k} = (\binom{n}{k})$

الخصائص #1–3 ذات قابلية بديهية، وقد استخدمناها في الواقع في الأمثلة في القسم السابق. تحديداً، الخاصية الأولى تفيد بأن زيادة الدالة المولدة البسيطة بثابت c سيعمل على زيادة كل معامل بمقدار c. الخاصية الثانية تفيد بأننا يمكن أن نجد معامل x^k في مجموع الدالتين المولدتين البسيطتين بإيجاد معامل x^k في كل دالة مولدة بسيطة ومن ثم جمعها. أما الخاصية الثالثة فتفيد بأن ضرب دالة مولدة بسيطة بـ x^j يعمل على إزاحة موقع كل معامل إلى اليمين بمقدار j.

السؤال 119: لنفترض أن $f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ و $g(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k$ هما دالتان مولدتان بسيطتان عشوائيتان، برهن الخاصيتين #1 و#3.

تمثّل الخصائص #4–6 طريقة مختلفة لكتابة حقيقة تعلمتها في القسم الأخير. على سبيل المثال، الخاصية #5 تفيد بأن $(1+x)^n$ هي دالة مولدة بسيطة لمعاملات ذات الحدين $\binom{n}{k}$.

إذا كنت تذكر مثال رمي أحجار النرد من القسم السابق – بكم طريقة يمكن الحصول على مجموع 18 عند رمي 5 أحجار نرد؟ - كانت الإجابة هي معامل x^{15} في المعادلة $\frac{x^6}{(1-x)^6}$. باستخدام الترميز الجديد، يمكننا الحصول على هذا المعامل كما يلي:

$$\left[\!\left[\frac{x^6}{(1-x)^6}\right]\!\right]_{x^{15}} = \left[\!\left[\frac{1}{(1-x)^6}\right]\!\right]_{x^9} = \left(\!\binom{6}{9}\!\right)$$

السؤال 120: جد $[\![(x + x^2)^{10}]\!]_{x^{14}}$. ابدأ بتحليل قوى x.

مثال آخر من القسم السابق – بكم طريقة يمكننا توزيع عدد k من الأشياء المتطابقة على 4 مستقبلات مختلفة، إذا كان كل مستقبل 1 سيحصل على شيئين على الأكثر؟ - تطلّب إيجاد معامل x^k في المعادلة $\frac{1+x+x^2}{(1-x)^3}$. أما بالترميز الجديد:

$$\left[\!\left[\frac{1+x+x^2}{(1-x)^3}\right]\!\right]_{x^k} = \left[\!\left[\frac{1}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^3} + \frac{x^2}{(1-x)^3}\right]\!\right]_{x^k}$$

$$= \left[\!\left[\frac{1}{(1-x)^3}\right]\!\right]_{x^k} + \left[\!\left[\frac{x}{(1-x)^3}\right]\!\right]_{x^k} + \left[\!\left[\frac{x^2}{(1-x)^3}\right]\!\right]_{x^k}$$

$$= \left[\!\left[\frac{1}{(1-x)^3}\right]\!\right]_{x^k} + \left[\!\left[\frac{1}{(1-x)^3}\right]\!\right]_{x^{k-1}} + \left[\!\left[\frac{1}{(1-x)^3}\right]\!\right]_{x^{k-2}}$$
$$= \left(\!\binom{3}{k}\!\right) + \left(\!\binom{3}{k-1}\!\right) + \left(\!\binom{3}{k-2}\!\right)$$

السؤال 121: ما هو معامل x^8 في $\frac{(1+x)^2}{1-3x}$؟

صيغة الالتفاف للدوال المولدة البسيطة

نظراً لأن معظم المسائل التي حللناها باستخدام الدوال المولّدة تتضمن الضرب، ينبغي علينا فهم كيفية حدوث ذلك. بمعنى آخر، إذا كان $f(x)$ و$g(x)$ دالتين مولدتين بسيطتين لتسلسلين، ما هو التسلسل الذي يكون له $f(x).g(x)$ دالة مولداً بسيطاً؟

لتكن $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ و $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$. جرّب ضرب هاتين الدالتين باستخدام قانون التوزيع الجبريّ:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots)$$

عند تنفيذ عملية الضرب، نحصل على:

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_0b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_3b_0)x^3 + \cdots$$

بشكلٍ عام، معامل x^k هو:

$$a_0b_k + a_1b_k + a_2b_k + \cdots + a_{k-2}b_2 + a_{k-1}b_1 + a_kb_0$$

أو $\sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j}$. وهذا يعرف بمعادلة الالتفاف للدالة المولدة البسيطة (Function Convolution Ordinary Generation).

المبرهنة 3.4.1 (التفاف الدالة المولدة البسيطة): إذا كان $f(x) = \sum_{j\geq 0} a_jx^j$ $g(x) = \sum_{j\geq 0} b_jx^j$

فإنه لأي $k \geq 0$:

$$[\![f(x).\,g(x)]\!]_{x^k} = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

في سياق متسلسلة القوى الشكلية، من السهل تحديد ضرب المتسلسلة – هذه ليست مبرهنة صحيحة. بفضل عملية جمع متسلسلة القوى المعرّفة بالطريقة الطبيعية وعملية الضرب المعرّف حسب صيغة الالتفاف، ثمة خصائص ضرورية لهذه العمليات (كالتبادل والتجميع، وغيرها) التي تتيح لنظرية البنى الجبرية تبرير حسابات الدالة المولدة. طالع التمارين إذا كنت مهتماً بالتحقق من ذلك.

استخدام صيغة الالتفاف

تتيح صيغة الالتفاف اشتقاق بعض التعريفات التوافقية بسهولة. هذه الاشتقاقات تشبه البراهين التوافقية من حيث إننا نسأل سؤالاً ونجيب عليه بطريقتين. السؤال الذي نطرحه ليس "بكم طريقة؟"، لكنه "ما هو المعامل؟". في البراهين التوافقية، يظهر الإبداع في طرح السؤال الصحيح. في هذه البراهين الجبرية، يظهر الإبداع في إنشاء التعبير الجبري الصحيح.

صيغة فاندرموند، إعادة اكتشافها

حسب القوانين الجبرية، المعادلة $(1+x)^{10} = (1+x)^6.(1+x)^4$ صحيحة. من وجهة نظر الدالة المولدة البسيطة، هذا يعني أن معامل x^k في $(1+x)^{10}$ يساوي معامل x^k في

$(1+x)^6.(1+x)^4$. بمعنى أن:

$$[\![(1+x)^{10}]\!]_{x^k} = [\![(1+x)^4 \cdot (1+x)^6]\!]_{x^k}$$

حاول حساب كل معامل. المعامل في الطرف الأيسر مألوف:

$$[\![(1+x)^{10}]\!]_{x^k} = \binom{10}{k}$$

الآن عالج المعامل في الطرف الأيمن باستخدام الالتفاف. بما أن

$$(1+x)^6 \cdot (1+x)^4 = \left(\sum_{k\geq 0}\binom{6}{k}x^k\right)\left(\sum_{k\geq 0}\binom{4}{k}x^k\right)$$

طبّق صيغة الالتفاف للحصول على

$$[\![(1+x)^6 \cdot (1+x)^4]\!]_{x^k} = \sum_{j=0}^{k}\binom{6}{j}\binom{4}{k-j}$$

بما أن هذه المعاملات متساوية – حسب المعادلة (3.13) أعلاه – أثبتنا أن

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{6}{j}\binom{4}{k-j} = \binom{10}{k}$$

ثمة طريقة توافقية لإثبات ذلك. ابدأ بالسؤال: كم عدد اللجان المكونة من k عنصر يمكن تكوينها من مجموعة من 6 رجال و4 نساء؟

السؤال 122: أكمل هذا الإثبات التوافقي لهذا التطابق.

عند تطبيق هذه الفكرة بشكل عام فإن التطابق الناتج يعرف باسم صيغة فاندرموند (Vandermonde Formula). أعطينا برهاناً توافقياً في القسم 2.2.

المبرهنة 3.4.2 (معادلة فاندرموند): للأعداد الصحيحة $m, n, k \geq 0$،

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}$$

البرهان: لتكن $m, n, k \geq 0$. لاحظ أن

$$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m . (1+x)^n$$

ما هو معامل x^k في كلٍ من هذه التعابير؟

نعلم أن المعامل في الطرف الأيسر هو

$$[\![(1+x)^{m+n}]\!]_{x^k} = \binom{m+n}{k}$$

بالنسبة إلى الطرف الأيمن، طالما أن $(1+x)^m . (1+x)^n =$ $\left(\sum_{j\geq 0}\binom{m}{k}x^j\right)\left(\sum_{j\geq 0}\binom{n}{k}x^j\right)$، فإن صيغة الالتفاف تعني أن معامل الطرف الأيمن هو

$$[\![(1+x)^m . (1+x)^n]\!]_{x^k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \binom{n}{k-j}$$

حسب المعادلة (3.14) تتساوى هذه المعاملات، وتتبعها الصيغة.

تطابق معامل متعدد الخيارات

من المعادلة $\frac{1}{(1-x)^n} = \frac{1}{(1-x)^{n-1}} . \frac{1}{1-x}$ ما هو التطابق الذي يمكننا اشتقاقه؟

كما في المثال السابق، ابدأ بمساواة معامل x^k في الطرفين الأيسر والأيمن. على الطرف الأيسر:

$$\left[\!\left[\frac{1}{(1-x)^n}\right]\!\right]_{x^k} = \left(\!\binom{n}{k}\!\right)$$

في الطرف الأيمن، نعلم أن

$$\frac{1}{(1-x)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{j\geq 0}\left(\!\binom{n-1}{j}\!\right)x^j\right)\left(\sum_{j\geq 0}x^j\right)$$

إذن حسب معادلة الالتفاف:

$$\left[\!\left[\frac{1}{(1-x)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1-x}\right]\!\right]_{x^k} = \sum_{j=0}^{k}\binom{n-1}{j} \cdot 1 = \sum_{j=0}^{k}\binom{n-1}{j}$$

(لاحظ أن معامل x^k في $\frac{1}{1-x}$ يكون دائماً 1). وهذا يثبت التطابق

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \sum_{j=0}^{k}\left(\!\binom{n-1}{j}\!\right)$$

السؤال 123: ما هي نتيجة التطابق المعروف من $(1+x)^n = (1+x)^{n-1}.(1+x)$؟ برهن إجابتك.

عدّ توزيعات معينة

بكم طريقة يمكنك توزيع 20 شيئاً متطابقاً على 10 مستقبلات متميزة بحيث يحصل كل مستقبل على 5 أشياء على الأكثر؟

الدوال المولّدة البسيطة وصيغة الالتفاف يحولان هذه المسألة إلى أوتوماتيكية.

هذه المسألة مكافئة لعد الحلول بالصورة:

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_{10} = 20$$

كل $z_i \in \{0,1,2,3,4,5\}$

إذن الإجابة هي معامل x^{20} في $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^{10}$

استبدل $1 + x + x^2 + \cdots + x^5$ بـ $\frac{1-x^6}{1-x}$ ثم استخرج مكافئ x^{20} في التعبير الناتج:

$$\left[\!\!\left[\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^{10}\right]\!\!\right]_{x^{20}} = \left[\!\!\left[(1-x^6)^{10}.\frac{1}{(1-x)^{10}}\right]\!\!\right]_{x^{20}}$$

$$= \left[\!\!\left[\left(\sum_{j\geq 0}\binom{10}{j}(-x^6)^j\right)\left(\left(\sum_{j\geq 0}\binom{10}{j}x^j\right)\right)\right]\!\!\right]_{x^{20}}$$

$$= \left[\!\!\left[\left(\sum_{j\geq 0}\binom{10}{j}(-1)^j\, x^{6j}\right)\left(\left(\sum_{j\geq 0}\binom{10}{j}x^j\right)\right)\right]\!\!\right]_{x^{20}}$$

بدلاً من تطبيق صيغة الالتفاف دون تفكير، قد يكون من الأفضل كتابة البنود الأولى القليلة للمجموع على الطرف الأيسر، نحتاج معامل x^{20} في:

$$= \left(\binom{10}{0} - \binom{10}{1}x^6 + \binom{10}{2}x^{12} - \binom{10}{3}x^{18} + \cdots\right)\left(\sum_{k\geq 0}\left(\binom{10}{k}\right)x^k\right)$$

ما هي البنود التي تساهم في البند x^{20} في كل مجموع عند إجراء الضرب؟

عدد البنود التي تساهم في x^{20} هو أربعة أزواج:

البند في المجموع الأول	البند في المجموع الثاني	البند الناتج عن عملية الضرب
$\binom{10}{0}$	$\left(\!\binom{10}{20}\!\right)x^{20}$	$\binom{10}{0}\left(\!\binom{10}{20}\!\right)x^{20}$
$-\binom{10}{1}x^{6}$	$\left(\!\binom{10}{14}\!\right)x^{14}$	$-\binom{10}{1}\left(\!\binom{10}{14}\!\right)x^{20}$
$\binom{10}{2}x^{12}$	$\left(\!\binom{10}{8}\!\right)x^{8}$	$\binom{10}{2}\left(\!\binom{10}{8}\!\right)x^{20}$
$-\binom{10}{3}x^{18}$	$\left(\!\binom{10}{2}\!\right)x^{2}$	$-\binom{10}{3}\left(\!\binom{10}{2}\!\right)x^{20}$

وعليه فإن معامل x^{20} :

$$\binom{10}{0}\left(\!\binom{10}{20}\!\right)-\binom{10}{1}\left(\!\binom{10}{14}\!\right)+\binom{10}{2}\left(\!\binom{10}{8}\!\right)-\binom{10}{3}\left(\!\binom{10}{2}\!\right)$$

وهذا يساوي 2,930,455.

ربما تدرك أن هذه الإجابة كتلك التي قد تنتج عن تطبيق صيغة الالتفاف. (الإشارات البديلة تكشف عن هذا). إذا ما حللت التمرين 8 في القسم 3.1، فإنك تكون قد حصلت على إجابة شبيهة جداً، لكن باستخدام الاحتواء - الاستثناء. يمكنك استخدام الطريقة التي تفضلها. من المثير للتعجب أن العامل $(1-x^{6})^{10}$ ينتج المعاملات الثنائية الصحيحة بالإشارات الصحيحة.

السؤال 124: ما هو معامل x^{7} في $\left(\frac{1-x^{3}}{1-x}\right)^{5}$؟

التجزئة، الدالة المولّدة البسيطة، وصيغة أويلر

الدالة المولّدة البسيطة للأعداد المقسمة

تعرّفنا على الدوال المولّدة البسيطة واستخدمناها للمعاملات الثنائية ومعاملات الاختيار المتعدد. سنجد الدالة المولدة البسيطة لأعداد ستيرلينغ من النوع الثاني في القسم 4.3. ماذا عن الدالة المولدة البسيطة للأعداد الصحيحة المقسمة $P(n)$؟

في أحد الأمثلة التي وردت في القسم 3.3، وجدنا أن عدد التقسيمات من 12 المقسّمة بحجم 5 على الأكثر يساوي معامل x^{12} في الدالة المولدة البسيطة:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

في الواقع، هذه هي الدالة المولدة البسيطة لعدد التقسيمات لـ n إلى أجزاء بحجم 5 على الأكثر:

$$\text{عدد تقسيمات } n \text{ بحجم 5 على الأكثر} = \left[\!\left[\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^5)}\right]\!\right]_{x^n}$$

السؤال 125: جد الدالة المولدة البسيطة بحيث يساوي معامل x^k عدد التقسيمات لـ k بحيث تساوي حجم 3 أو 5 أو 7 أو 9.

يبيّن نفس الاستدلال أنه لو وسّعنا عملية الضرب في المقام لتشمل جميع عوامل $1 - x^j$ لقيم $j \geq 1$، فإننا سنحصل على الدالة المولدة البسيطة لأعداد التقسيمات.

النظرية 3.4.3 الدالة المولدة البسيطة لتقسيمات الأعداد الصحيحة $\{P(n)\}_{n\geq 0}$ هو:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots} = \prod_{j\geq 1} \frac{1}{1-x^j}$$

اكتشاف أويلر المذهل

كان ليونارد أويلر أول الرياضيين الذين استعملوا الدوال المولّدة. ربما أن أكثر نتائج أويلر الشهيرة تلك التي تتضمن الدوال المولّدة في برهان أن عدد تقسيمات المجموعة n إلى عدد أجزاء فردي يساوي عدد تقسيمات المجموعة n إلى عدد متميز من الأجزاء. هذا مبدأ جميل وذكي ومختصر. فيما يلي توضيحه:

لتكن O_n مساوية لعدد تقسيمات n إلى عدد فردي من الأجزاء ولتكن d_n مساوية لعدد تقسيمات n إلى أجزاء متميزة. لتكن $O(x) \coloneqq \sum_{n\geq 0} o_n x^n$ و $D(x) \coloneqq \sum_{n\geq 0} d_n x^n$ دالتين مولدتين بسيطتين. برهن أويلر النتيجة ببيان أن $O(x) = D(x)$.

لبناء $O(x)$ يمكننا البدء بالدالة المولدة البسيطة المستخدمة في المبرهنة 3.4.3 وحذف البنود المرتبطة بالأجزاء ذات الحجم الزوجي:

$$O(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots}$$

لبناء $D(x)$، ما علينا سوى مراقبة إذا كان كل جزء يمكن أن يستخدم 0 أو 1 مرة، وعليه:

$$D(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots$$

الآن، فيما يلي أكثر الأجزاء أهمية في الإثبات كله. لاحظ أنه لـ $j \geq 1$،

$$\left(1-x^j\right)\left(1+x^j\right) = 1-x^{2j}$$

وهذا يعني أن

$$1+x^j = \frac{1-x^{2j}}{1-x^j}$$

كرر الأمر لكل بندٍ من بنود $D(x)$ ومن ثم احذف المقادير غير اللازمة، وهذا يعادل كل بند في البسط وكل بند آخر في المقام:

$$\begin{aligned} D(x) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots \\ &= \frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4} \\ &= \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots} \\ &= O(x) \end{aligned}$$

هذا كل ما في الأمر.

النظرية 3.4.4 (أويلر): عدد تقسيمات n إلى عدد متميز من الأجزاء يساوي عدد تقسيمات n إلى عدد أجزاء فردي.

الدوال المولّدة الأسية

النوع الثاني الأكثر فائدة من الدوال المولّدة في التوافيق هو الدوال المولّدة الأسية. دعنا نلقي نظرة موجزة على هذا النوع. سيتّضح سبب استخدامه في المادة التالية.

إن أهم متسلسلة قوى حسب علم التفاضل والتكامل هي e^x، تحديداً:

$$e^x = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{لكل } |x| < \infty$$

في التوافيق، من طرق تفسير هذا هو أن e^x دالة مولدة بسيطة للتسلسل $\{\frac{1}{k!}\}_{k\geq 0}$ لأن معامل x^k هو $\frac{1}{k!}$.

لكن هذا ليس التفسير الأكثر فائدة. إذ إننا نعتبر أن e^x دالة مولدة أسيّة للتسلسل 1,1,1,1,... لأن معامل $\frac{x^k}{k!}$ يكون دائماً 1. في الدالة المولدة الأسية، يكون موضع a_k هو $\frac{x^k}{k!}$ بدلاً من x^k.

التعريف 3.4.5 (الدالة المولد الأسي): الدالة المولدة الأسية للتسلسل العددي $\{a_k\}_{k\geq 0}$ يعرّف كـ $\sum_{k\geq 0} a_k \frac{x^k}{k!}$.

عليك أولاً فهم الفارق الدقيق نوعاً ما بين الدالة المولدة البسيطة والدالة المولدة الأسية. فهذا يساعد على البدء بالدوال المعروفة:

$$\frac{1}{1-x}, \qquad e^x, \qquad (1+x)^n$$

ومن ثم طرح السؤال "ما هو التسلسل الذي دالته كل من الدوال المولّدة الأسية السابقة؟"

لاحظ (استخدام خدعة الضرب- بـ - 1 القديمة، حيث 1 يبدو $\frac{k!}{k!}$ في هذه الحالة).

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k\geq 0} x^k = \sum_{k\geq 0} k! \frac{x^k}{k!}$$

إذن على الرغم من أن $\frac{1}{1-x}$ دالة مولدة عادية للتسلسل $\{1\}_{k\geq 0}$، فهي في الوقت ذاته الدالة المولدة الأسية للتسلسل $\{k!\}_{k\geq 0}$. لكن ثمة طريقة أخرى وهي $\left[\!\left[\frac{1}{1-x}\right]\!\right]_{x^k} = 1$ في أثناء استخدام الامتداد الواضح للترميز استخراج - المعامل $\left[\!\left[\frac{1}{1-x}\right]\!\right]_{x^k/k!} = k!$.

إذن، ما هو الدالة المولدة الأسية لجميع التسلسلات $\{1\}_{k\geq 0}$؟ إنه e^x لأن:

$$[\![e^x]\!]_{x^k/k!} = \left[\!\left[\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}\right]\!\right]_{x^k/k!} = 1$$

لأي عدد حقيقي c،

$$e^{cx} = \sum_{k\geq 0} \frac{(cx)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} c^k \frac{x^k}{k!}$$

بذا يكون e^{cx} هو الدالة المولدة الأسية للتسلسل $\{c^k\}_{k\geq 0}$.

بالنسبة إلى $(1+x)^n$ يمكننا استخدام $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$ لكتابة

$$
\begin{aligned}
[\![(1+x)^n]\!]_{x^k/k!} &= \left[\!\!\left[\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}x^k\right]\!\!\right]_{x^k/k!}\\
&= \left[\!\!\left[\sum_{k\geq 0}(n)_k\frac{x^k}{k!}\right]\!\!\right]_{x^k/k!}\\
&= (n)_k
\end{aligned}
$$

وهذا يعني أن $(1+x)^n$ دالة مولدة أسية للتسلسل $\{(n)_k\}_{k\geq 0}$. في سياق التوافيق، $(1+x)^n$ هي الدالة المولدة البسيطة للمجموعات الجزئية المكون من k عنصر المأخوذة من المجموعة n، في حين أنها الدالة المولدة الأسية للتباديل المكونة من k عنصر من المجموعة n.

السؤال 126: ما هو معامل $\frac{x^5}{5!}$ في البند $(1+x)^9$؟ ما هو معامل x^5 في البند $(1+x)^9$؟

يلخّص الجدول التالي ما عملناه في الدوال المولّدة الأسية.

التسلسل	الاختصار	الدالة المولد الأسي (مبسّط)	الدالة المولد الأسي (مختصر)
$1,1,1,1,\ldots$	$\{1\}_{k\geq 0}$	$\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}$	e^x
$1,-1,1,-1,\ldots$	$\{(-1)^k\}_{k\geq 0}$	$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$	e^{-x}

e^{cx}	$\sum_{k\geq 0}(n)_k \frac{x^k}{k!}$	$\{c^k\}_{k\geq 0}$	$1, c, c^2, c^3, \ldots$
$(1 + x)^n$	$\sum_{k\geq 0}(n)_k \frac{x^k}{k!}$	$\{(n)_k\}_{k\geq 0}$	$(n)_0, (n)_1, (n)_2, (n)_3, \ldots$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k\geq 0} k! \frac{x^k}{k!}$	$\{k!\}_{k\geq 0}$	$0!, 1!, 2!, 3!, \ldots$

صيغة الالتفاف للدالة المولدة الأسيّة

ثمة صيغة التفاف للدوال المولدة الأسية كما هو الحال بالنسبة إلى الدوال المولّدة البسيطة. السؤال هو: إذا كان $f(x)$ و$g(x)$ دالتين مولدتين أسيتين للتسلسلين $\{a_k\}_{k\geq 0}$ و$\{b_k\}_{k\geq 0}$، إذن، ما هو تسلسل دالة المولّد الأسي $f(x).g(x)$؟

يمكن تحقيق ذلك باستخدام معادلة صيغة الدالة المولدة البسيطة وملاحظة بسيطة. الملاحظة السريعة هي رابط بين استخراج المعامل في الدوال المولّدة البسيطة والدوال المولّدة الأسية، تحديداً:

$$[\![f(x)]\!]_{x^k/k!} = k!.\,[\![f(x)]\!]_{x^k}$$

سوف نستخدم صيغة الالتفاف في القسم التالي لحل العلاقات التكرارية.

المبرهنة 3.4.6 (الالتفاف للدوال المولدة الأسيّة): إذا كان $f(x) = \sum_{j\geq 0} a_j \frac{x^j}{j!}$ و$g(x) = \sum_{j\geq 0} b_j \frac{x^j}{j!}$، فإنه لكل $k \geq 0$:

$$[\![f(x).\,g(x)]\!]_{x^k/k!} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_j\, b_{k-j}$$

البرهان: ليكن $f(x)$ و$g(x)$ دالتين مولدتين أسيّتين للفرضية. فإن

$$[\![f(x).\,g(x)]\!]_{x^k/k!} = k!.\,[\![f(x).\,g(x)]\!]_{x^k}$$

الآن، جد المعامل باستخدام صيغة الالتفاف للدوال المولدة الأسيّة ثم بسّط المعادلة:

$$k!\cdot[\![f(x)\cdot g(x)]\!]_{g^k} = k!\cdot\left[\!\!\left[\left(\sum_{j\geq 0}\frac{a_j}{j!}x^j\right)\left(\sum_{j\geq 0}\frac{b_j}{j!}x^j\right)\right]\!\!\right]_{x^k}$$

$$= k!\sum_{j=0}^{k}\frac{a_j}{j!}\frac{b_{k-j}}{(k-j)!}$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!\,(k-j)!}a_j b_{k-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a_j b_{k-j}$$

مثال سريع

افترض أن الدالة المولّدة البسيطة للتسلسل $\{a_k\}_{k\geq 0}$ هو $\frac{e^{2x}}{1-x}$. ما قيمة a_k؟

بما أن e^{2x} هو الدالة المولدة البسيطة للتسلسل $\{2^j\}_{j\geq 0}$ و $\frac{1}{(1-x)}$ هو الدالة المولّدة البسيطة للتسلسل $\{j!\}_{j\geq 0}$، طبّق صيغة الالتفاف للدوال المولدة البسيطة بقيم $a_j = 2^j$ و $b_j = j!$ للحصول على

$$a_k = \left[\!\left[e^{2x} \cdot \frac{1}{1-x} \right]\!\right]_{x^k/k!}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 2^j (k-j)!$$

$$= k! \sum_{j=0}^{k} \frac{2^j}{j!}$$

السؤال 127: جد صيغة للبند ذي الترتيب k للتسلسل الذي دالته المولدة البسيطة $\frac{(1+x)^8}{e^x}$.

ملخص

صيغة الالتفاف للدالة المولدة البسيطة هي أداة أساسية، لأنها تتيح تحليل التسلسل الذي دالته المولدة البسيطة معبّر عنه بالضرب. وعليه فإنه يمكن اشتقاق العديد من المتطابقات التوافقية من الالتفاف ببساطة وذلك باستخدام معاملات المقارنة في كلا طرفي المتطابقة الجبرية.

الدالة المولدة الأسية شبيه بالدالة المولّدة البسيطة فيما عدا أن "موقع" البند ذي الترتيب k في التسلسل هو $x^k/k!$ بدلاً من x^k فقط. بالنسبة إلى الدوال المولّدة البسيطة، صيغة الالتفاف للدالة المولدة الأسية مفيدة. تلقي الفصول والأقسام التالية الضوء على كيفية الاختيار بين استخدام الدالة المولدة البسيطة والدالة المولدة الأسية.

التمارين

1. حدد عدد الطرق لوضع ترتيب لدزينة من الكعك، حيث يوجد 6 أنواع مختلفة، ويمكنك الطلب من قطعة إلى أربع (ضمناً) من التشكيلة.

2. اشتق متطابقة توافقية من خلال المعادلة التالية:

$$\frac{1}{(1-x)^{m+n}} = \frac{1}{(1-x)^m} \cdot \frac{1}{(1-x)^n}$$

3. استخدم صيغة الالتفاف لإيجاد معامل x^k في $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^m}$.

4. أعطِ مثالاً على سؤال عد توزيعي بحيث تكون إجابته معامل x^k في الدالة المولدة البسيطة المعطاة في التمرين 3.

5. لتكن a و b و c أعداداً حقيقية غير الصفر. جد معامل x^k في $\frac{a}{b+cx}$.

6. لتكن j و n عددين صحيحين موجبين ثابتين. جد معامل x^k في $\frac{1}{(1-x^j)^n}$.

7. أثبت أنه إذا كان $c \neq 0$ فإن $[\![f(x)]\!]_{cx^k} = \frac{1}{c} \cdot [\![f(x)]\!]_{x^k}$.

8. لتكن a_n تساوي عدد كلمات السر المكوّنة من n حرف، حيث إن كل حرف إما A أو B أو C. فسّر سبب كون e^{3x} دالة مولدة أسية للتسلسل $\{a_n\}_{n\geq 0}$.

9. افترض أن الدالة المولدة الأسية للتسلسل $\{c_n\}_{n\geq 0}$ هو $(e^x - 1)^2$. جد صيغة لـ c_n.

10. كرر التمرين السابق لـ $(e^x - 1)^3$.

11. فيما يلي كيف برهن أويلر أن التمثيل الثنائي لأي عدد صحيح غير سالب يكون فريداً. لكل $n \geq 0$ لنفترض أن b_n تعطينا عدد طرق كتابة n كمجموع أسس العدد 2. لتكن $B(x)$ الدالة المولدة البسيطة للتسلسل $\{b_n\}_{n\geq 0}$.

أ) وضّح لماذا $B(x)$ تساوي $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16}) \ldots$

ب) وضّح لماذا $B(x)$ تساوي $(1 + x)B(x^2)$

ت) استخدم الجزء (b) لبرهنة أن $b_n = 1$ لجميع قيم $n \geq 0$.

12. (جبر تجريدي)، لتكن $\mathcal{P}$ مجموعة مكونة من كل التسلسلات اللامتناهية $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ حيث a_i هي الأعداد المركبة. $f, g \in \mathcal{P}$، حيث:

$$f = [a_0, a_1, a_2, \ldots] \quad \text{و} \quad g = [b_0, b_1, b_2, \ldots]$$

عرّف عمليتي الجمع والضرب:

$$f + g = [a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots]$$
$$f * g = [a_0 b_0, a_0 b_1, a_1 b_0, a_0 b_2, a_1 b_1, a_2 b_0, \ldots]$$

حيث إن العنصر في الترتيب k بشكل عام هو $\sum_{i=0}^{k} a_i\, b_{k-i}$. من الواضح أن $\mathcal{P}$ مجموعة مغلقة ضمن هذه العمليات.

برهن أن $(\mathcal{P}, +,*)$ حلقة تبديلية. (الخاصية التجميعية للضرب تتطلب بعض الحرص).

13. (جبر تجريدي)، هذه تتمّة للتمرين السابق.

أ) ما هي عناصر التطابق للإضافة وللمضاعفة في $\mathcal{P}$ ؟

ب) بيّن أنّ $\mathcal{P}$ لا يقسم على العدد صفر وبالتالي هو مجال متكامل.

ت) إنّ مقلوب ضرب $f \in \mathcal{P}$ هو $g \in \mathcal{P}$ بحيث إن $f * g =$ $[1,0,0,0, \dots]$. استخدم f^{-1} للدلالة على مقلوب ضرب f.

افترض أنّ $f = [a_0, a_1, a_2, \dots]$. أثبت أنّه يوجد f^{-1} بشرط أنّ $a_0 \neq 0$.

 **ملاحظات سريعة**

فُرض استخدام الدوال المولدّة من قبل المختصين بعلم التوافيق عندما كتب نايفن (Niven) في صحيفة في عام 1969 موضّحاً فيها السبب كما ذُكر في القسم 3.3، وهي متى ولماذا يُمكن تجاهل مسألة التقريب. افتتح مقاله الصحفي بكتابة:

إنّ هدفنا هو تطوير نظرية منهجيّة لصيغة المتسلسلات الأسيّة. تُعرف هذه النظرية، أو على الأقل يُفترض أن تُعرف، من قبل العديد من الكُتّاب في الرياضيات، الذين يستخدمونها لتجنُّب أسئلة التقريب في السلاسل اللامتناهية. ما يحدث هنا هو صياغة النظريّة على أساس منطقي سليم وبالتالي الكشف عن غياب مسألة التقريب.

وعليه فإنّه يمكن استبدال التحليل الصعب بالتحليل السهل في العديد من التطبيقات.

يمكن القول إن مقاله كان خطوة هامة في إنشاء الرياضيات التوافقية كاختصاص بحدّ ذاته. تتعلّق التمارين المُدرجة في هذا القسم تحت مُسمّى "الجبر التجريدي" (Abstract Algebra) ببعض النتائج الأساسية.

3.5 تقنيات لحل العلاقات التكرارية

تعتبر العلاقات التكرارية طُرقاً سهلة لوصف تسلسل الأرقام. وقد طُرحت في القسم 3.2. ومن أشهرها تلك التي تُعرّف متسلسلة أعداد فيبوناتشي (Fibonacci).

$$F_0 = 1$$
$$F_1 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{حيث إن } 2 \le n$$

يُبيّن ما سبق معلومات تكفي لحساب المتسلسلة كلّها، بمعنى شروط البداية $F_0 = 1$، و $F_1 = 1$؛ والتكرار $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$؛ ومجموعة دليل القوة الجبريّة $2 \le n$ والتي يكون فيها التكرار صحيح. يمكننا البدء بشروط البداية ومن ثمّ حساب القيم المتتالية بشكل تكراري:

$$F_0 = 1$$
$$F_1 = 1$$
$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 1 = 2$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 2 + 1 = 3$$
$$F_4 = F_3 + F_2 = 3 + 2 = 5$$
$$F_5 = F_4 + F_3 = 5 + 2 = 8$$
$$\vdots$$

لكن على ما يبدو، لا يمكننا حساب قيم الرقم في المرتبة 100 من أعداد فيبوناتشي F_{100} دون حساب جميع القيم السابقة.

إنّ الهدف من هذا القسم والقسم الذي يليه هو تحديد صيغ للبند في المرتبة (n) لمتسلسلة مُعرّفة بعلاقة تكراريّة. ولتوضيح معنى "حل" علاقة تكراريّة: أي أن يكون للبند n صيغة غير تكراريّة.

لقد تعرّفنا على العديد من العلاقات التكراريّة. يمكننا التفكير في تعريف باسكال المألوف $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ كتكرار مُزدوج في كلٍ من n و k.

أثبتنا في المبرهنة 2.3.3 التكرار التالي لأعداد بيل (*Bell*):

$$B(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} B(j)$$

سنُبيّن في القسم 4.3 كيفيّة تطبيق التقنيات التي ستتعلمها في هذا القسم للحصول على صيغة لطيفة لأعداد بيل *B(n)*.

إنّ المنهج المُتّبع لحل العلاقات التكراريّة يقوم باستخدام التكرار وشروط البداية لتحديد الدالة المولّدة للمتسلسلة (إمّا أسيّ أو عاديّ) ومن ثُمّ استنباط صيغة للبند n من خلال إيجاد المعامل x^n أو $\frac{x^n}{n!}$. سيُبرز هذا القسم التقنيات في أمثلة معيّنة.

مثال بسيط على الدوال المولّدة العادية

سنوضّح الطريقة من خلال مثال بسيط. هدفنا هو إيجاد صيغة للبند n للمتسلسلة $\{a_n\}_{n\geq 0}$ والمعرّفة من خلال العلاقة التكرارية التالية:

$$a_0 = 1$$
$$a_n = 3a_{n-1}$$

حيث إن $n \geq 1$

على الرغم من سهولة تخمين الصيغة a_n، إلاّ أنّه من الأفضل أن نبدأ بشكل مُبسّط.

السؤال 128: ما هي صيغة a_n؟

تعمل الطريقة بالشكل التالي. أولاً عرّف $f(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ كدالة مُولّدة عادية للمتسلسلة $\{a_n\}_{n\geq 0}$. ثمّ استخدم التكرار لإيجاد صيغة مختصرة لهذا الدالة المولّدة. عند إيجاده، استخرج معامل x^n للحصول على صيغة a_n.

خذ التكرار $a_n = 3a_{n-1}$ واضربه بــ x^n للحصول على

$$a_n x^n = 3a_{n-1}x^n$$

ثمّ قم بجمع قيم المؤشّر n الذي تمّ تعريف التكرار له. في هذا المثال، هو القيم الأكبر من $n \leq 1$، وبهذا سنحصل على التالي:

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n = \sum_{n\geq 1} 3a_{n-1} x^n$$

هدفنا الآن هو كتابة ما سبق بصورة دالة مولّدة عادية $f(x)$، ما يتطلّب القليل من المعالجة الجبريّة لكل جزء. أول جمع يساوي $f(x)$ ناقصاً البند الصفر a_0، الذي يساوي 1 تبعاً لشروط البداية:

$$\sum_{n\geq 1} \mathrm{a}_n x^n = \left(\sum_{n\geq 0} \mathrm{a}_n x^n\right) - a_0 = f(x) - 1$$

إنّ مجموع الجزء الأيمن من المعادلة 3.15 يساوي $3x \cdot f(x)$:

$$\sum_{n\geq 1} 3\mathrm{a}_{n-1} x^n = 3x \sum_{n\geq 1} \mathrm{a}_{n-1} x^{n-1} = 3x \cdot f(x)$$

بإيجاد العوامل الأوليّة لـ x ستُنجز مهمّة جعل المؤشر عند القيمة a_{n-1} يتوافق مع أس x^{n-1}. (ستقوم بذلك كثيراً فيما يلي):

الآن، بتعويض هذه الأجزاء في المعادلة (3.15) للحصول على

$$f(x) - 1 = 3x \cdot f(x)$$

قمنا للتو بحل الدالة المولّد المجهول $f(x)$:

$$f(x) - 1 = 3x \cdot f(x) \quad \leftrightarrow \quad 1 - 3x \cdot f(x) = 1 \quad \leftrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{1-3x}$$

إذن $\frac{1}{1-3x}$ هو الدالة المولّدة الأسية للمتسلسلة $\{a_n\}_{n\geq0}$. لإيجاد صيغة a_n،

نستخرج معامل x^n:

$$a_n = \left[\!\left[\frac{1}{1-3x}\right]\!\right]_{x^n} = 3^n,$$

إذن $a_n = 3^n$ لكل $0 \leq n$.

مثال بسيط على الدوال المولّدة الأسّية

فيما يلي لنلقي نظرة على العلاقات التكرارية

$$b_0 = 2$$
$$b_n = nb_{n-1}$$

حيث $n \geq 1$.

من الجيّد أن ننظر إلى بعض البنود الأولى.

السؤال 129: ما هي قيم b_1 , b_2 , ... ,b_5؟ هل يمكنك تخمين صيغة b_n؟ ماذا لو تغيّر شرط البداية ليصبح $b_0 = 1$؟

يُمكن أن تُنتج هذه المتسلسلة دالةً مولّدةً أسّيةً بسهولة ولكن لا يمكنها إنتاج دالة مولّد عادي. تتبّع جيّداً لتكتشف السبب.

عرّف $g(x) := \sum_{n\geq0} b_n \frac{x^n}{n!}$ كدالة مولّدة أسّية للمتسلسلة. خُذ التكرار $b_n = nb_{n-1}$ واضربه بـ $\frac{x^n}{n!}$ للحصول على

$$b_n \frac{x^n}{n!} = nb_{n-1} \frac{x^n}{n!}$$

ثُمّ قم بجمع قيم المؤشّر n الذي تمّ تعريف التكرار له حيث $2 \leq n$:

$$\sum_{n\geq 1} b_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} n b_{n-1} \frac{x^n}{n!} \qquad (3.16)$$

الآن، أعد كتابة هذه المعادلة بصيغة $g(x)$. إنّ المجموع على اليسار هو $g(x)$ ناقص الحد صفر، $b_0 = 2$:

$$\sum_{n\geq 1} b_n \frac{x^n}{n!} = \left(\sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}\right) - b_0 = g(x) - 2$$

إنّ مجموع الجهة اليمنى من المعادلة (3.16) يحتاج b_{n-1} المتوافق مع $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ لربطه بـ $g(x)$. قُم بذلك عن طريق حذف n وتحليل x:

$$\sum_{n\geq 1} n b_{n-1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} b_{n-1} \frac{x^n}{(n-1)!} = x \sum_{n\geq 1} b_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x \cdot g(x)$$

(انظر كيف يمكن بسهولة لمضروب n في مقام الدوال المولّدة الأسيّة أن يعالج بـ n الموجود في البسط؟ إنّ المعادلة (3.16) هي الآن مكافئة لـ $g(x) - 2 = x \cdot g(x)$. قُم بحل $g(x)$ للحصول على $g(x) = \frac{2}{1-x}$.

الآن جد b_n عن طريق إيجاد معامل $\frac{x^n}{n!}$ في $\frac{2}{1-x}$:

$$b_n = \left[\!\left[\frac{2}{1-x}\right]\!\right]_{x^n/n!} = 2 \cdot \left[\!\left[\frac{1}{1-x}\right]\!\right]_{\frac{x^n}{n!}} = 2 \cdot n!$$

إذن، $b_n = 2 \cdot n!$ حيث $n \geq 0$. (تذكّر أنّ $\frac{1}{1-x}$ هو الدالة المولّدة الأسّية لـ $\{n!\}_{n\geq 0}$.)

مثال آخر على الدوال المولّدة البسيطة

لنقم الآن بحل مثال على الدوال المولّدة البسيطة والذي يتطلب المزيد من الخطوات. سنجد صيغة للبند n للسلسلة $\{c_n\}_{n\geq0}$ والمعرّفة بـ

$$c_0 = 1$$

$$c_n = 4c_n + 1 \quad \text{حيث} \quad n \geq 1$$

سيكون تخمين صيغة لـ c_n بناءً على قيم قليلة أصعب بقليل من الأمثلة السابقة.

السؤال 130: ماهي القيم $c_1, c_2, \ldots, c_5$ ؟هل يُمكنك إيجاد صيغة لـ c_n ؟

عرّف $h(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ كدالة مولّدة بسيطة للسلسلة $\{c_n\}_{n-0}^{\infty}$. ابدأ بالتكرار ثُمّ اضرب بـ x^n:

$$c_n x^n = 4c_{n-1}x^n + x^n$$

بعد ذلك، اجمع له $1 \leq n$ لتحصل على

$$\sum_{n\geq1} c_n x^n = \sum_{n\geq1} 4c_{n-1}x^n + \sum_{n\geq1} x^n \quad (3.17)$$

عليك أن تُميّز الجمع على الجهة اليُسرى بأنّه دالة مولّدة بسيطة لـ $h(x)$ ناقص الحد الصفر:

$$\sum_{n\geq1} c_n x^n = \left(\sum_{n\geq0} c_n x^n\right) - c_0 = h(x) - 1$$

من الجمع الثاني في المعادلة (3.17)، حلّل $4x$ لحذف الثابت وتوحيد المؤشرات لكلٍ من c_{n-1} و x^n. كل ما يتبقى من الجمع بعد ذلك هو $h(x)$:

$$4x\sum_{n\geq 1} c_{n-1}x^{n-1} = 4x \cdot h(x)$$

إنّ جمع أقصى يمين المعادلة (3.17) هو تقريباً $\frac{1}{1-x}$:

$$\sum_{n\geq 1} x^n = \left(\sum_{n\geq 0} x^n\right) - 1 = \frac{1}{1-x} - 1$$

الآن بعد أن حوّلنا المعادلة (3.17) لـ

$$h(x) - 1 = 4x \cdot h(x) + \frac{1}{1-x} - 1$$

استخدم الجبر لحل الدالة المولّدة البسيطة $h(x)$:

$$h(x) = 4x \cdot h(x) + \frac{1}{1-x} \iff h(x) = \frac{1}{(1-4x)(1-x)}$$

إلى هذه النقطة، هناك طريقتان للاستمرار وكلتاهما صحيحتان، لكن سيكون من المثير للاهتمام أن نقوم بكلتيهما.

الطريقة الأولى: استخدام صيغة الالتفاف

في المعادلة $h(x) = \frac{1}{1-4x} \cdot \frac{1}{1-x}$، إنّ الحد الأوّل هو الدالة المولدة البسيطة لـ $\{4^n\}_{n\geq 0}$ والحد الثاني هو الدالة المولدة البسيطة لـ $\{1\}_{n\geq 0}$. وباستخدام صيغة الالتفاف للدوال المولدة البسيطة،

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} 4^j \cdot 1 = \sum_{j=0}^{n} 4^j$$

المعادلة التي نريدها هي $c_n = \sum_{j=0}^{n} 4^j$ ، حيث $0 \leq n$.

السؤال 131: هل القيم التي تُنتجها هذه الصيغة تُكافئ تلك التي قُمت بحسابها من التكرار في السؤال 130؟

الطريقة الثانية: استخدام تحليل الكسر الجزئي

أولاً، جد تحليل الكسر الجزئي للمعادلة $h(x)$:

$$h(x) = \frac{1}{(1-4x)(1-x)} = \frac{A}{1-4x} + \frac{B}{1-x}$$

الحل هو $A = 4 / 3$ و $B = -1 / 3$. (إنّ هذه هي التقنية ذاتها المستخدمة في حساب التفاضل والتكامل لإيجاد المشتقات العكسية للدوال النسبية).

السؤال 132: بيّن كيف وُجد $A = 4 / 3$ و $B = -1 / 3$.

هذا يعني

$$h(x) = \frac{4 / 3}{1-4x} + \frac{1 / 3}{1-x}$$

فإذن

$$\begin{aligned} C_n &= \left[\!\left[\frac{4 / 3}{1-4x} - \frac{1 / 3}{1-x} \right]\!\right]_{x^n} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \left[\!\left[\frac{1}{1-4x} \right]\!\right]_{x^n} - \frac{1}{3} \left[\!\left[\frac{1}{1-x} \right]\!\right]_{x^n} \\ &= \frac{4}{3} \cdot 4^n - \frac{1}{3} \cdot 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{4^{n+1} - 1}{3}$$

حيث $n \geq 0$

الطريقتان الأولى والثانية صحيحتان، وبكلتيهما سنحصل على الصيغة $\sum_{j=0}^{n} 4^j = \frac{4^{n+1}-1}{3}$ كحاصل نهائي.

مثال آخر على الدوال المولّدة الأسّيّة

فيما يلي سنجد صيغة للبند ذي المرتبة n للتسلسل $\{d_n\}_{n\geq 0}$ المعرّفة بـ

$$d_0 = 1$$

$$d_n = nd_{n-1} + 1 \quad \text{حيث} \quad 1 \leq n$$

وهو ما يتطابق مع العلاقة التكرارية السابقة فيما عدا القيم غير الثابتة n بدلاً من 4. بما أنّ الدالة المولّدة الأسّية عملت بشكل جيّد في التكرار المشابه $b_n = nb_{n-1}$، لنجرّبها مرّةً أخرى.

السؤال 133: *ما هي القيم* d_1، d_2، ...، d_5؟

عرّف $E(x) \coloneqq \sum_{n\geq 0} d_n \frac{x^n}{n!}$ كدالة مولّدة أسّية للسلسلة. مرّة أخرى، هدفنا هو إيجاد معامل $\frac{x^n}{n!}$ في $E(x)$.

اضرب التكرار بـ$\frac{x^n}{n!}$ لتحصل على

$$d_n \frac{x^n}{n!} = nd_{n-1} \frac{x^n}{n!} + \frac{x^n}{n!}$$

ثمّ قم بتجميع قيم n المُعرّف لها التكرار:

$$\sum_{n\geq 1} d_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} n d_{n-1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!} \quad (3.19)$$

الآن كما تعودنا، قم بتحليل كل حد. الجمع الأول يساوي $E(x)$ مطروح منه حده الأوّل:

$$\sum_{n\geq 1} d_n \frac{x^n}{n!} = \left(\sum_{n\geq 0} d_n \frac{x^n}{n!}\right) - d_0 = E(x) - 1$$

في الجمع الثاني، علينا التبسيط ثمّ تحليل x:

$$\sum_{n\geq 1} n d_{n-1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} d_{n-1} \frac{x^n}{(n-1)!} = x \sum_{n\geq 1} d_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x \cdot E(x)$$

أمّا الحد الثالث، فقد سبق وأن تعرّفنا عليه:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!} = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}\right) - 1 = e^x - 1$$

الآن أصبحت المعادلة (3.19) $E(x) - 1 = x \cdot E(x) + e^x - 1$ ومنها يجب أن نحصل على

$$E(x) = \frac{e^x}{1-x}$$

كدالة مولّدة أسيّة لـ $\{d_n\}_{n\geq 0}$.

والآن يمكننا استخدام صيغة الالتفاف للدوال المولّدة الأسّية لإيجاد معامل $\frac{x^n}{n!}$ في $E(x)$. بما أنّ e^x هو الدالة المولّدة الأسيّة لـ $\{1\}_{n\geq 0}$ و $\frac{1}{1-x}$ هو الدالة المولّدة الأسيّة لـ $\{n!\}_{n\geq 0}$، فإنّ صيغة الالتفاف تعطينا

$$\mathrm{d}_n = \left[\!\left[e^x \cdot \frac{1}{1-x} \right]\!\right]_{x^n/n!} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1 \cdot (n-j)! = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (n-j)!$$

وبعد التبسيط ستصبح

$$\mathrm{d}_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (n-j)! = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!} \cdot (n-j)! = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$$

لقد وجدنا الصيغة التي نريدها:

$$n > 0 \qquad \mathrm{d}_n = n!\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

ويمكن كتابة الصيغة أيضاً كما يلي: $d_n = \sum_{j=0}^{n} (n)_j$

السؤال 134: اشرح السبب.

التوافيق $(n)_0 + (n)_1 + (n)_2 + \cdots + (n)_n$ ستحسب عدد تبديلات $[n]$ لأي حجم. لذلك، إذا قمنا بتعريف d_n ليصبح عدد تبديلات $[n]$ من أي حجم، عليه فإنّ d_n يجب أن تحقّق علاقة التكرار $d_0 = 1$ و $d_n = nd_{n-1} + 1$ حيث $1 \leq \mathrm{n}$.

(راجع التمرين 15 في القسم 2.1 للاطلاع على البرهان التفاضلي).

هل أستخدم الدالة المولّدة البسيطة أم الدالة المولّد الأسّي؟

قد تتساءل لما اخترنا الدالة المولّدة البسيطة في المثالين الأول والثالث، واخترنا الدالة المولّد الأسّي في المثالين الثاني والرابع. سيكون من المفيد أن نقوم بتبديل الخيارات ولنرى ما سيحدث.

في المثال الثالث، عرّف $H(x) := \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$ كدالة مولّدة أسّية حيث $\{a_n\}_{n\geq 0}$. خُذ التكرار $a_n = 4a_{n-1} + 1$، اضربه بـ $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$، ثمّ اجمع لكل من $1 \leq n$:

$$\sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n\geq 1} 4a_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (3.20)$$

إنّ الجمعين على الطرف الأيمن يساويان على الترتيب $4H(x)$ و e^x. أمّا الجزء على الطرف الأيسر فهو مثير للإهتمام لأنّه مشتق من $H(x)$:

$$\sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = a_1 + a_2 x + a_3 \frac{x^2}{2!} + a_4 \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$= \frac{d}{dx}\left[a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots\right]$$
$$= H'^{(x)}$$

الآن يمكن تبسيط المعادلة (3.20) إلى

$$H'^{(x)} = 4H(x) + e^x$$

وهي معادلة تفاضلية عادية وخطيّة من الدرجة الأولى بمعاملات ثابتة. يمكن إيجاد $H(x)$ باستخدام التقنيات الأساسيّة من مقدّمة المعادلات التفاضليّة، ومن ثمّ يمكن تحليل معامل $\frac{x^n}{n!}$ للحصول على صيغة لـa_n. في حين أنّ هذا يوضّح بشكل كبير

التقاطع بين الرياضيات المنفصلة والمُتصلة، إلّا أنّه يتطلّب المزيد من العمل والذي يفوق استخدام الدالة المولّدة البسيطة.

في المثال الرابع، عرّف $B(x) \coloneqq \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ كدالة مولّدة بسيطة حيث $\{\mathrm{b}_n\}_{n\geq 0}$. خُذ التكرار $b_n = nb_{n-1} + 1$، اضربه بـــ x^{n-1}، ثمّ اجمع لكل من $1 \leq n$.

السؤال 135: إذا قمت بهذه المحاولة، أين ستكون المشكلة؟

كقاعدة عامّة، جرّب الدالة المولّدة البسيطة على علاقة تكرار ذات معاملات ثابتة، والدالة المولّدة الأسّية على علاقة تكرار ليس لها معاملات ثابتة.

الملخص

قدّم هذا القسم أمثلة على طريقة لحل علاقات التكرار من خلال الدوال المولّدة. إنّ "حل" علاقة تكرار يعني إيجاد صيغة مُنتهية (غير تكرارية) للبند ذي المرتبة n. الطريقة هي كالتالي.

- بإعطاء التكرار $\{\mathrm{a}_n\}_{n\geq 0}$ المُعرّف بعلاقة تكرار، عرّف $g(x)$ إمّا كدالة مولّدة بسيطة أو كدالة مولّدة أسّية للتكرار.
- اضرب التكرار إمّا بـ $\frac{x^n}{n!}$ أو x^n ومن ثُمّ قم بتجميع جميع قيم n التي تمّ تعريف التكرار لها.

• قُم بمعالجة الدالة الناتج من الخطوة السابقة بحيث يصبح دالة مولّد مجهول $g(x)$. تأكد من استخدام شروط البداية.

• حل $g(x)$ لإيجاد الدالة المولّد.

• استخرج معامل $\frac{x^n}{n!}$ أو x^n للحصول على معادلة لـ a_n.

التمارين

1. حل علاقات التكرار التالية باستخدام تقنية الدالة المولد.

أ) $a_0 = 0$ و $a_n = 2a_{n-1} + 1$ حيث $1 \leq n$.

ب) $b_0 = \frac{1}{2}$ و $b_n = 3b_{n-1} + \frac{1}{2}$ حيث $1 \leq n$.

ت) $c_0 = 1$ و $c_n = 3a_{n-1} + 3^n$ حيث $1 \leq n$.

ث) $d_0 = 1$ و $d_n = 4d_{n-1} - 4d_{n-2}$ حيث $2 \leq n$.

ج) $e_0 = e_1 = 1$ ، $e_2 = 2$ ، و $e_n = 3e_{n-1} - 3e_{n-2} + e_{n-3}$.

2. استخدم الدالة المولّدة الأسّية لحل علاقة التكرار $a_0 = 2$ و $a_n = na_{n-1} - n!$ حيث $1 \leq n$.

3. لتكن D_n عدد تشويشات المجموعة n. (انظر القسم 3.1) عرّف $D_0 = 1$ و لاحظ $D_1 = 0$.

أ) ماهو الدليل التوافيقي لـ: $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ حيث $2 \leq n$.

ب) أوجد الدالة المولّدة الأسّية لـ $\{D_n\}_{n\geq 0}$.

ت) استخدم الفرع (ب) لإيجاد صيغة لـ D_n.

4. جد صيغة للبند n للسلسلة المعرّفة بعلاقة التكرار $E_n = nE_{n-1} + (-1)^n$ حيث $1 \leq n$، وحيث $E_0 = 1$. أيضاً ما هي العلاقة بين E_n و D_n في التمرين السابق؟

5. ليكن g_n يساوي عدد المجموعات بأي طول مأخوذة من $\{1, 2, 4\}$ ومجموع عناصرها يساوي n. على سبيل المثال $g_3 = 3$ لأنّ المجموعات هي (2, 1)، (1, 2) و (1 , 1, 1). أيضاً $g_4 = 6$ لأنّ المجموعات هي (4)، (1, 1, 2)، (2, 2)، (1, 1, 1, 1)، (1, 2, 1) و (2, 1, 1). عرّف $g_0 = 1$.

أ)أوجد كُلاً من g_1 ، g_2 و g_5 باستخدام التعداد الكامل.

ب) أثبت أنّ $g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + g_{n-4}$ حيث $4 \leq n$.

ت) ليكن $G(x)$ هو الدالة المُولّدة البسيطة لـ $\{g_n\}_{n\geq 0}$. أثبت أنّ $G(x) = \frac{1}{1-x-x^2-x^4}$.

6. انظر لعلاقة التكرار المُعرّفة بـ $b_0 = 1$ و $b_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_{n-i}}{i!}$ حيث $1 \leq n$. ليكن $B(x)$ هو الدالة المُولّدة البسيطة لـ $\{b_n\}_{n\geq 0}$. أثبت أنّ $B(x) = \frac{1}{2-e^x}$.

ملاحظات سريعة

سيجد القارئ الذي هو على دراية في إيجاد حلول السلاسل الأسّية لمعادلات التحليل الجبري أنّ هناك تشابه كبير بين الطرق المذكورة في هذا القسم. في الحقيقة،

هناك الكثير من الأشياء المشتركة بين الطريقة التي قدمناها لحل $a_0 = 1$ ، $a_n = 3a_{n-1}$ حيث $n \geq 1$ وبين حل الاشتقاق التالي لـ $y' = 3y$، $y(0) = 1$.

ابدأ بكتابة الدالة غير المعروف كسلاسل أسّية

$$y = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{4!} + a_4 \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

حيث

$$y' = a_1 + a_2 x + a_3 \frac{x^2}{2!} + a_4 \frac{x^3}{3!} + a_5 \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

و

$$3y = 3a_0 + 3a_1 x + 3a_2 \frac{x^2}{2!} + 3a_3 \frac{x^3}{3!} + 3a_4 \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

بمساواة المعاملات سنحصل على $a_1 = 3a_0$ ، $a_2 = 3a_1$ ، $a_3 = 3a_2$ ،

وبشكل عام $a_n = 3a_{n-1}$. يعني شرط البداية $y(0) = 1$ أنّ $a_0 = 1$ ، وبذلك سيكون حل $a_0 = 1$ ، $a_n = 3a_{n-1}$. إنّ الحل هو $a_n = 3^n$ حيث $n \geq 0$ وعليه فإنّ حل دالة التفاضل هو

$$y = \sum_{n\geq 0} 3^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{(3x)^n}{n!} = e^{3x}, \qquad |x| < \infty$$

3.6 حل علاقات التكرار الخطية

في هذا القسم، سنشتق حلولاً لنوعين من علاقات التكرار التي تحتاج غالباً لمعالجة واحدة دائمة. يمكن للقارئ الذي يرغب بحذف الاشتقاق قراءة المبرهنتين 3.6.1 و3.6.2 فحسب، للتحضير لتطبيقاتها لاحقاً.

النوع الأول من علاقات التكرار التي سنحلها يبدو كما يلي:

$$c_0 = 1$$

$$c_n = 4c_{n-1} + 1 \qquad \text{لـ} \quad n \geq 1$$

هذه **علاقة خطية من الرتبة الأولى ذات معاملات ثابتة**. بشكل عام، تكون هذه العلاقات التكرارية على الشكل:

$$a_0 \quad \text{معطاة}$$

$$a_n = \propto a_{n-1} + \beta \quad \text{لـ} \quad n \geq 1$$

حيث a_0، $\propto$، β أعداد حقيقية، وحيث $\propto \neq 0$. تعتبر هذه العلاقة من الرتبة الأولى لأن التكرار a_n يتضمن البند السابق a_{n-1} فقط. (بشكل مشابه، المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى تتضمن فقط دالةً غير معلومة y ومشتقته الأولى y'). وهي خطية لأن a_n يمكن كتابتها كدالة خطية ذي حدود من درجة أدنى[1]. للعلاقة **معاملات ثابتة** لأن $\propto$ و β ثابتان لا يعتمدان على n. التكرار $d_n = nd_{n-1} + 1$ من القسم السابق خطي لكنه لا يتضمن معاملات ثابتة.

من الأمثلة على العلاقات التكرارية من النوع الثاني التي حللناها في هذا القسم تلك المتعلقة بأعداد فيبوناتشي، وتحديداً

$$F_0 = 1$$
$$F_1 = 1$$
$$F_n = f_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{لـ} \quad n \geq 2$$

هذه **علاقة خطية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة.**

(1) تكرار كـ $c_n = 4c_{n-1}c_{n-2} + 1$ لا يعتبر خطياً.

بشكلٍ عام، تكون مثل هذه العلاقات على الصورة

a_0 معطاة

a_1 معطاة

$a_n =\propto a_{n-1} + \beta a_{n-2} + \gamma$ لـ $n \geq 2$

حيث a_0،a_1 ، $\propto$، β، γ أعداد حقيقية، حيث $\propto \neq 0$. إضافة لذلك، إذا كان في العلاقة $\gamma = 0$ (كما في عدد فيبوناتشي) فإنه تسمى متجانس (Homogenous).

العلاقات التكرارية الخطية من الرتبة الأولى

هدفنا الأول هو حل العلاقة التكرارية

a_0 معطاة

$a_n =\propto a_{n-1} + \beta$ لـ $n \geq 1$

حيث a_0، $\propto$، β أعداد حقيقية، حيث $\propto \neq 0$.

ليكن $f(x)$ دالة مولدة بسيطة لـ $\{a_n\}_{n\geq 0}$. كالعادة، ابدأ بضرب التكرار بـ x^n ثم الجمع حتى $n \geq 1$. ينتج عن هذا

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n = \sum_{n\geq 1} \propto a_{n-1} x^n + \sum_{n\geq 1} \beta x^n$$

أو

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n =\propto x \sum_{n\geq 1} a_{n-1} x^{n-1} + \beta \sum_{n\geq 1} x^n$$

الآن اكتب هذا الناتج في سياق الدالة المولدة البسيطة $f(x)$ والمقادير الأخرى المعلومة:

$$f(x) - a_0 = \propto xf(x) + \beta\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)$$
$$= \propto xf(x) + \frac{\beta x}{1-x}$$

حلّ $f(x) - a_0 = \propto xf(x) + \beta x/(1-x)$ للدالة $f(x)$ للحصول على:

$$f(x) = \frac{a_0(1-x)+\beta x}{(1-\propto x)(1-x)} = \frac{a_0}{1-\propto x} + \frac{\beta x}{(1-\propto x)(1-x)} \qquad (3.21)$$

لإيجاد صيغة لـ a_n، ما عليك إلا استخراج معامل x^n:

$$a_n = \left[\!\left[\frac{a_0}{1-\alpha x} + \frac{\beta x}{(1-\propto x)(1-x)}\right]\!\right]_{x^n}$$
$$= a_0 \cdot \left[\!\left[\frac{1}{1-\alpha x}\right]\!\right]_{x^n} + \beta \cdot \left[\!\left[\frac{1}{(1-\propto x)(1-x)}\right]\!\right]_{x^{n-1}}$$
$$= a_0 \propto^n + \beta \sum_{j=0}^{n-1} \propto^j \cdot 1$$
$$= a_0 \propto^n + \beta \sum_{j=0}^{n-1} \propto^j$$

استخدمنا صيغة الالتفاف للدوال المولدة البسيطة في المتطابقة الثالثة.

يمكن تبسيط صيغة a_n أكثر باستخدام المتطابقة

(3.22)

$$\sum_{j=0}^{k} x^j = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$$

بما أن الصيغة تعمل لأي عدد حقيقي x حيث $x \neq 1$ فإنه توجد حالتان تؤخذان بالاعتبار.

الحالة 1: $\propto \neq 1$

إذا كان $\propto \neq 1$، إذن طبّق المعادلة (3.22) بالمعطيات $x = \propto$ و $k = n - 1$

للحصول على $\sum_{j=0}^{n-1} \propto^j = \frac{1-\propto^n}{1-\propto}$. في هذه الحالة، تصبح صيغة a_n كالتالي:

$$a_n = a_0 \propto^n + \beta \left(\frac{1 - \propto^n}{1 - \alpha} \right)$$

الحالة الثانية: $\propto = 1$

عندما $\propto = 1$، فإن $\sum_{j=0}^{n-1} \propto^j = \sum_{j=0}^{n-1} 1 = n$. في هذه الحالة، فإن صيغة a_n تكون:

$$a_n = a_0 \propto^n + \beta n$$

نعطي الآن إجابة كاملة عن سؤال كيفية حل علاقة تكرار خطية من الرتبة الأولى بمعاملات ثابتة.

المبرهنة 3.6.1: خذ العلاقة التكرارية

a_0 معطاة

$a_n = \propto a_{n-1} + \beta$ لـ $n \geq 1$

حيث a_0، $\propto$، β أعداد حقيقية، حيث $\propto \neq 0$. الدالة المولدة البسيطة للتسلسل $\{a_n\}_{n\geq 0}$ هي

$$\frac{a_0}{1-\propto x} + \frac{\beta x}{(1 - x)(1 - \alpha x)}$$

يتبع ذلك من الدالة المولدة البسيطة أن

$$a_n = \begin{cases} a_0 \propto^n + \beta \left(\frac{1 - \propto^n}{1 - \alpha} \right) & \alpha \neq 1 \\ a_0 \propto^n + \beta n & \propto = 1 \end{cases}$$

هذه صيغة البند من المرتبة n من التسلسل.

تطبيق المبرهنة

على سبيل المثال، لإيجاد البند الـ 20 لـ

$$a_0 = 1$$
$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + 3 \quad \text{لـ} \quad n \geq 1$$

لاحظ أن $\propto = 1/2$ و$\beta = 3$. بملاحظة أن $1 \neq \propto$، نطبّق الصيغة للحصول على

$$a_{20} = (-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{20} + 3\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1-1/2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2^{20}} + 6\left(1 - \frac{1}{2^{20}}\right)$$
$$= 6 - \frac{7}{2^{20}} = 6 - \frac{7}{1048576} = \frac{6291449}{1048576}$$

بشكل عام، الحد n يساوي $a_n = 6 - \frac{7}{2^n}$.

السؤال 136: جد الحد الـ n للعلاقة التكرارية $a_0 = 105$، $a_n = a_{n-1} - \frac{1}{3}$ لـ $n \geq 1$. أيضاً، تحقق من صيغة البند من المرتبة n لـ $c_0 = 1, c_n = 4c_{n-1} + 1$ لـ $n \geq 1$، التي اشتققناها في القسم 3.5.

العلاقات التكرارية المتجانسة الخطية من الرتبة الثانية

كما ذكرنا سابقاً، العلاقة التكرارية التي تعرّف تسلسل فيبوناتشي هي مثال على العلاقات التكرارية المتجانسة الخطية من الرتبة الثانية. بشكلٍ عام تبدو مثل هذه العلاقة التكرارية كما يلي:

a_0 معطاة

a_1 معطاة

$n \geq 2$ لـ $\quad a_n = \propto a_{n-1} + \beta a_{n-2}$

حيث a_0، a_1، $\propto$، β أعداد حقيقية، حيث $\beta \neq 0$. يطلب التمرين 7 توسعة الحل الذي نحن بصدد القيام به لحالة غير-متجانس.

عرّف الدالة $f(x) \coloneqq \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ كدالة مولدة بسيطة للتسلسل $\{a_n\}_{n\geq 0}$. اضرب بـ x^n ثم اجمع حتى $n \geq 2$، ثم قم بإجراء التعديلات المعتادة على الطرف الأيمن:

$$\sum_{n\geq 2} a_n x^n = \sum_{n\geq 2} \propto a_{n-1} x^n + \sum_{n\geq 2} \beta a_{n-2} x^n$$
$$= \propto x \sum_{n\geq 2} a_{n-1} x^{n-1} + \beta x^2 \sum_{n\geq 2} a_{n-2} x^{n-2}$$

هذه المعادلة مكافئة لـ $f(x) - a_0 - a_1 x = \propto x(f(x) - a_0) + \beta x^2 f(x)$، ثم إن حلّ الدالة سيظهر أن:

(3.23)
$$f(x) = \frac{a_0 + (a_1 - \propto a_0)x}{1 - \propto x - \beta x^2}$$

عند هذه النقطة، نحتاج إلى تحليل المعادلة التربيعية في المقام لتحديد طبيعة جذوره. في حالة الجذور المتميزة، سنستخدم تحليل الكسر الجزئي لاستخلاص المعاملات.

الحالة 1: جذور متميزة (Distinct Roots)

إذا كانت الجذور متميزة ، سيكون من الممكن تحليل مقام الكسر إلى الصيغة (تذكّر أن $\beta \neq 0$)

$$1-\propto x-\beta x^2=(1-r_1x)(1-r_2x)$$

حيث $r_1 \neq r_2$. إذن سنجد تحليل الكسر الجزئي لـ

$$\frac{a_0+(a_1-\alpha a_0)x}{1-\propto x-\beta x^2}=\frac{A}{1-r_1x}+\frac{B}{1-r_2x}$$

الضرب بالمقدار $(1-r_1x)(1-r_2x)$ يبين أن

$$\begin{aligned} a_0+(a_1-\alpha a_0)x &= A(1-r_2x)+B(1-r_1x) \\ &= (A+B)+(-r_2A-r_1B)x \end{aligned}$$

وهذا يقود النظام إلى

$$\begin{aligned} A+B &= a_0 \\ -r_2A-r_1B &= a_1-\propto a_0 \end{aligned}$$

وهذا هو الحل

$$A=\frac{(r_1-\propto)a_0+a_1}{r_1-r_2} \text{ و } \mathrm{B}=a_0-\mathrm{A}=\cdots=\frac{(\propto-r_2)a_0-a_1}{r_1-r_2}$$

السؤال 137: حل النظام يدوياً للتحقق من القيم المعطاة لـ A وB. عند أي نقطة في الحساب يلزم افتراض أن $r_1 \neq r_2$؟

الآن، ارجع إلى السؤال (3.23). لقد بيّنا للتو أن:

$$f(x)=\frac{A}{1-r_1x}+\frac{B}{1-r_2x}$$

حيث A وB هما كما حددناهما مسبقاً. هذا يعني أن معامل x^n في الدالة هو $Ar_1^n+Br_2^n$. قبل تنظيم هذه المعلومات في مبرهنة، علينا أن نعامل حالة الجذور المتكررة.

الحالة الثانية: الجذور المتكررة

في هذه الحالة، يمكننا تحليل المقام على الصورة

$$1-\propto x-\beta x^2=(1-r_1x)^2$$

لن يلزمنا تحليل الكسر الجزئي. بما أن

$$\frac{a_0+(a_1-\alpha a_0)x}{1-\propto x-\beta x^2}=\frac{a_0+(a_1-\propto a_0)x}{(1-r_1x)^2}$$

فإنه يمكننا البدء بإيجاد معامل x^2 في $1/(1-r_1x)^2$. استخدم الدالة المولدة البسيطة ذات الخيارات المتعددة كنقطة بداية، تحديداً

$$\frac{1}{(1-x)^m}=\sum_{n\geq 0}\left(\!\binom{m}{n}\!\right)x^n$$

عوّض بالقيمة $m=2$ ثم استبدل قيمة x بـ r_1x للحصول على

$$\frac{1}{(1-r_1x\ )^2}=\sum_{n\geq 0}\left(\!\binom{2}{n}\!\right)(r_1x\ )^n=\sum_{n\geq 0}(n+1)r_1^nx^n$$

وعليه فإن معامل x^2 في $\frac{1}{(1-r_1x\ )^2}$ يساوي $(n+1)r_1^n$. الآن، بما أن الدالة المولدة البسيطة للتسلسل $\{a_n\}_{n\geq 0}$ هو

$$\frac{a_0+(a_1-\propto a_0)x}{(1-r_1x)^2}=\frac{a_0}{(1-r_1x)^2}+\frac{(a_1-\propto a_0)x}{(1-r_1x)^2}$$

فإن صيغة a_n هي

$$\begin{aligned}a_n&=\left[\!\left[\frac{a_0}{(1-r_1x)^2}+\frac{(a_1-\propto a_0)x}{(1-r_1x)^2}\right]\!\right]_{x^n}\\&=\left[\!\left[\frac{a_0}{(1-r_1x)^2}\right]\!\right]_{x^n}+\left[\!\left[+\frac{(a_1-\propto a_0)x}{(1-r_1x)^2}\right]\!\right]_{x^n}\\&=a_0\cdot\left[\!\left[\frac{1}{(1-r_1x)^2}\right]\!\right]_{x^n}+(a_1-\propto a_0)\cdot\left[\!\left[\frac{1}{(1-r_1x)^2}\right]\!\right]_{x^{n-1}}\\&=a_0(n+1)r_1^n+(a_1-\propto a_0)nr_1^{n-1}\end{aligned}$$

القصة كاملة

فيما يلي المبرهنة التي تلخص ما سبق.

المبرهنة 3.6.2: خذ العلاقة التكرارية

a_0 معطاة

a_1 معطاة

$$a_n = \propto a_{n-1} + \beta a_{n-2} \quad \text{لـ} \quad n \geq 2$$

حيث a_0، a_1، $\propto$، β أعداد حقيقية، حيث $\beta \neq 0$. الدالة المولدة البسيطة للتسلسل $\{a_n\}_{n\geq 0}$هي

$$\frac{a_0 + (a_1 - \propto a_0)x}{1 - \propto x - \beta x^2}$$

لتحديد صيغة لـ a_n، نفّذ ما يلي:

- حلل المعادلة التربيعية $1 - \propto x - \beta x^2$ إلى الصيغة $(1 - r_1 x)(1 - r_2 x)$، للأعداد r_1، r_2 (قد تكون معقدة).
- إذا كان $r_1 \neq r_2$، عرّف $A = \frac{(r_1 - \propto)a_0 + a_1}{r_1 - r_2}$ و $B = \frac{(\propto - r_2)a_0 - a_1}{r_1 - r_2}$. الصيغة هي $a_n = Ar_1^n + Br_2^n$ لـ $n \geq 0$.
- إذا كان $r_1 = r_2$، تكون الصيغة $a_n = a_0(n+1)r_1^n + (a_1 - \propto a_0)nr_2^{n-1}$ لـ $n \geq 0$.

يتطلب السؤال الثالث لاشتقاق الصيغة التالية للحصول على جذور المعادلة التربيعية $1 - \propto x - \beta x^2$ اللازمة في الخطوة الأولى من المبرهنة:

(3.24)

$$r_1, r_2 = \frac{\propto \pm\sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}$$

تطبيق المبرهنة

في القسم 4.2، سنطبق المبرهنة 3.6.2 لإيجاد صيغ مغلقة لكل من أعداد فيبوناتشي وأعداد لوكاس. حتى ذلك الحين، سنبين كيفية تطبيق الصيغة مع بعض التعديلات على تكرار فيبوناتشي:

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \quad \text{لـ } n \geq 2$$

يظهر التسلسل الذي تعرفه المعادلات بسيطاً. إذ يبدأ $1,1,0,-1,-1,0$ ثم يعيد من جديد.

في العلاقة التكرارية، $a_0 = a_1 = \propto = 1$ و $\beta = -1$. باستخدام المعادلة (3.24)، نجد أن الجذور متميزة لكنها معقدة.

$$r_1, r_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4(-1)}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

بعد ذلك لاحظ أن $r_1 - r_2 = i\sqrt{3}$ وعليه فإن

$$A = \frac{(r_1 - \propto)a_0 + a_1}{r_1 - r_2} = \frac{\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} - 1\right)(1) + 1}{i\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)$$

و

$$B = \frac{(\propto - r_2)a_0 - a_1}{r_1 - r_2} = \frac{\left(1 - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)(1) - 1}{i\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)$$

وعليه فإن

$$a_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

لـ $n \geq 0$.

الملخص

في هذا القسم طبقنا تقنيات حل العلاقات التكرارية من القسم السابق لاشتقاق صيغ عامة لبعض العلاقات التكرارية من الرتبتين الأولى والثانية. وهذا يعني أن شكل الصيغة المغلقة جاهز لأي مسألة توافقية يمكن وصف حلّها بمثل تلك العلاقة التكرارية.

التمارين

1. جد a_{30} للعلاقة التكرارية $a_n = 1 - 3a_{n-1}$، $a_0 = -1$.

2. حل العلاقات التكرارية التالية.

(أ) $a_0 = 3$، $a_1 = 7$، $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ لـ $n \geq 2$.

(ب) $b_0 = 1$، $b_1 = 3$، $b_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2})$ لـ $n \geq 2$.

(ج) $c_0 = 2$، $c_1 = 0$، $c_n = 2c_{n-1} - 2c_{n-2}$ لـ $n \geq 2$.

(د) $d_0 = 10$، $d_n = 11d_{n-1} - 10$ لـ $n \geq 1$

3. برهن أنه إذا كان $1 - \propto x - \beta x^2 = (1 - r_1 x)(1 - r_2 x)$.

القيم r_1 وr_2 هما كما أعطيا في صيغ المعادلة (3.24).

4. جد صيغة للبند ذي المرتبة n في التسلسل المعرّف بالعلاقة التكرارية $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ لـ $n \geq 2$، حيث $a_0 = 1$ و $a_1 = 2$.

5. أجب عن التمرين السابق، لكن حسب المعطيات التالية: $a_0 = -1$ و $a_1 = 0$. أعد استخدام الحل السابق قدر الإمكان من التمرين السابق.

6. لتكن t_n ترمز لعدد طرق بناء برج مكون من n وحدة باستخدام طوب بناء من الأنواع التالية: أحمر طوب أحادي القطع، أحمر طوب ثنائي القطع، أزرق طوب أحادي القطع، وأزرق طوب ثنائي القطع. على سبيل المثال، $t_1 = 2$، $t_2 = 6$. عرّف القيمة $t_0 = 1$.

اشتق العلاقة التكرارية لـ t_n ثم استخدمها لإيجاد صيغة t_n.

7. وسّع المبرهنة 3.6.2 للعلاقات التكرارية من الصورة $a_n = \propto a_{n-2} + \beta a_{n-2} + \gamma$، حيث γ عدد صحيح معطى والعناصر الأخرى كلها كما كانت مسبقاً.

8. جد $\lim_{\propto \to 1} \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$. ثم وضّح لماذا يوضّح هذا العلاقة بين الصيغ لـ a_n المبينة في المبرهنة 3.6.1.

الفصل الرابع

عائلات الأعداد الشهيرة

في هذا الفصل، نطبّق الأدوات التي تعلّمناها في الفصول السابقة لدراسة عائلات الأعداد المعروفة: معاملات ذات الحدين ومعاملات كثيرة الحدود، وعدد فيبوناتشي وعدد لوكاس، أعداد ستيرلينغ من النوع الأول والثاني، وأعداد تقسيم الأعداد الصحيحة. أعداد فيبوناتشي تحديداً مثيرة للاهتمام، إذ خصصت لها مجلة بأكملها تدعى **فصلية فيبوناتشي**.

براهين التوافيق والدوال المولّدة هي الأدوات الرئيسة التي سنستخدمها. الهدف الأساسي لكل عائلة هو الحصول على صيغة "لطيفة"، لدراستها معايير مستخدمة لتحديد ماهية الصيغ اللطيفة غير الموضوعية. لكن ثمة صيغ ومعادلات يمكن أن يتفق عليها كل شخص. على سبيل المثال، رأينا أن أعداد فيبوناتشي معرّفة بـ $F_1 = 1,\ F_0 = 1$ و$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ لكل $n \geq 2$. الصيغة هي:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \quad n \geq 0 \text{ لكل}$$

ومن السهل تقييمها لأي عدد n وتتضمن العمليات الحسابية الأساسية فقط.

من ناحية أخرى، معادلة $P(n)$ وهي العدد الإجمالي لعدد تقسيمات العدد الصحيح n موجودة بالتأكيد لكنها تتطلب استخداماً عميقاً لنظرية الأعداد وتحليلاً معقداً لفهمها. بين أعداد فيبوناتشي ولوكاس، ثمة صيغة ممكنة لأعداد بيل، وهي تحديداً:

$$B(n) = \frac{1}{e}\sum_{j\geq 0}\frac{j^n}{j!}$$

على الرغم من أنها تتضمن متسلسلات لا متناهية، إلا أنها تتقارب بسرعة لذا تستخدم في الصيغ الحسابية.

1.4 معاملات ذات الحدين ومعاملات كثيرة الحدود

نبدأ بمعاملات كثيرات الحدود، وهي تعميمات لمعاملات ذات الحدين. ستساعدنا هذه على فهم مسائل العدّ التي تتضمن تقسيمات المجموعات حيث يكون للكتل أحجام محددة. سنحلّ بعد ذلك مسألة عدّ طرق تثليث مضلع منتظم والذي يتطلب مبرهنة ذات الحدين موسعة.

معاملات كثيرة الحدود

فكّر بمعامل ذات الحدين $\binom{10}{4}$ (Bionomial Coefficient) كعدّ طرق توزيع 10 أغراض مختلفة على مستقبِلين متميزين بحيث يتلقى المستقبِل A أربعة أغراض

ويتلقى المستقبِل B الأغراض الستة الباقية. إن كتابة $\binom{10}{4,6}$ بدلاً من $\binom{10}{4}$ فقط يحدّد عدد الأغراض التي يتلقاها كل مستقبِل تحديداً.

معامل كثيرات الحدود $\binom{10}{3,4,3}$ (Multinomial Coefficient) يعدّ طرق توزيع 10 أغراض على ثلاثة مستقبِلات متميزة بحيث يتلقى المستقبِل A ثلاثة أغراض ويتلقى المستقبِل B أربعة أغراض ويتلقى المستقبِل C ثلاثة أغراض. مجموع الأرقام في الأسفل يساوي الرقم العلوي، وبخلاف ذلك تكون القيمة صفراً. مثلاً $\binom{10}{2,3,4} = 0$ لأن $10 \neq 4 + 3 + 2$.

بشكلٍ عام، معامل كثيرات الحدود $\binom{n}{t_1,t_2,\dots,t_k}$ يساوي عدد توزيعات الأغراض المختلفة n على عدد من المستقبِلات المختلفة k بحيث يتلقى كل مستقبِل i عدداً من الأغراض t_i لكل $i \in [k]$. نلاحظ أن $\binom{n}{t_1,t_2,\dots,t_k} = 0$ إلا إذا كان مجموع الأغراض $\sum t_i = n$. نعرّف $\binom{0}{0,0,\dots,0} \coloneqq 1$.

السؤال 138: يسلّم معلّم الألعاب الرياضية 8 بلوزات صفراء و8 حمراء و9 زرقاء على 25 طالباً، ويقسّمهم إلى ثلاث فرق مختلفة. بكم طريقة يمكنه ذلك؟

صيغة معاملات كثيرات الحدود

مهمتنا الأولى هي اشتقاق صيغة لمعاملات كثيرات الحدود. كمثال، كم عدد التوزيعات الممكنة لـ 10 أغراض متميزة على 4 مستقبِلات متميزة بحيث يتلقى

المستقبِل الأول $t_1 = 3$ أغراض، والثاني يتلقى $t_2 = 0$ والثالث يتلقى $t_3 = 5$ والرابع يتلقى $t_4 = 2$؟

استخدم واحدة من تبديلات !10 للمجموعة [10]، لنقل (7,10,3,2,1,6,4,9,8,5). ضع أول 3 أغراض في القائمة $t_1 = 3$ في المستقبِل الأول، والأغراض التالية $t_2 = 0$ في المستقبِل الثاني وهكذا:

$$\left(\underbrace{7,10,3}_{\to 1},\underbrace{2,1,6,4,9}_{\to 3},\underbrace{8,5}_{\to 4}\right)$$

لكن ثمة تباديل كثيرة تنتج نفس التوزيع لأن القوائم الفرعية ذات الحجم 3، 5، 2 (فعلياً 3، 0، 5، 2) يمكن أن تكون تبديلاً بأي حال. يوجد !2 !5 !0 !3 تبديلاً مكافئاً للتوزيع

$$\{3,7,10\} \to \text{المستقبِل } 1$$

$$\emptyset \to \text{المستقبِل } 2$$

$$\{1,2,4,6,9\} \to \text{المستقبِل } 3$$

$$\{5,8\} \to \text{المستقبِل } 4$$

وهكذا باستخدام مبدأ التكافؤ، يوجد $\frac{10!}{3!0!5!2!}$ توزيعاً.

السؤال 139: اشرح سبب كون $\binom{10}{3}\binom{7}{0}\binom{7}{5}\binom{2}{2}$ إجابة صحيحة أيضاً.

يمكن تعميم هذا باستخدام مبدأ التكافؤ.

المبرهنة 4.1.1: لأي $n \geq 0$ و $t_1, t_2, \dots, t_k \geq 0$ و $\sum t_i = n$، فإن

$$\binom{n}{t_1, t_2, \dots, t_k} = \frac{n!}{t_1!, t_2!, \dots, t_k!}$$

راجع التمرين 7 للاطلاع على البرهان.

السؤال 140: بكم طريقة يمكنك توزيع 12 كتاباً مختلفاً على 3 أطفال بحيث يأخذ كل طفل 4 كتب؟

برهان توافقي

عندما برهنّا قاعدة باسكال $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$، قمنا بعدّ عدد اللجان المكونة من k شخص والتي يمكن تشكيلها من مجموعة مكونة من n شخص.

تتضمن فكرة الترابط لمعاملات كثيرة الحدود ثلاث مستقبلات، هي:

$$\binom{n}{t_1, t_2, t_3} = \binom{n-1}{t_1 - 1, t_2, t_3} + \binom{n-1}{t_1, t_2 - 1, t_3} + \binom{n-1}{t_1, t_2, t_3 - 1}$$

طالما أن كل $t_i > 0$. على سبيل المثال:

$$\binom{10}{3,5,2} = \binom{9}{2,5,2} + \binom{9}{3,4,2} + \binom{9}{3,5,1}$$

يستخدم البرهان التوافقي أيضاً برهان قاعدة باسكال كعاملٍ ملهم: شرط لأيّ من المستقبِلات الثلاثة ستتلقى الغرض رقم 10. إذا تلقى مستقبِل معيّن صفر من الأغراض، فإننا لن ندرج هذا المستقبِل في الإشراط[1]. على سبيل المثال،

$$\binom{10}{7,0,3} = \binom{9}{6,0,3} + \binom{9}{7,2,2}$$

---

[1]) بشكلٍ مكافئ، يمكن تعريف $\binom{n}{t_1, t_2, \dots, t_k} \coloneqq 0$ إذا كانت أي قيم $t_i < 0$.

وهذا لأنه إذا كان المستقبِل 2 سيتلقى 0 أغراض، فإن الغرض المعنون 10 يجب أن يخصص للمستقبِل 1 أو 3.

المبرهنة 4.1.2 لأي $n \geq 0$ و$t_1, t_2, \ldots, t_k \geq 0$ و $\sum t_i = n$

$$\binom{n}{t_1, t_2, \ldots, t_k} = \sum \binom{n-1}{t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i - 1, t_{i+1}, \ldots, t_k}$$

حيث إن المجموع هو إجمالي قيم $i \in [k]$ التي تحقق الشرط $t_i > 0$.

البرهان التوافقي: افترض أن $n \geq 0$ وأن $t_1, t_2, \ldots, t_k \geq 0$ بحيث تحقق المجموع $\sum t_i = n$. ما عدد التوزيعات الممكنة لأغراض متميزة عددها n على مستقبِلات متميزة عددها k بحيث يتلقى المستقبِل الأول الغرض المرقم t_1 والمستقبِل الثاني t_2 وهكذا؟

الإجابة 1: ثمة $\binom{n}{t_1, t_2, \ldots, t_k}$ توزيع.

الإجابة 2: ثمة شرط على المستقبِل الذي يتلقى الغرض المعنون n. إذا كان هذا المستقبِل i (طالما أن $t_i > 0$) فإنه يوجد $\binom{n-1}{t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i - 1, t_{i+1}, \ldots, t_k}$ توزيع. بحسب مبدأ المجموع، فإن إجمالي عدد التوزيعات $\sum \binom{n-1}{t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i - 1, t_{i+1}, \ldots, t_k}$، حيث إن المجموع لكل قيم i التي تحقق الشرط $t_i > 0$.

تعدّ معاملات كثيرات الحدود الدالة المحتمل $[n] \to [k]$ المحدد الحجم للصورة الأولية لكل عنصر في المجال المقابل. تنتج المبرهنة التالية عن أخذ جميع الأحجام الممكنة المنصوص عليها وتجمع النتائج.

المبرهنة 4.1.3: لأي $k > 0$ و $n > 0$،

$$k^n = \sum \binom{n}{t_1, t_2, \dots, t_k}$$

حيث يشمل المجموع جميع القوائم المكونة من العناصر k أي $(t_1, t_2, \dots, t_k)$ من الأعداد الصحيحة غير السالبة التي مجموعها n.

السؤال 141: كم عدد الحدود التي يحتويها المجموع؟

كتوضيح، عدد الدوال $[3] \to [3]$ يساوي

$$\binom{3}{3,0,0} + \binom{3}{0,3,0} + \binom{3}{0,0,3} + \binom{3}{2,1,0} + \binom{3}{2,0,1} + \binom{3}{0,2,1} + \binom{3}{1,2,0} + \binom{3}{1,0,2} + \binom{3}{0,1,2} + \binom{3}{1,1,1}$$
$$= 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 6 = 27$$

وبطبيعة الحال $27 = 3^3$ أيضاً.

مبرهنة كثيرات الحدود

ينتج عن معاملات كثيرات الحدود "مبرهنة كثيرات الحدود"، تماماً مثلما تنتج معاملات ذات الحدين "مبرهنة ذات الحدين". لبرهان مبرهنة كثيرات الحدود، يمكن إجراء تعديل بسيط على المنهج الذي استخدم لبرهان مبرهنة ذات الحدين في القسم 2.2.

المبرهنة 4.1.4: (كثيرات حدود) لأي قيمة $n \geq 0$،

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum \binom{n}{t_1, t_2, \dots, t_k} x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_k^{t_k}$$

حيث يشمل المجموع جميع القوائم المكونة من العناصر k أي $(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ من الأعداد الصحيحة غير السالبة التي مجموعها n.

السؤال 142: أعط برهاناً توافقياً لمبرهنة كثيرات الحدود، افترض أن x_j هي أرقام صحيحة موجبة.

عدّ التقسيمات بخصائص معينة

كم تقسيم في المجموعة [20] تتضمن 3 أجزاء حجمها 1، وكم تقسيم تتضمن 3 أجزاء حجمها 4، وكم تقسيم تتضمن جزءاً واحداً حجمه 5؟

سيبدو أن معامل كثيرات الحدود التالي يتعلّق بالإجابة

$$\binom{20}{1,1,1,4,4,4,5} = \frac{20!}{(1!)^3(4!)^3(5!)^1} \tag{4.1}$$

بما أنه يعدّ توزيعات الأغراض العشرين المتميزة على 7 مستقبِلات متميزة بحيث تتلقى كلٌ من المستقبلات 1–3 غرضاً واحداً فقط، وتتلقى كل واحدة من المستقبلات 4–6 أربعة أغراض في حين يتلقى المستقبِل 7 خمسة أغراض. فيما يلي مثال على التوزيع:

المستقبِل 1 ← {17}

المستقبِل 2 ← {3}

المستقبِل 3 ← {11}

4 المستقبِل ← {2,5,6,10}

5 المستقبِل ← {1,7,19,20}

6 المستقبِل ← {9,15,16,18}

7 المستقبِل ← {4,8,12,13,14}

لكن تقسيم المجموعة المشتقة من هذا التوزيع تتضمن الأجزاء التالية:

$\{17\}, \{3\}, \{11\}, \{2,5,6,10\}, \{1,7,19,20\}, \{9,15,16,18\}, \{4,8,12,13,14\}$

وعليه فإن الإجابة المبيّنة في (4.1) أعلاه كبيرة جداً لأن المستقبِلات متميزة وليست متطابقة. هنا يأتي دور مبدأ التكافؤ: قد نعيد ترتيب تخصيص الكتل التي حجمها 1 على المستقبِلات الثلاثة الأولى بأي 3! طريقة، وترتيب الكتل التي حجمها 4 على المستقبلات الثلاثة التالية بأي 3! طريقة، وترتيب الكتل التي حجمها 5 على المستقبِل الأخير بأي 1! طريقة (استخدم لجعل نمط التوزيع أكثر وضوحاً) وننهي بتقسيم مكافئ. $= \binom{20}{1,1,1,4,4,4,5} / 3!\,3!\,1! = \frac{20!}{(1!)^3(4!)^3(5!)^1 3!3!1!} =$ 40,738,698,000

عدد تقسيمات [20] التي تتضمن كتلاً كما هو محدد يساوي حوالي 40.7 بليون، بحسب:

بشكلٍ عام، إذا تضمن تقسيم على $[n]$ كتلة عددها p_j بحجم j، حيث $j \in [n]$، فإنه يوجد

(4.2)

$$\frac{n!}{(1!)^{P1}(2!)^{P2}\dots(n!)^{Pn}}=\frac{n!}{\prod_{j=1}^{n}(j!)P_j}$$

تقسيمات مختلفة تكون فيها الكتل "معنونة" كما في المثال الذي ناقشناه تواً.

حجم كل صف تكافؤ هو $p_1!\,p_2!\dots p_n!$، وعليه فإن إجمالي عدد التقسيمات $[n]$ إلى كتل ذات أحجام محددة يساوي العدد المبيّن في (4.2) أعلاه مقسوماً على حاصل ضرب $p_i!$

المبرهنة 4.1.5: لكل $n>0$، عدد التقسيمات لمجموعة مكونة من n عنصر بحيث يوجد p_j كتلة حجم كل منها يساوي j، لكل $j\in[n]$، يساوي:

$$n!\Big/\prod_{j=1}^{n}(j!)^{p_j}p_j!$$

السؤال 143: في المبرهنة، ماذا تساوي $\sum_{j=1}^{n} j\,.\,p_j$ دائماً؟

مثال: لعبة البريدج

كم طريقة يوجد لترتيب أوراق اللعب وعددها 52 إلى أربع كومات تتكون كل منها من 13 ورقة؟ كم طريقة يوجد لتوزيع أوراق اللعب وعددها 52 على أربعة لاعبين بحيث يستلم كل لاعب 13 ورقة؟

الفرق بين السؤالين يكمن فيما إذا كانت المستقبِلات متطابقة (السؤال الأول) أو متميزة (السؤال الثاني). يسأل السؤال الأول عن عدد الطرق لتقسيم مجموعة

مكونة من 52 عنصراً إلى أربع كتل حجم كل منها 13. بحسب المبرهنة 4.1.5، فإن عدد الطرق:

$$\frac{52!}{(13!)^4 4!} = 2,235,197,406,895,366,368,301,560,000$$

لا بدّ أن مئات منافسات لعبة البريدج قد جرت على مرّ تاريخ اللعبة في أرجاء العالم، لكن ليس بالضرورة أن تكون كل حالات التقسيم الممكنة قد تحققت ولو لمرة واحدة.

يسأل السؤال الثاني عن عدد طرق توزيع 13 ورقة على كل لاعب. عدد الطرق:

$$\binom{52}{13,13,13,13} = 52,644,737,765,488,792,839,237,440,000$$

الرابط بين أعداد ستيرلينغ وأعداد بيل

ثمة رابط بين التقسيمات ذات أحجام الكتل المحددة وأعداد ستيرلينغ من النوع الثاني، أو قد تجد رابطاً مع أعداد بيل لكنها رابطة ضعيفة. على سبيل المثال، نعرف أن عدد التقسيمات لـ [4] إلى كتلتين هو $S(4,2)$. مثل هذا التقسيم لابدّ أن يحتوي إما كتلة حجمها 1 أو كتلة حجمها 3 أو كتلتين حجم كل منهما 2. تطبيق المبرهنة بالمعطيات $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (1,0,1,0)$ و $n = 4$ يعطي:

$$\frac{4!}{(1!)^1(2!)^0(3!)^1(4!)^0 1!\,0!\,0!} = 4$$

بالتعويض بـ $n = 4$ و $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (0,2,0,0)$ نحصل على

$$\frac{4!}{(1!)^0(2!)^2(3!)^0(4!)^0 0!\,2!\,0!\,0!} = 3$$

وهذا يظهر أن $S(4,2) = 4 + 3 = 7$.

السؤال 144: ماذا ينتج عن الصيغة إذا كان هناك كتلة واحدة حجمها n؟ ماذا لو كان هناك n كتلة حجم كل منها 1؟

متطابقتان إضافيتان لمعاملات ذات الحدين

فيما تبقى من هذا القسم، سنعود لمعاملات ذات الحدين والبراهين التوافقية. تكمن المهارة في إعطاء برهان توافقي لمتطابقة في طرح السؤال الصحيح. فيما يلي برهانان لم تكن الأسئلة المتعلقة بهما واضحة بوضوح أسئلة الأمثلة الواردة في القسم 2.2. في كلا البرهانين، نستخدم تفسير لجنة العدّ لـ $\binom{n}{k}$.

تستخدم المتطابقة التالية لأي خيارات من الأعداد الصحيحة غير السلبية m و n و k، لكن القيود المعطاة في المبرهنة تساعدنا في التفسير في سياق التوافيق.

المبرهنة 4.1.6: لأي أعداد صحيحة k و m و n والتي تحقق $n, m \geq 1$ و $0 \leq k \leq m$، فإن:

$$\sum_{j\geq 0} \binom{n}{j}\binom{m}{k+j} = \binom{n+m}{n+k}$$

البرهان التوافقي: من مجموعة مكونة من n امرأة وm رجل، كم عدد اللجان الممكن تكوينها بحجم $n+k$؟

الإجابة 1: $\binom{n+m}{n+k}$

الإجابة 2: لاحظ أنه في كل الأحوال، يجب أن تضم اللجنة k رجل. بشرط أن يكون العدد j من الرجال في اللجنة غير العدد الأقل k. يوجد $\binom{m}{k+j}$ طريقة لاختيار الرجال. يتكون ما تبقى من اللجنة من $n-j$ امرأة ، كما أن لكل طريقة لاختيار الرجال يوجد $\binom{n}{j}$ طريقة لاختيار j امرأة للإقصاء من اللجنة، وبهذه الطريقة يتم اختيار $n-j$ امرأة للانضمام للجنة. وعليه فإن عدد اللجان الممكن تكوينها للقيمة j يكون $\binom{n}{j}\binom{m}{k+j}$. بجمع جميع قيم j نحصل على الطرف الأيسر من المتطابقة.

السؤال 145: إذا كانت $k=0$، فإلى أي قيمة تتناقص المتطابقة؟

نعطي برهانين على المتطابقة التالية، أحدهما توافقي والآخر يستخدم مبرهنة ذات الحدين والاشتقاق. اختر البرهان الذي تفضله.

المبرهنة 4.1.7: لكل القيم $n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

البرهان التناظري: لتكن $n \geq 1$. لنفترض وجودة مجموعة من الناس عددهم n، بكم طريقة يمكننا اختيار لجنة غير فارغة بأي حجم وتخصيص شخص واحد كرئيس؟

الإجابة 1: اختر الرئيس أولاً بإحدى الطرق n. ثم اختر أي مجموعة جزئية من الأشخاص المتبقين $n-1$ لتشكيل ما تبقى من اللجنة. ثمة 2^{n-1} من هذه المجموعات الجزئية، إذن إجمالي الاختيارات يكون $n2^{n-1}$.

الإجابة 2: يشترط في تكون اللجنة أن يكون حجمها k، حيث $1 \le k \le n$. عدد اللجان الممكنة من الحجم k هو $\binom{n}{k}$. لكلٍ من هذه اللجان، يوجد k طريقة لاختيار الرئيس. في الإجمالي فإن عدد الطرق $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

البرهان باستخدام مبرهنة ذات الحدين: بما أن $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ استخدم الاشتقاق للحصول على:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$$

افترض أن قيمة $x = 1$ لتحقيق التطابق.

■

مبرهنة ذات الحدين الموسّعة

مبرهنة ذات الحدين الموسّعة (*Extended Binomial Theorem*)، وتعرف أحياناً باسم مبرهنة متسلسلات ذات الحدين، تعمّم مبرهنة ذات الحدين إلى الحالة حيث لا تكون فيها n في $(1+x)^n$ عدداً صحيحاً غير سالب. فهي نتيجة في التحليل وسنذكر المبرهنة دون برهان.

المبرهنة 4.1.8 (نظرية ذات الحدين الموسّعة): لأي عدد حقيقي $\propto$،

$$(1+x)^{\propto} = \sum_{k\geq 0} \binom{\propto}{k} x^k \quad \text{لـ} \quad |x| < 1$$

إن وجود مجموع غير محدود يتطلب تحديد فترة تطابق، في هذه الحالة $|x| < 1$.

كالعادة، عندها نعتبر أن $(1+x)^{\propto}$ كشكل موجز للدالة المولد البسيط لـ $\left\{\binom{\propto}{k}\right\}_{k\geq 0}$، تتيح لنا مبرهنة متسلسلة القوى إنجاز هذا الأمر.

السؤال الوحيد هو: ماذا تعني $\binom{\propto}{k}$ عندما لا تكون $\propto$ عدداً صحيحاً غير سالب؟ على الرغم من عدم وجود أهمية توافقية للارتباط بها، إلا أن الصيغة الجبرية نفسها لاتزال قائمة:

$$\binom{\propto}{k} \coloneqq \frac{(\propto)_k}{k!}$$

حيث

$$(\propto)_k \coloneqq \propto (\propto -1) \dots (\propto -k+1)$$

بكلماتٍ أخرى، استخدم الصيغة $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$ كما لو كانت n عدداً صحيحاً غير سالب.

السؤال 146: ما قيمة $\binom{-1/2}{4}$؟

استخلاص المعاملات

ما هو معامل x^k في $1/\sqrt{1-4x}$؟

أعد كتابة مبرهنة ذات الحدين الموسّعة وطبقها:

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k\geq 0} \binom{-1/2}{k} (-4x)^k$$

المعامل هو $\binom{-1/2}{k}(-4x)^k$. من الجدير هنا محاولة التبسيط، لسببين. الأول، الإجابة النهائية تكون أوضح وأرتب. والثاني، أن الجيد ممارسة الترتيب. ابدأ بالتبسيط:

$$\binom{-1/2}{k}(-4x)^k = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)(-4)^k}{k!}$$
$$= \frac{(1)(3)(5)\ldots(2k-1)(-1)^k(-4)^k}{2^k k!}$$
$$= \frac{(1)(3)(5)\ldots(2k-1)2^k}{k!}$$

الآن يأتي دور الخدعة الجبرية: اضرب الحد الأخير بـ$\frac{k!}{k!}$. لاحظ أن:

$$2^k k! = 2^k(1)(2)(3)\ldots(k) = (2)(4)(6)\ldots(2k)$$

وبذا يصبح بسط الحد $\frac{K!}{K!}$، أي أن:

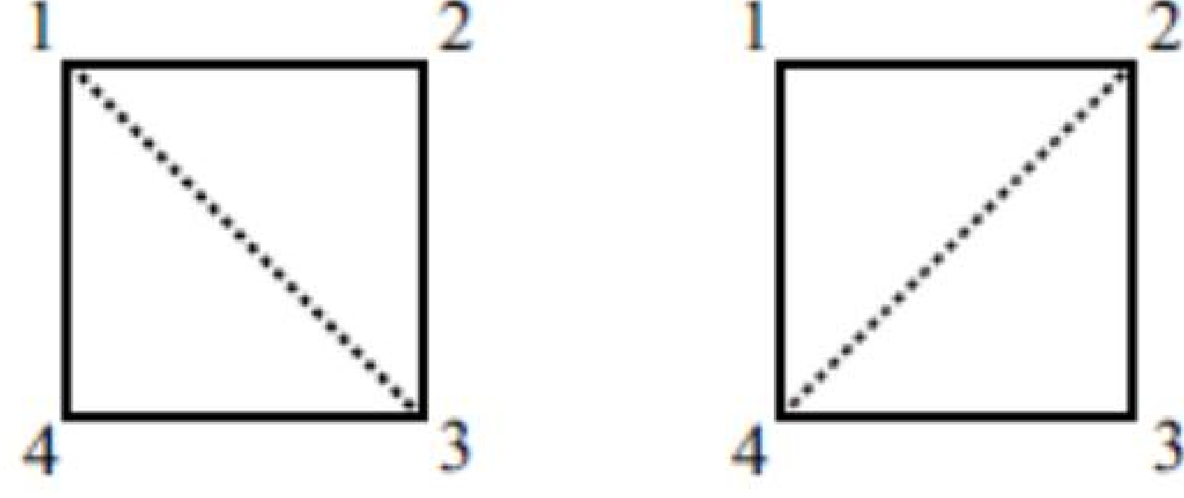
$$\frac{(1)(3)(5)\ldots(2k-1)2^k}{k!}.\frac{k!}{k!} = \frac{(2k)!}{k!\,k!} = \binom{2k}{k}$$

وعليه فإن $(1-4x)^{-1/2}$ دالة مولد بسيط لتسلسل $\left\{\binom{2k}{k}\right\}_{k\geq 0}$.

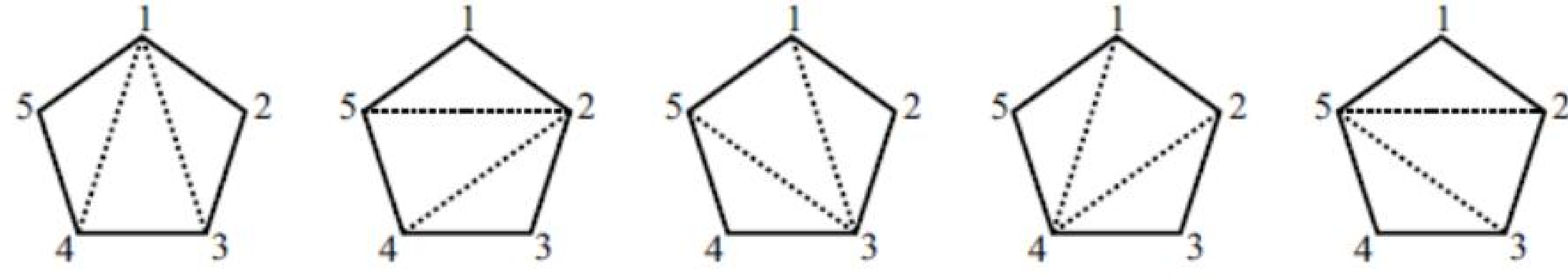
تثليث مضلع منتظم عدد أضلاعه n

بكم طريقة مختلفة يمكننا تثليث مضلع منتظم عدد أضلاعه n ذي رؤوس مرقمة؟ (التثليث يقسم المضلع إلى مناطق مثلثة الشكل عن طريق إضافة أقطار غير متقاطعة).

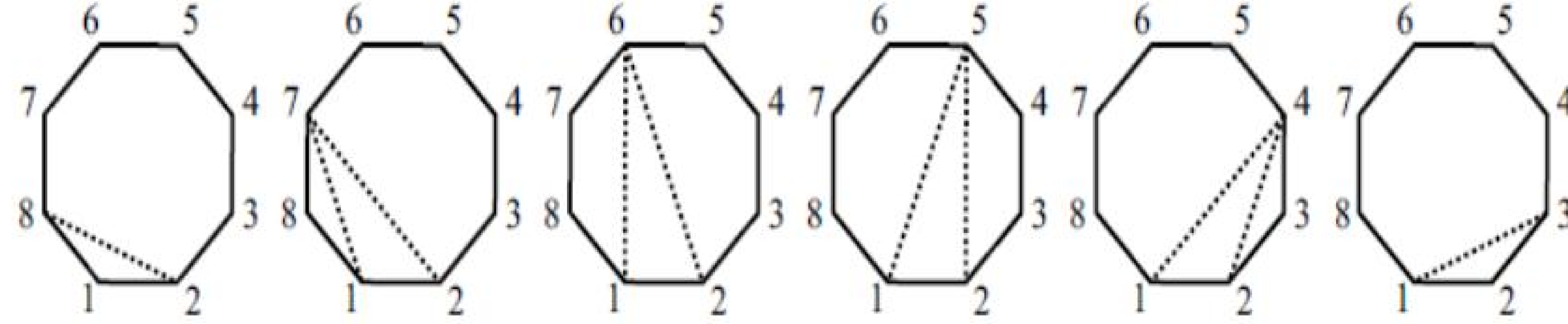
تذكر هذا الرقم T_n. للمثلث $T_3 = 1$ تثليثات وللمربع $T_4 = 2$ تثليثات:



كما أن للمضلع الخماسي $T_5 = 5$ تثليثات:



ركّز على أي وجه من أوجه المضلع الذي عدد أضلاعه n، صِل بين الرأسين 1 و2. في أي تثليث، سيشكل الجانب أحد أضلع المثلث. خذ في الاعتبار حالات تعتمد على موقع الرأس الثالث للمثلث. ثمة حالات ثلاث للمضلع الثماني الأضلاع:



إذا كانت الزاوية الثالثة مرقمة بـ 8، قم بتثليث الشكل ذي الأضلاع السبعة الباقية (ذي الزوايا 2-3-4-5-6-7-8) بـ T_7 طريقة، بحيث يكون مجموع التثليثات T_3T_6. إذا كانت الزاوية الثالثة مرقمة بـ 6، قم بتثليث 1-6-7-8 بـT_4 طريقة، و2-3-4-5-6 بـT_5 طريقة، بحيث يكون مجموع التثليثات T_4T_5. إكمال هذا ينتج:

$$T_8 = T_7 + T_3T_6 + T_4T_5 + T_5T_4 + T_6T_3 + T_7$$

بشكلٍ عام، ينتج عن تطبيق الفكرة نفسها:

$$T_n = T_{n-1} + T_3T_{n-2} + T_4T_{n-3} + \cdots + T_{n-2}T_3 + T_{n-1}$$

لـ $n \geq 4$. عند تعريف $T_2 \coloneqq 1$ يمكننا أن نكتب بدلاً:

(4.3)

$$T_n = \sum_{k=2}^{n-1} T_kT_{n-k+1} \qquad \text{لـ } n \geq 3 \text{، حيث } T_2 \coloneqq 1$$

هذه علاقة تكرارية غير خطية، لكن مازال بإمكاننا استخدام التقنيات الواردة في القسم 3.5.

ليكن $f(x) = \sum_{n\geq 2} T_nx^{n-2}$ دالة مولداً بسيطاً لـ $\{T_n\}_{n\geq 2}$. أي أن T_n هي معامل x^{n-2} في الدالة $f(x)$. (هذا التناقض بين الدليل n والقوة $n-2$ يجعل الجبر أوضح).

اضرب المعادلة (4.3) بـ x^{n-2} واجمع $n \geq 3$:

(4.4)

$$\sum_{n\geq 3} T_nx^{n-2} = \sum_{n\geq 3}\left(\sum_{k=2}^{n-1} T_kT_{n-k+1}\right)x^{n-2}$$

الطرف الأيسر هو $f(x) - T_2 = f(x) - 1$. الطرف الأيمن هو الالتفاف الذي يبدو أنه شيء قريب من $[f(x)]^2$. اكتب بضعة حدود وراقب:

$$\begin{aligned}
&T_2T_2x + (T_2T_3 + T_3T_2)x^2 + (T_2T_4 + T_3T_3 + T_4T_2)x^3 + \cdots \\
&= x(T_2T_2 + (T_2T_3 + T_3T_2)x + (T_2T_4 + T_3T_3 + T_4T_2)x^3 + \cdots) \\
&= [f(x)]^2
\end{aligned}$$

وبذا تصبح المعادلة (4.4) $f(x)-1=[f(x)]^2$ أو

$$x[f(x)]^2-f(x)+1=0$$

الآن (المزيد من السحر باستخدام الدوال المولّدة)، حلّ المتباينة للدالة غير المعلومة f باستخدام المعادلة التربيعية:

$$f(x)=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(x)(1)}}{2x}=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$$

طبّق مبرهنة ذات الحدين الموسّعة على $\sqrt{1-4x}$، فتحصل على:

$$(1-4x)^{1/2}=\sum_{n\geq 0}\binom{1/2}{n}(-4)^n x^n$$

لكن مجموع $f(x)$ يشمل $n\geq 2$، وعليه فإن

$$f(x)=\frac{1}{2x}\pm\frac{1}{2x}\sqrt{1-4x}=\frac{1}{2x}\pm\frac{1}{2x}\sum_{n\geq 2}\binom{1/2}{n}(-4)^n x^n$$
$$=\frac{1}{2x}\pm\sum_{n\geq 2}\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^n x^{n-1}$$

اعتماداً على الحل الذي نعتمده،

(4.5)

$$T_n=\pm\frac{1}{2}\binom{1/2}{n-1}(-4)^{n-1}$$

بما أن T_n (تذكّر) هو معامل x^{n-2} في $f(x)$. يطلب التمرين 14 منك بيان أن الحل السالب هو الحل الذي نريده ويمكن تبسيطه لـ

(4.6)

$$T_n=\frac{1}{n-2}\binom{2n-4}{n-1} \qquad \text{لـ } n\geq 3$$

ملخص

تناول هذا القسم المزيد عن معاملات ذات الحدين ومبرهنة ذات الحدين. حيث تعتبر كل من معاملات كثيرات الحدود ومبرهنة كثيرات الحدود امتداداً لمعاملات ذات الحدين ومبرهنة ذات الحدين على التوالي بطريقة طبيعية توافقية. وقد استخدمناها لحل العلاقة التكرارية غير الخطية.

التمارين

1. تستمر مباريات بطولة كرة القدم على مدار 16 مباراة. القائمة التالية تمثل سجل فوز وخسارة أحد الفرق، حيث فاز في أول مبارتين، وخسر المباراة الثالثة وتعادل في الرابعة وهكذا، وأنهى المنافسات بسجل 10-4-2 (10 فوز، 4 خسارة، 2 تعادل).

أ) كم عدد الطرق المتاحة للفريق للحصول على سجل 10-4-2؟

ب) كم عدد الطرق في الفرع أ من السؤال والتي لا تتضمن خسارات متتالية؟

ت) كم عدد الطرق في الفرع أ تتضمن أطول مسار من الفوز في ست مباريات؟

2. خذ الأحرف في كلمة DIVISIBILITY.

أ) كم قائمة مختلفة مكونة من 12 حرفاً يمكن تشكيلها بإعادة ترتيب الأحرف؟

ب) كم قائمة مختلفة مكونة من 12 حرفاً (حسب الفرع أ) لا تحتوي أحرف I متجاورة؟

3. انتسب لجامعة 120 طالباً جديداً مازالوا بحاجة لتخصيص سكن جامعي لهم. لكن السكن المتبقي يستوعب 105 طلاب ويحتوي 42 غرفة مزدوجة (تستوعب كل منها طالبين) و7 غرف ثلاثية (تستوعب كل منها 3 طلاب). بكم طريقة يمكن للجامعة اختيار 105 طلاب لتسكينهم في سكن الجامعة، ومن ثم ترتيبهم مع شركاء السكن من دون تخصيص الغرف بعد؟

4. في التمرين السابق، افترض أن الجامعة تحصل على موافقة لاستخدام سكن مؤقت للطلبة الـ 15 الباقين من بين ثلاث صالات. كل صالة تستوعب 5 طلاب. كم طريقة يمكن من خلالها توزيع الـ 120 طالباً على الغرف؟

5. يعيش فأر في فندق، ويرغب في الانتقال من مدخل الطابق الأرضي عند الموقع (0,0,0) إلى حيث يوجد جحره. في الطابق العاشر عند الموقع (12,9,10). كل حركة يأتي بها الفأر تكون إما بمقدار غرفة شمالاً أو غرفة شرقاً أو طابقاً إلى الأعلى. على سبيل المثال، من (0,0,0) يتحرك الفأر إما إلى (,0,10) أو (,1,00) أو (,0,10) على التوالي. كم طريقة يستطيع بها الفأر التنقل؟

6. افترض أن $|A| = 42$. كم عدد علاقات التكافؤ على A التي لها صفوف تكافؤ مختلفة ذات حجم 4، 7، 7، 8، 8، 8؟

7. استخدم مبدأ التكافؤ لإثبات المعادلة لمكافئات كثيرة الحدود المعطاة بالمبرهنة 4.1.1.

8. أعطِ برهاناً توافقياً: $\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}2^{n-m}$

9. أعطِ برهاناً توافقياً: $\binom{kn}{2} = k\binom{n}{2} + n^2\binom{k}{2}$

10. أعطِ برهانين لما يلي، أحدهما توافقي والآخر ليس توافقياً: لكل

$$n \geq 2, n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k\geq 2} k(k-1)\binom{n}{k}$$

11. احسب $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-2k}{n-k}\binom{2k}{k}$ لقيم $n = 0,1,2,3$. ضع تخميناً ثم برهنه توافقياً.

12. إذا أعطيت عدداً صحيحاً موجباً n، تركيب n هو قائمة من الأعداد الصحيحة الموجبة التي مجموعها n. على سبيل المثال، (3,1,1) و(1,3,1) و(1,4) و(5) هي كلها تراكيب لـ 5. وبشكلٍ عام، كم عدد تراكيب المجموعة n الممكنة؟

13. جد معامل x^n في $\sqrt{1-8x}$.

14. أكمل برهان الصيغة (4.6). تأكّد من تبرير أن استخدام الحل السلبي في الصيغة (4.5) هو الحل الصحيح.

15. تنصّ خاصية التجميع في عملية الضرب أن $x(yz) = (xy)z$. بكلماتٍ أخرى، لحساب حاصل ضرب xyz يمكن إيجاد حاصل ضرب yz أولاً ومن ثم ضرب الناتج بـ x، أو يمكنك إيجاد حاصل ضرب xy أولاً ومن ثم ضرب الناتج بـ z. إذن ثمة طريقتان لحساب حاصل ضرب ثلاثة أرقام من خلال حاصل ضرب الأزواج ومن دون تغيير ترتيب الأرقام.

يوجد خمس طرق لإنجاز ذلك بضرب أربعة أرقام.

$$w(x(yz)) \quad w((xy)z) \quad (wx)(yz) \quad (w(xy))z \quad ((wx)y)z$$

لتكن a_n تساوي عدد الطرق لأداء ذلك بإيجاد حاصل ضرب أرقام المجموعة n. وجدنا تواً أن $a_4 = 5$ و $a_3 = 2$.

اشتق علاقة تكرارية لـa_n ثم حلّها لإيجاد صيغة لـ a_n.

16. عرّف $\left\{ {n \atop k} \right\}$ كعدد القوائم المكونة من $(n + k)$ عنصر، والتي تكون على هيئة $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+k})$، حيث n للعناصر هي الواحدات وk للعناصر هي الواحدات السالبة وحيث إنه لكل قيم i، فإن مجموع أول مدخلات i عدد غير سالب.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_i \geq 0 \qquad \text{لجميع } i \in [n + k]$$

(أ) جد $\left\{ {3 \atop 2} \right\}$ و$\left\{ {4 \atop 4} \right\}$ بإكمال العدّ. أيضاً، وضّح لماذا $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ عندما $k > n$.

(ب) جد $\left\{{n \atop 0}\right\}$ لقيم $n \geq 0$ و$\left\{{n \atop 1}\right\}$ لقيم $n \geq 1$.

(ج) أعطِ برهاناً توافقياً: $\left\{{n \atop k}\right\} = \left\{{n \atop k-1}\right\} + \left\{{n-1 \atop k}\right\}$. أيضاً، لأي قيم من kو n تكون هذه المتطابقة صحيحة؟

(د) أثبت أن $\left\{{n \atop n}\right\} = \left\{{n \atop n-1}\right\}$ لـ $n \geq 1$

(ه) احسب جدولاً للقيم $\left\{{n \atop k}\right\}$ لقيم n و k التي تحقق $0 \leq k \leq n \leq 8$.

ملاحظة

قدم جورج بوليا (George Polya) (1956) بحثاً بعنوان حول كتابة الصور (On Picture-Writing)، وهو عرض كلاسيكي قدمه حلّال المشاكل جورج بوليا. وقد شرح فيه كيف يمكن اشتقاق الدوال المولّدة من المتسلسلة الرمزية بسهولة (كما فعلنا في بداية القسم 3.3)، كما تحلّ أيضاً مشكلة عدّ تثليثات مضلع منتظم عدد أضلاعه n، وقد تناولنا ذلك في آخر هذا القسم.

التمرين 16 مأخوذ من بحث "ترتيبات عدّ الواحدات والواحدات السالبة" (Counting Arrangements of 1's and -1's") لـ د. ف. بايلي (D. F. Bailey) وقد نشر في مجلة **الرياضيات** 69 (*Mathematics Magazine* 69) في نيسان (أبريل) 1996، 128–131. كان هدف البحث تقديم اشتقاق جديد للمعادلة $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ لعدد كاتالان (Catalan Number) ذي الرتبة n.

4.2 أعداد فيبوناتشي وأعداد لوكاس

تعرّف علاقة التكرار التالية أعداد فيبوناتشي المعروفة:

$$F_0 = 1$$
$$F_1 = 1$$

$n \geq 2$ لـ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

يوضّح الجدول التالي بعضاً من أعداد فيبوناتش الأولى:

13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\boldsymbol{n}$
377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1	$\boldsymbol{F_n}$

نفس التكرار يحدّد أعداد لوكاس لكن بتغيير واحد في الشروط الأولية:

$$L_0 = 1$$
$$L_1 = 1$$

$n \geq 2$ لـ $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$

يوضّح الجدول التالي بعضاً من أعداد لوكاس الأولى:

13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	n
521	322	199	123	76	47	29	18	11	7	4	3	1	2	L_n

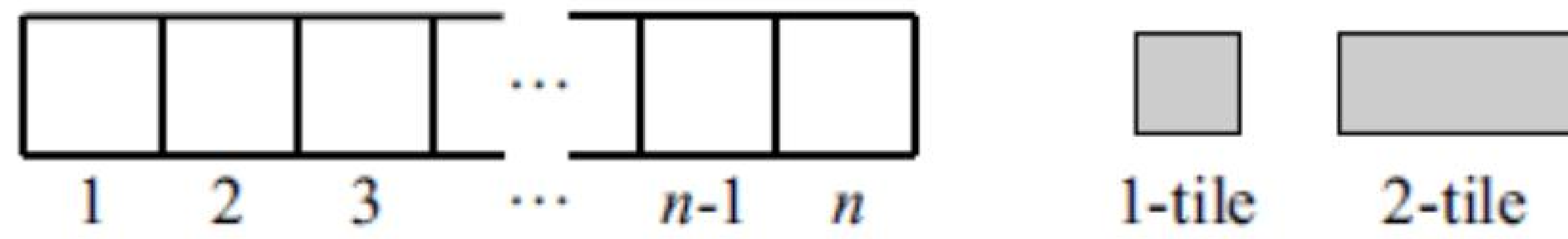
يشيع استخدام أعداد فيبوناتشي وأعداد لوكاس (مع أن أعداد فيبوناتشي تستخدم أكثر) في الرياضيات وفي مجالات أخرى. يركّز هذا القسم تحديداً على أعداد فيبوناتشي، لكن تابع التمارين للاطلاع على نتائج عن استخدام أعداد لوكاس.

التفسير التوافقي لأعداد فيبوناتشي

تبليط لوحة حجمها n

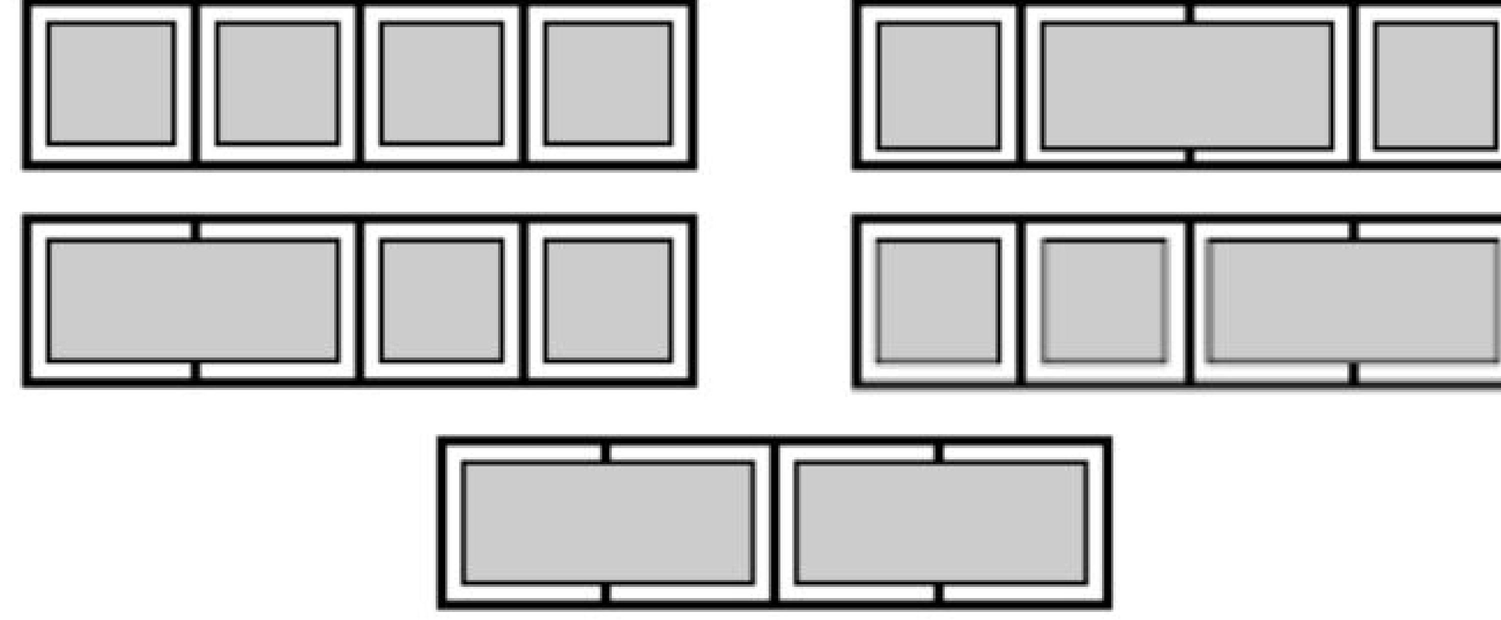
من طرق إضفاء الصيغة التوافقية على أعداد فيبوناتشي التفكير بها كإجابات عن أسئلة محددة تختص بالتبليط. هذا التفسير هو بشكل خاص مجسد وملائم.

لنفترض وجود لوحة شطرنج أبعادها $n \times 1$ (أو لوحة حجمها n)، مربعاتها مرقمة من 1 إلى n، ويوجد عدد غير محدود من نوعين من البلاط، النوع الأول مربع أبعاده 1×1 (بلاطة) والثاني مستطيل أبعاده 1×2 (يساوي بلاطتين)

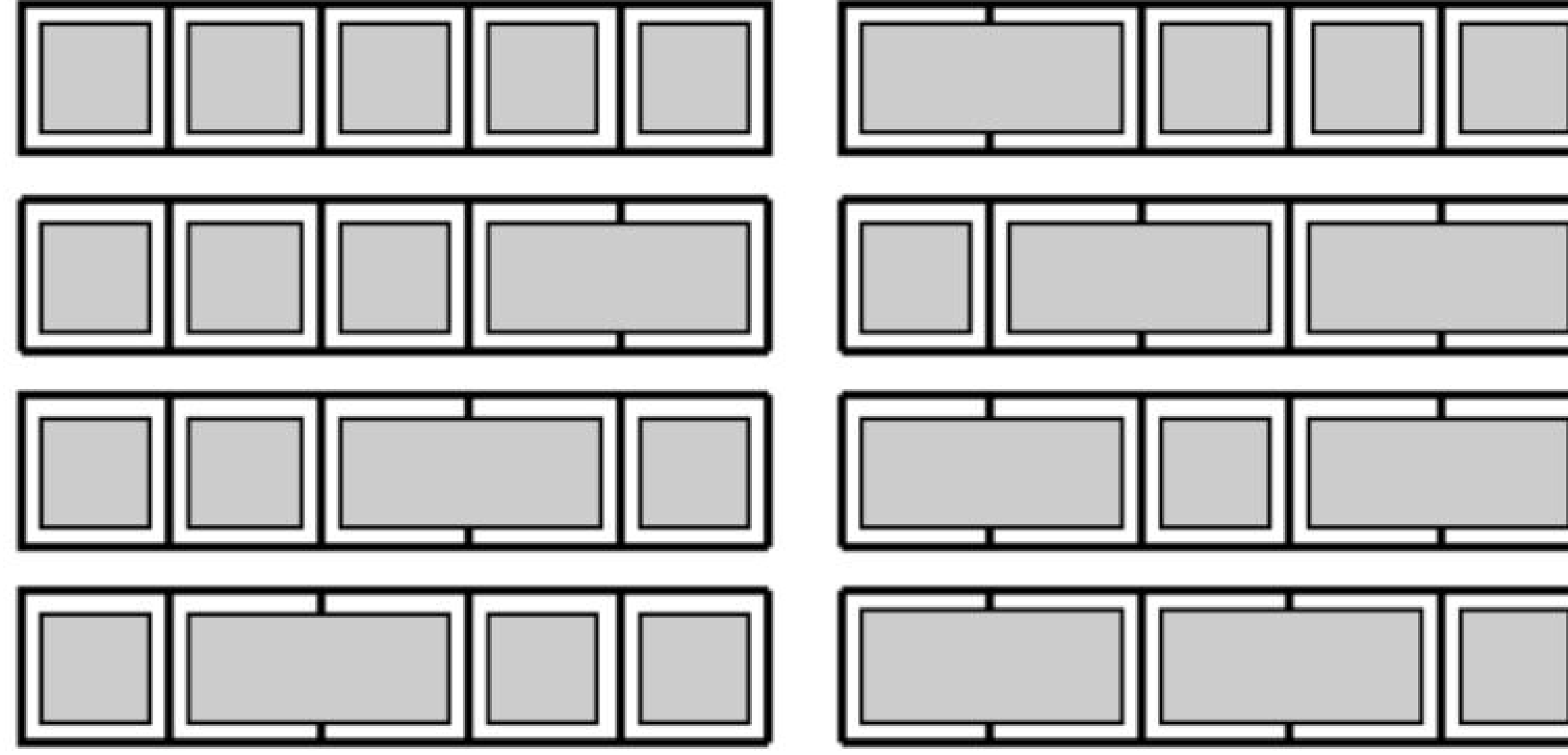


بكم طريقة يمكننا تبليط لوحة n باستخدام هذين النوعين من البلاط؟

على سبيل المثال، يوجد 5 طرق لتبليط اللوحة الرباعية:



يوجد 8 طرق لتبليط لوحة خماسية:



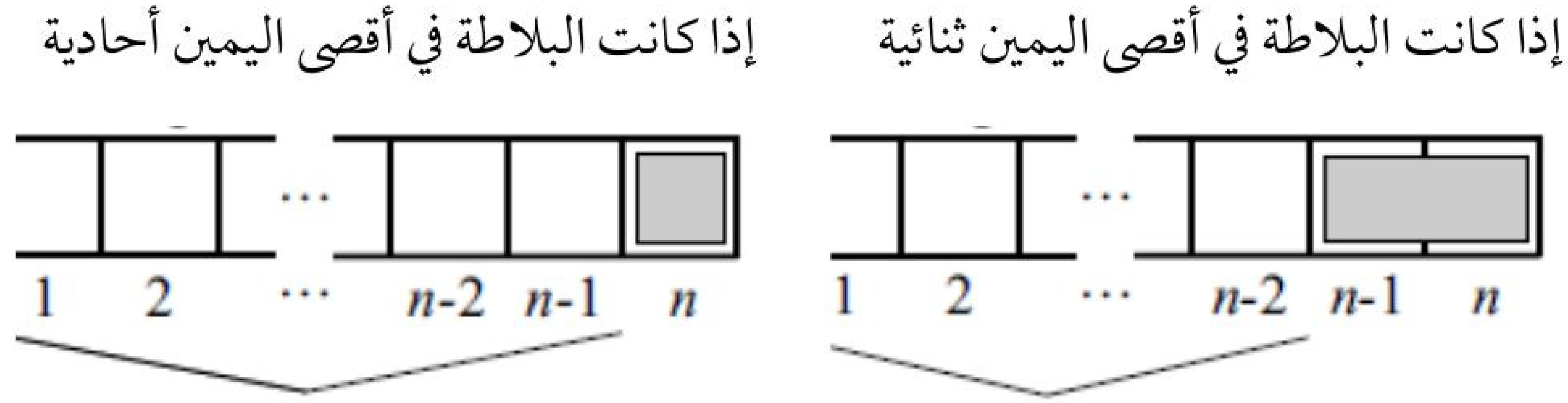
يوجد طريقة واحدة فقط لتبليط لوحة أحادية، ولنَقُل إنه يوجد طريقة واحدة لتبليط لوحة صفرية (باستخدام التبليط الفارغ). على الرغم من أننا نعتقد أن مربعات اللوحة مرقمة بترتيب متزايد من اليسار إلى اليمين، فإن صور التبليط لا تتضمن تلك الرموز إلا إذا كان ثمة حاجة لها للتوضيح.

السؤال 147: اكتب جميع طرق تبليط لوحة ثلاثية ولوحة سداسية.

يأتي عدّ أعداد فيبوناتشي في هذا التبليط طبيعياً. فلنستخدم t_n للرمز لعدد بلاطات اللوحة n. لا نعرف بعد أن كان $t_n = F_n$، إذن من الأفضل استخدام ترميز

مختلف[2]. نعلم مسبقاً أن $t_0 = t_1 = 1$. بالنسبة إلى اللوحة n بحيث $n \geq 2$، ينطبق الشرط على البلاطة في أقصى اليمين. أما إن كانت بلاطة أحادية، فإنه يوجد t_{n-1} طريقة لتبليط اللوحة $(n-1)$ من جهتها اليسرى. إذا كانت بلاطة ثنائية، فإنه يوجد t_{n-2} طريقة لتبليط اللوحة $(n-2)$ من جهتها اليسرى. فيما يلي توضيحات رسومية:

إذا كانت البلاطة في أقصى اليمين ثنائية   إذا كانت البلاطة في أقصى اليمين أحادية



.... يوجد t_{n-2} طريقة لتبليط بقية اللوحة.   .... يوجد t_{n-1} طريقة لتبليط بقية اللوحة.

ينطبق هنا مبدأ الجمع، حيث $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$.

بما أن التسلسل $\{t_n\}_{n\geq0}$ يحقق نفس شروط البدء وهو نفس تكرار تسلسل فيبوناتشي $\{F_n\}_{n\geq0}$، فإن هذين التسلسلين لابدّ أن يتساويا وهكذا يمكننا التوزيع باستخدام الترميز t_n.

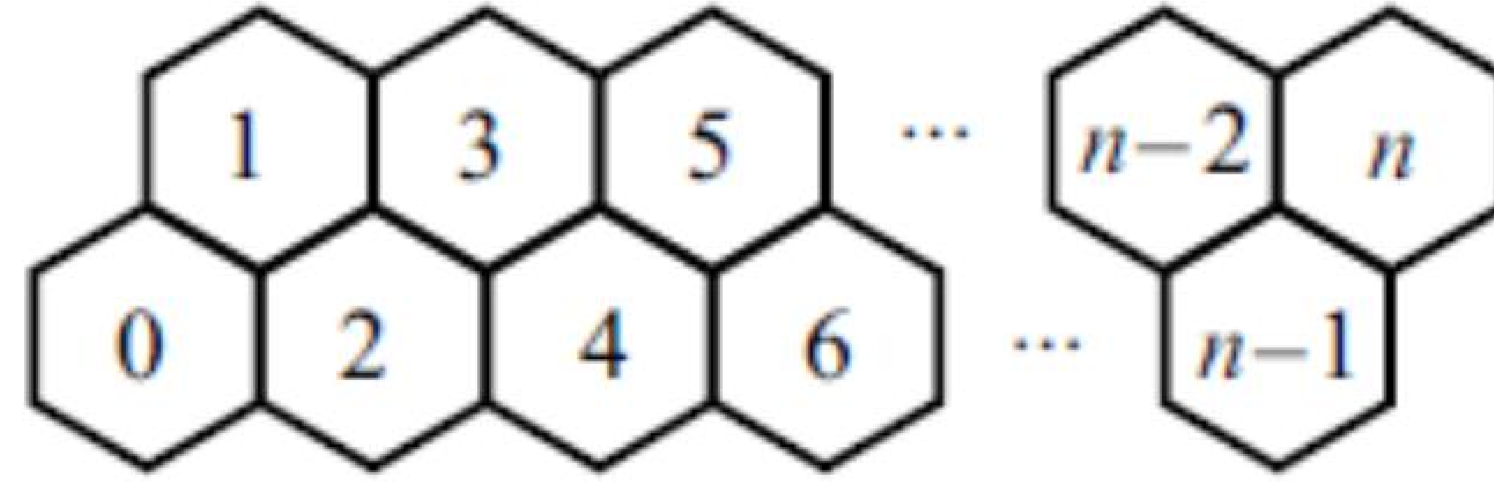
---

(2) هذه ليست مسألة تتعلق بالأسلوب، بل هي مسألة مهمة.

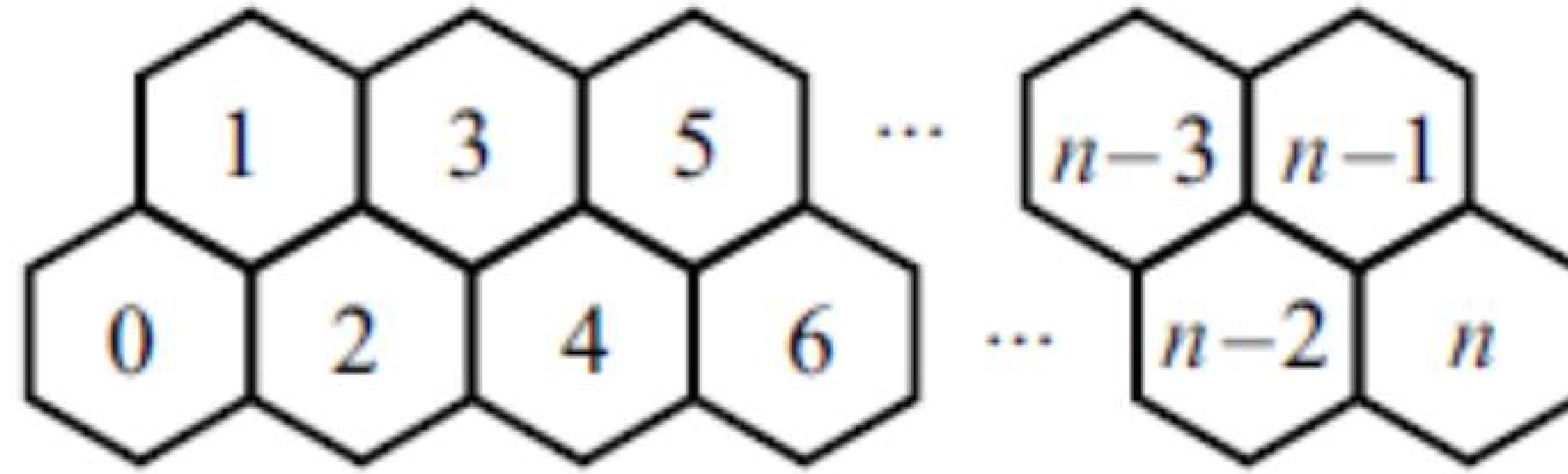
المبرهنة 4.2.1: لـ $n \geq 0$، فإن عدد فيبوناتشي F_n ذا الترتيب n يساوي عدد طرق تبليط لوحة شطرنج أبعادها $n \times 1$ باستخدام بلاطات 2×1 و 1×1.

السير في قرص العسل ذي الخلايا n

لنفترض أنك داخل قرص عسل يحتوي خلايا عددها n، تحديداً أنت موجود في الخلية المرقمة 0 كما هو مبين في الشكل.



وهدفك هو المشي والوصول للخلية المرقمة n، لكن يمكنك أن تتخذ واحدة من خطوتين: من الخلية k إلى الخلية $k + 1$، أو من الخلية k إلى الخلية $k + 2$. لتكن w_n عدد الطرق التي يمكنك المشي خلالها للوصول إلى الخلية n باستخدام الخطوات من هذا النوع. يفترض الشكل السابق لقرص العسل المكون من n خلية وأن n عدد فردي. إذا كانت n عدداً زوجياً، فستبدو الخلايا كما يلي:



في كلتا الحالتين، بما أنك تبدأ من الخلية 0 فإنه يوجد طريق واحدة للوصول: لا تفعل شيئاً. إذن، $w_0 = 1$. أيضاً، ثمة طريق واحدة للوصول من الخلية 0 إلى الخلية 1، إذا $w_1 = 1$.

السؤال 148: كم طريقة يوجد للوصول من الخلية 0 إلى الخلية 5؟ اكتبها كلها.

عندما تكون $n \geq 2$، يجب أن ينتهي أي مسار من الخلية 0 إلى الخلية n إما بحركة من الخلية $n - 1$ إلى الخلية n، أو حركة من الخلية $n - 2$ إلى الخلية n. في الحالة الأولى، يوجد $w_n = 1$ طريقة للمشي من 0 إلى n. في الحالة الثانية، يوجد $w_n = 2$ طريقة للمشي من 0 إلى $n - 2$. باستخدام مبدأ الجمع $w_n = w_{n-1} + w_{n-2}$.

مرة أخرى، الأعداد w_n تحقق نفس الشروط الأساسية والتكرار كما في أعداد فيبوناتشي، إذن لابدّ أن تكون متساوية.

المبرهنة 4.2.2: لكل $n \geq 0$، عدد فيبوناتشي ذي الترتيب n (F_n) يساوي عدد المسارات من 0 إلى n في قرص العسل المكون من n خلية، حيث كل حركة هي $k \to k + 1$ أو $k \to k + 2$.

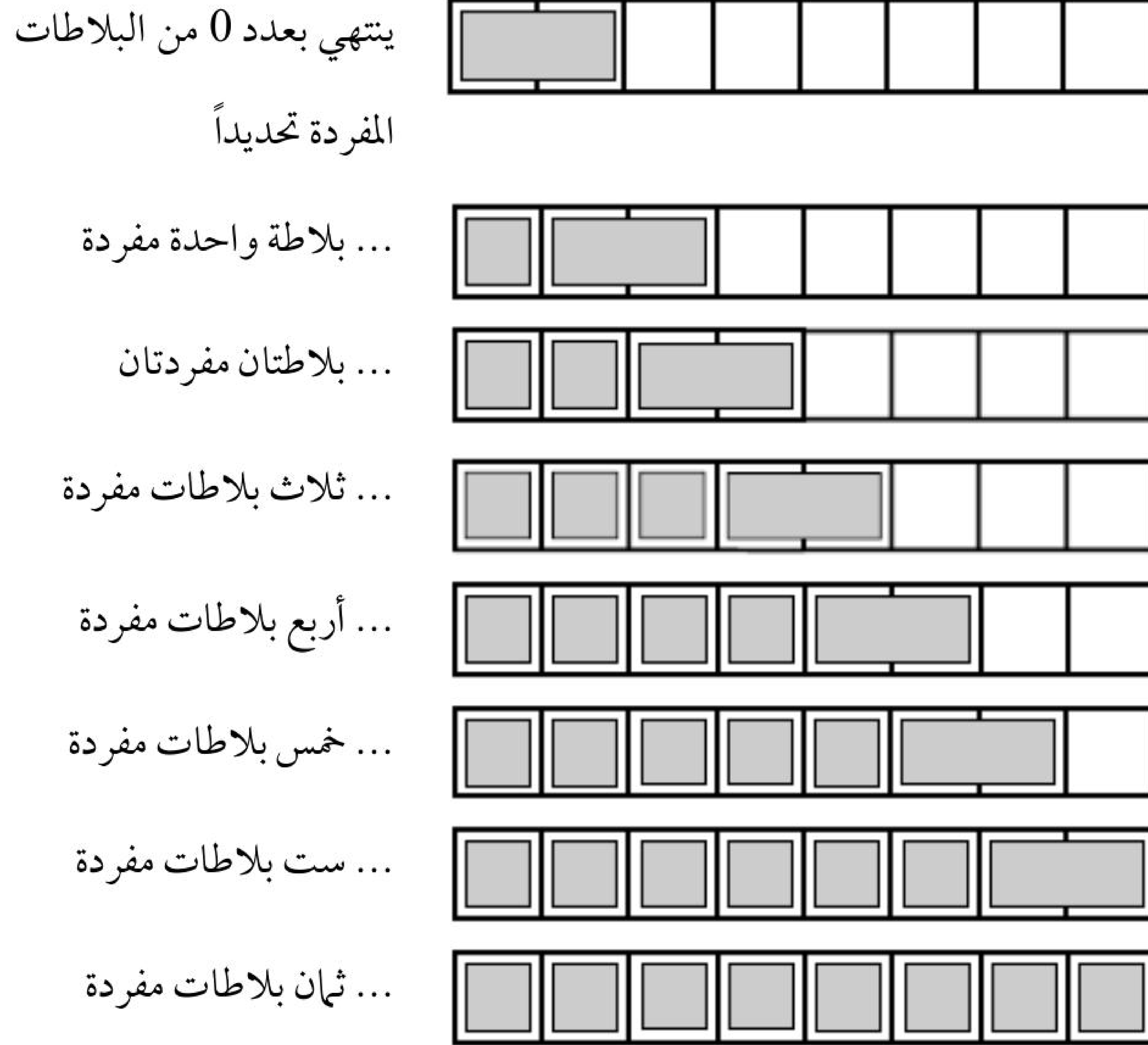
لندرس الآن بعض المتطابقات التي تنتج عن تفسيرين توافقيين (التبليط والمشي في قرص العسل) لأعداد فيبوناتشي.

وضع الشروط على عدد البلاطات الآحادية

إن أي تبليط للوحة عدد وحداتها n يجب أن ينتهي باستخدام عدد محدد من البلاطات المفردة، عدد بين 0 وn. يتيح لنا وضع شرط على هذا العدد اشتقاق المتطابقة الأساسية.

على سبيل المثال، إن أي تبيلط للوحة مكونة من 8 وحدات يجب أن يقع بين واحدة من ثمان فئات، وهي المبينة في الشكل 4.1. تتضمن الفئة الأولى جميع حالات التبليط التي تنتهي بلا أي بلاطة مفردة، الفئة الثانية تتضمن جميع حالات التبليط التي تنتهي ببلاطة مفردة واحدة على وجه التحديد، وهكذا. لاحظ أنه لا يوجد حالة تبليط يمكن أن تنتهي بسبع بلاطات مفردة، لذا فإن الفئة الأخيرة تتضمن حالة تبليط واحدة تنتهي بثمان بلاطات مفردة تحديداً – أي جميع البلاطات المفردة. يوجد F_6 طريقة لإكمال التبيلط في الفئة الأولى، وF_5 طريقة في الفئة الثانية، وهكذا دواليك. وهذا يثبت أن:

$$F_8 = 1 + F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_6$$



الشكل 4.1: تبليط لوحة من 8 وحدات

بالنسبة إلى الحالة العامة، أي عملية تبليط للوحة مكونة من n وحدة يجب أن تكون جميع البلاطات مفردة، أو أنها تنتهي بعدد محدد i من البلاطات المفردة، حيث $0 \leq i \leq n-2$. ثمة عملية تبليط واحدة في الحالة الأولى، بينما يوجد $\sum_{i=0}^{n-2} F_i$ في الحالة الثانية. الآن لدينا متطابقة فيبوناتشي الأولى.

المبرهنة 4.2.3: لأي $n \geq 2$ المتطابقة $F_n = 1 + \sum_{i=0}^{n-2} F_i$ تنطبق.

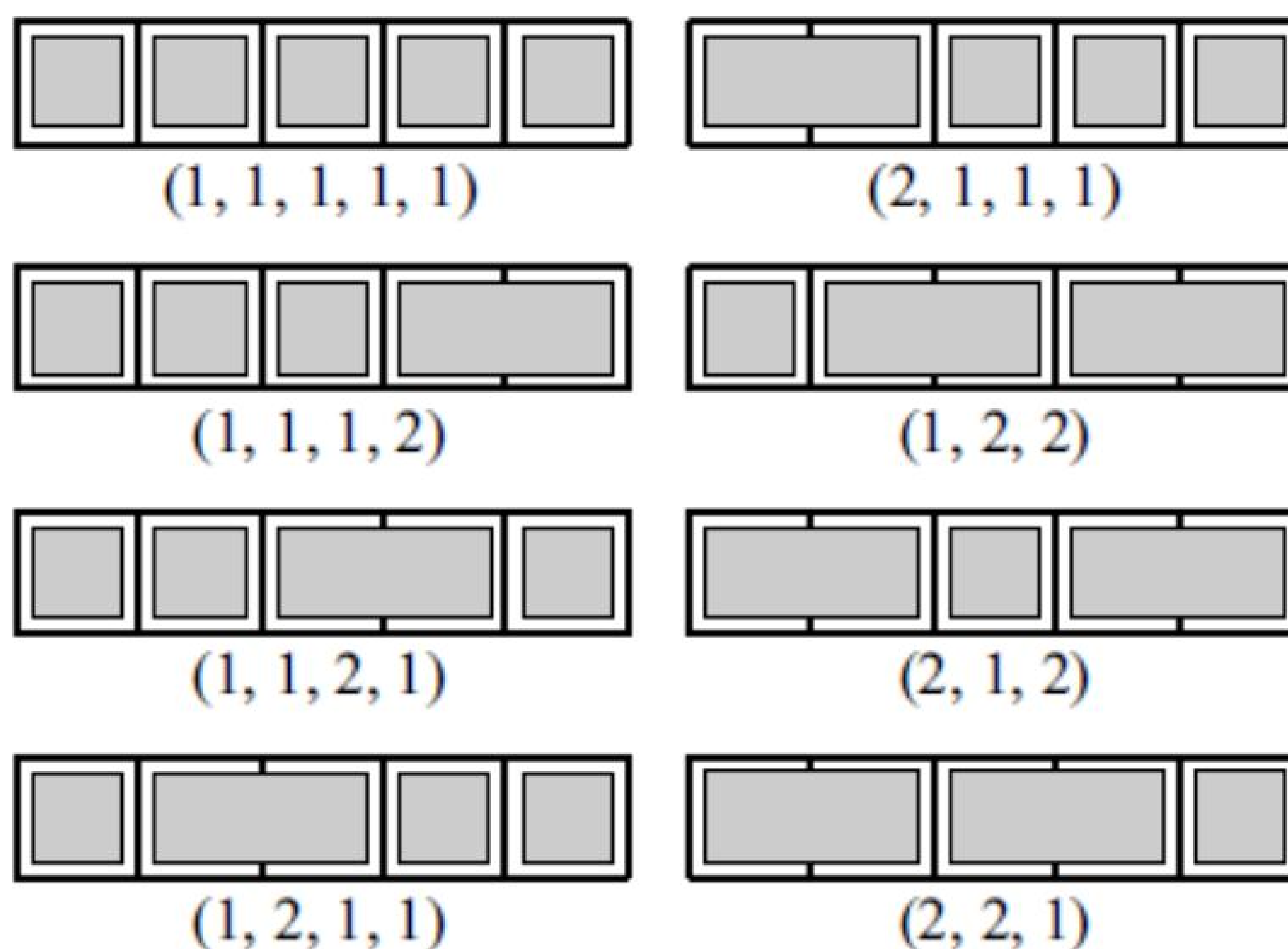
بدلاً من ذلك، يمكن كتابة المتطابقة على النحو $F_n - 1 = + \sum_{i=0}^{n-2} F_i$ وبرهنتها توافقياً بطرح السؤال التالي: كم طريقة يوجد تبليط لوحة مكونة من n وحدة باستخدام بلاطة ثنائية واحدة على الأقل؟ التمرين 2 يطلب منك برهان المتطابقة الشقيقة بوضع شرط على عدد البلاطات الثنائية في نهاية عملية التبليط.

رابط بمعاملات ذات الحدين

تعطينا قائمة مأخوذة من [2] طريقة مختصرة لتمثيل تبليط لوحة مكونة من n وحدة. على سبيل المثال، يوضّح الشكل 4.2 تمثيلات عملية تبليط لوحة ذات خمس وحدات بثمان بلاطات. وهذا ينتج ارتباط واحد- لواحد طبيعي بين عمليات تبليط اللوحة الخماسية باستخدام بلاطات أحادية وبلاطات ثنائية، علماً بأن القوائم (بأي طول) مأخوذة من [2]، حيث إن مجموع عناصرها يساوي 5.

بشكلٍ عام، يوجد ارتباط واحد- لواحد بين عمليات تبليط لوحة مكونة من من n وحدة باستخدام بلاطات أحادية وبلاطات ثنائية، علماً بأن القوائم مأخوذة من [2]، حيث إن مجموع عناصرها يساوي n. لبرهنة هذا، ضع شرطاً على عدد البلاطات الثنائية المستخدمة في التبليط. وهذا الرقم، ولنسمه i يتراوح بين 0 و$\lfloor n/2 \rfloor$.

السؤال 149: لماذا نحتاج إلى التقريب للأسفل؟



الشكل 4.2: التبليط كقوائم مأخوذة من [2].

إذا تضمّن التبليط عدد i من البلاطات الثنائية، فإن هذه البلاطات ستحتل $2i$ من مربعات اللوحة المكون من n وحدة. أما المربعات المتبقية $n-2i$ يجب أن تغطّى ببلاطات أحادية، فيصبح عدد البلاط الإجمالي $i+(n-2i)=n-i$. وهذا يعني أنه يمكن تمثيل التبليط كقائمة مكونة من $(n-i)$ مأخوذة من [2]، حيث إن عدد الثنائيات في القائمة يساوي i. عدد هذه القوائم $\binom{n-i}{i}$. بجمع القيم الممكنة لـ i، ننهي برهان المتطابقة التالية.

المبرهنة 4.2.4: لأي $n \geq 0$ المتطابقة $F_n=\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n-i}{i}$ تنطبق.

لعله أكثر رونقاً أن نكتب المتطابقة كما يلي:

$$F_n=\sum_{i\geq 0}\binom{n-i}{i}$$

لأن $\binom{n-i}{i} = 0$ لـ $i > \lfloor n/2 \rfloor$. مثال:

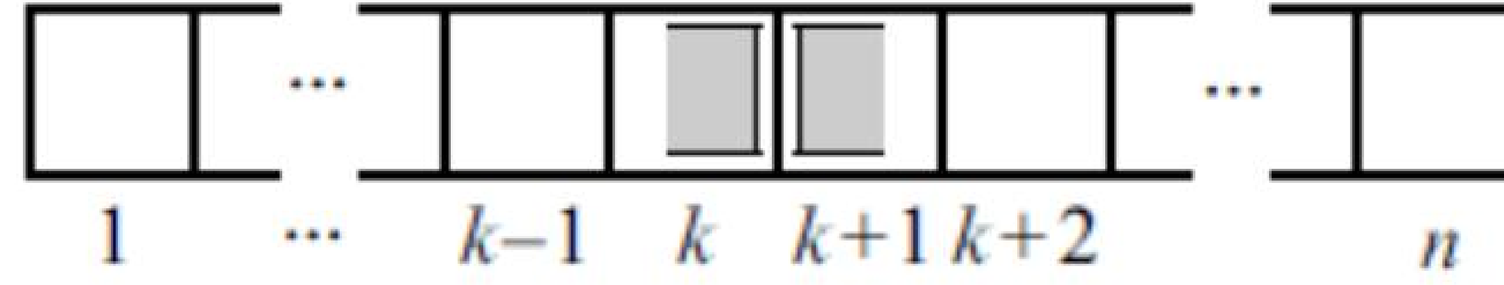
$$\sum_{i\geq 0}\binom{5-i}{i} = \binom{5}{0}+\binom{4}{1}+\binom{3}{2}+\binom{2}{3}+\binom{1}{4}+\cdots$$
$$= 1+4+3+0+0+\cdots$$
$$= 8$$

وعليه حقاً تكون $F_5 = 8$.

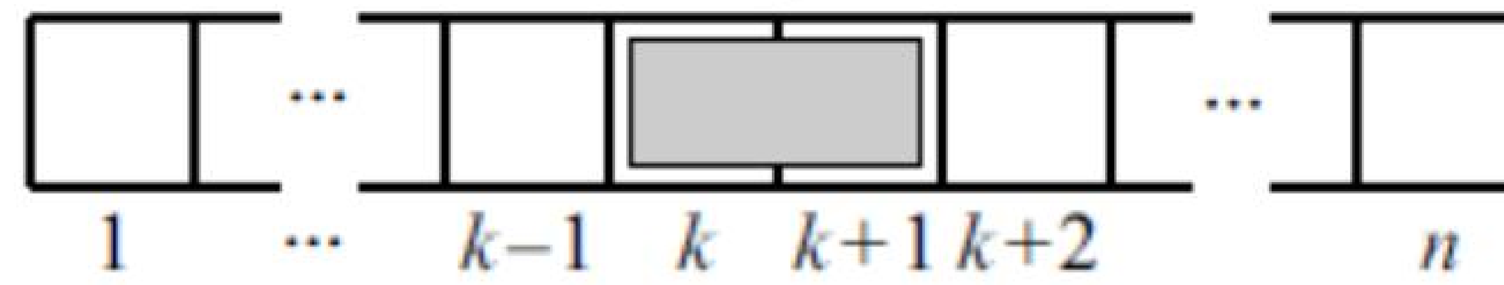
كسر التبليط

لتكن $n \geq 2$، ولنفترض أن أي عملية تبليط للوحة مكونة من n وحدة. ضع في الاعتبار ما يحدث بين المربعين $k + 1$ و k، حيث $n \leq \mathrm{k} \leq 1$. إما أن بلاطة ثنائية واحدة تغطي المربعين أو أنها لا تغطيهما. طالع الشكل 4.3 للتوضيح.

بلاطة ثنائية لا تغطي المربعين $k + 1$ و k



بلاطة ثنائية تغطي المربعين $k + 1$و k



الشكل 4.3: كسر التبليط عند المربع k .

إذا كانت بلاطة ثنائية واحدة لا تغطي المربعين $k + 1$ و k، فإنه يمكننا كسر التبليط عند تلك النقطة وعدّ البلاطات التي تليها. يوجد F_k طريقة لتبليط لوحة مكونة من k وحدة واقعة إلى يسار الكسر، ولكل طريقة من الطرق، يوجد F_{n-k}

طريقة لتبليط لوحة مكونة من $(n-k)$ وحدة إلى اليمين. مبدأ الضرب يعطينا إجمالي عدد F_kF_{n-k} في هذه الحالة.

إذا كانت بلاطة ثنائية واحدة تغطي المربعين $k+1$ وk، فإننا يمكن كسر التبليط قبل المربع k وبعد المربع $k+1$. يوجد F_{k-1} حالة تبليط في الطرف الأيسر للوحة المتبقية ولكل حالة يوجد F_{n-k-1} حالة تبليط في الجهة اليمنى. مرة أخرى، فإن مبدأ الضرب يعطينا إجمالي حالات التبليط في هذه الحالة ويساوي $F_{k-1}F_{n-k-1}$.

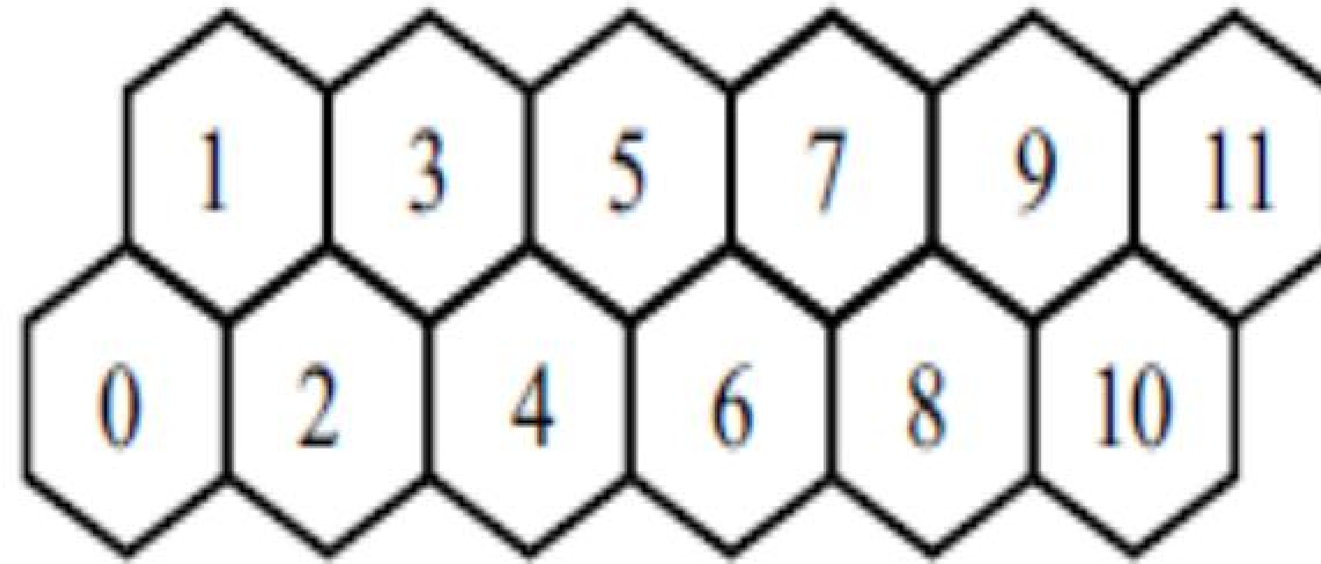
اجمع نتائج الحالتين لتحصل على النظرية التالية:

المبرهنة 4.2.5: لكل kو n تحققان $n \geq 2$ و$1 \leq k < n$، فإن المتطابقة التالية تنطبق

$$F_n = F_kF_{n-k} + F_{k-1}F_{n-k-1}$$

التكافؤ وقرص العسل

انظر المسارات من 0 إلى 11 في قرص عسل مكون من 11 خلية:



إحدى الخلايا المرقمة 0، 2، 4، 6، 8، 10 يجب أن تكون آخر خلية ذات رقم زوجي في المسار. رتّب المسارات المحتملة كافة في كومات مفكوكة بحسب آخر خلية ذات رقم زوجي تصلها.

لنقل إن الخلية 6 هي آخر خلية في المسار. يوجد F_6 طريقة للوصول إلى 6، لكن بعد ذلك يتبقى طريقة واحد لإكمال المسار إلى الخلية 11: فيكون المسار خلال 6 ← 7 ← 9 ← 11 لأن مثل هذا المسار يجب أن لا يمر من خلال المزيد من الخلايا ذات الأرقام الزوجية. ومثل ذلك، إذا كانت 8 هي آخر خلية ذات رقم زوجي في المسار، فإنه يوجد F_8 طريقة للوصول إلى 8، لكن بعد ذلك يتبقى طريقة واحدة لإكمال المسار إلى 11 وهي: 8 ← 9 ← 11.

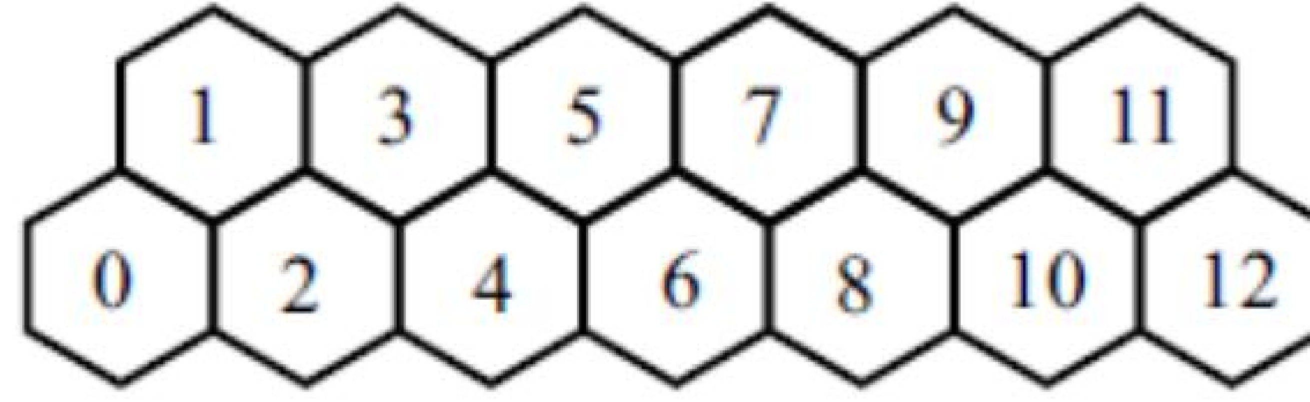
إذن، إذا كانت j آخر خلية ذات رقم زوجي يمر بها المسار $(j = 0, 2, 4, 6, 8)$ فإنه يوجد F_j مساراً ممكناً. وبما أن هذه الحالات مفككة وشاملة وينطبق عليها مبدأ الجمع، فإن:

$$F_{11} = F_0 + F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + F_{10}$$

وهذا يعطي برهاناً للمبرهنة التالية.

المبرهنة 4.2.6: لكل $n \geq 0$، تنطبق المتطابقة $F_{2n+1} = \sum_{i=0}^{n} F_{2i}$.

يجب أن لا نستمر قبل محاولة التبديل بين "الزوجي" و"الفردي". انظر الآن إلى قرص العسل المكون من 12 خلية:



بأخذ الحالات التي تعتمد على آخر خلية ذات عدد مفرد في المسار، فلربما تعتقد أن المتطابقة التناظرية هي:

$$F_{12} = F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + F_9 + F_{11}$$

لكن هذا ليس صحيحاً تماماً.

السؤال 150: لِمَ لا؟ ما هو التعديل الذي يجب إجراؤه ولماذا؟

لابدّ أن يكون لديك فكرة الآن عن كيفية برهنة المبرهنة التالية.

المبرهنة 4.2.7: لكل $n \geq 1$، تنطبق المتطابقة $F_{2n} = 1 + \sum_{i=0}^{n} F_{2i-1}$.

براهين جبرية

افترض أنك تشكّ في كون متطابقة معينة عن أعداد فيبوناتشي صحيحة، لكنك لا تجد برهاناً توافقياً؟ يمكن تجريب برهان جبري، لنقل بالاستقراء. فيما يلي مثالين:

متطابقة فيبوناتشي

على الرغم من أن البرهان التوافقي ممكن للمبرهنة التالية، إلا أننا نعطي برهاناً بالاستقراء القوي بهدف التنويع.

المبرهنة 4.2.8: لكل $n \geq 2$، تنطبق المتطابقة $2F_n = F_{n+1} + F_{n-2}$.

البرهان: برهان بالاستقراء القوي n. عندما $n = 2$ و$2F_2 = 2(2) =$ $4 = F_3 + F_0 = 3 + 1 = 4$ و 4. عندما تكون $n = 3$ و$F_4 +$ و $2F_3 = 2(3) = 6$ $6 = F_1 = 5 + 1 = 6$. هذه المعادلة صحيحة في الحالتين عندما $n = 3$ و $n = 2$.

الآن، لتكن $k \geq 3$، ولنفترض أن المتطابقة صحيحة عندما $n = j$ لكل الأعداد الصحيحة j التي تحقق المتباينة $2 \leq j \leq k$. تحديداً، هذا يعني أن:

$$2F_k = F_{k+1} + F_{k-2}$$
$$2F_{k-1} = F_k + F_{k-3}$$

يجب أن نبيّن أن المعادلة صحيحة لقيم $n = k + 1$، تحديداً $2F_{k+1} = F_{k+2} + F_{k-1}$. بدءاً بـ $2F_{k+1}$، استخدم تكرار فيبوناتشي لكتابة المعادلة:

$$2F_{k+1} = 2(F_k + F_{k-1}) = 2F_k + 2F_{k-1}$$

الآن، طبّق فرضية الاستقراء على كل حدّ ثم طبّق تكرار فيبوناتشي لبيان أن:

$$\begin{aligned} 2F_k + 2F_{k-1} &= (F_{k+1} + F_{k-2}) + (F_k + F_{k-1}) \\ &= (F_{k+1} + F_k) + (F_{k-2} + F_{k-3}) \\ &= F_{k+2} + F_{k-1} \end{aligned}$$

وعليه فإن المعادلة صحيحية لكل قيم $n \geq 2$.

■

السؤال 151: ماذا يلزم للتحقق من حالتين أساسيتين، وهما $n =$ و $n = 2$ 3؟ لماذا لا تكفي حالة أساسية واحدة؟

الرابط بين أعداد فيبوناتشي وأعداد لوكاس

تتبع أعداد فيبوناتشي وأعداد لوكاس نفس التكرار، إذن قد يعتقد المرء بوجود علاقة وثيقة بين الاثنين. وهذه المبرهنة تثبت ذلك.

المبرهنة 4.2.9: لجميع $n \geq 2$، $L_n = F_{n-2} + F_n$.

البرهان: نستخدم البرهان بالاستقراء القوي على n. عندما $n = 2$، تكون المعادلة $L_2 = F_0 + F_2$. وبما أن $F_0 + F_2 = 1 + 2 = 3$ و $L_1 = 3$، فالأمر صحيح لـ $n = 2$. عندما تكون $n = 3$، تكون المعادلة $L_3 = F_1 + F_3$. وهذا صحيح أيضاً لأن $F_1 + F_3 = 1 + 3 = 4$ و $L_3 = 4$.

الآن افترض أن k عدد صحيح، و$k \geq 3$، وأن المعادلة صحيحة لـ $n = j$، حيث $2 \leq j \leq k$. تحديداً، هذا يعني أن:

$$L_k = F_{k-2} + F_k$$
$$L_{k-1} = F_{k-3} + F_{k-1}$$

يجب أن نبيّن أن المعادلة صحيحة لـ $n = k + 1$، تحديداً $L_{k+1} = F_{k-1} + F_{k+1}$. إن البدء بـ L_{k+1} ثم تطبيق تكرار لوكاس وفرضية الاستقراء وتكرار فيبوناتشي، يتبيّن أن:

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= L_k + L_{k-1} \\ &= (F_{k-2} + F_k) + (F_{k-3} + F_{k-1}) \\ &= (F_{k-2} + F_{k-3}) + (F_k + F_{k-1}) \\ &= F_{k-1} + F_{k+1} \end{aligned}$$

وعليه فإن المعادلة صحيحية لكل قيم $n \geq 2$.

■

يتطلب التمرين 11 استخدام برهان توافقي.

الصيغ

لأعداد فيبوناتشي

هل من الممكن "القفز" مباشرة لعدد فيبوناتشي ذي الترتيب n من دون حساب جميع الأعداد السابقة وذلك باستخدام العلاقة التكرارية، أو من دون حساب مجموع المعاملات ثنائية الحدين باستخدام المبرهنة 4.2.4؟ تشير المبرهنة 3.6.2 إلى أن الإجابة هي "نعم". لتطبيق المبرهنة نحدد القيم $\propto = \beta = a_0 = a_1 = 1$.

السؤال 152: بحسب المبرهنة، ما هي دالة المولد الاعتيادية للتسلسل $\{F_n\}_{n\geq 0}$؟

لإيجاد صيغة F_n، علينا إيجاد r_2 و r_1، حيث:

$$1 - x - x^2 = (1 - r_1x)(1 - r_2x)$$

بما أن $(1 - r_1x)(1 - r_2x) = 1 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2x$، فلابدّ أنها الحالة التي يكون فيها $r_1 + r_2 = 1$ و $r_1r_2 = -1$. حلّ هاتين المعادلتين بمجهولين هو:

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \qquad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

السؤال 153: ماذا ستكون قيم r_1 و r_2 إذا كانت المعادلة التربيعية $1 - 2x - 3x^2$ بدلاً من $1 - x - x^2$؟

لدينا حالة ذات جذور متميزة ($r_1 \neq r_2$)، إذن يلزم حساب B و A كما في المبرهنة. ويجب أن تحصل على:

$$A = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \qquad B = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

وهذا يعني أن

$$\begin{aligned} F_n &= Ar_1^n + Br_2^n \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{aligned}$$

بإجراء بعض التعديلات الجبرية (إخراج العامل $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ومن ثم خذ ما تبقى إلى قوى r_2 وr_1) نحصل على صيغة المبرهنة التالية:

المبرهنة 4.2.10: (**أعداد فيبوناتشي**): دالة المولّد الاعتيادية لأعداد فيبوناتشي $\{F_n\}_{n\geq 0}$ المعرّفة بـ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ و$F_0 = F_1 = 1$ لـ $n \geq 2$ يساوي $\frac{1}{(1-x-x^2)}$. ومن هنا فإن:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

لجميع قيم $n \geq 0$.

هذه الصيغة جميلة ومعجزة، ربما لأنها تصف تسلسل عدد صحيح باستخدام مجموع قوى أعداد غير منطقية؟

من وجهة نظر التوافيق، ليس بالضرورة حساب الحد الثاني في الصيغة. وهذا لأنه دائماً أقل من $\frac{1}{2}$ بالقيمة المطلقة.

السؤال 154: وضح لماذا $\frac{1}{2} > \left|\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right|$ لجميع قيم $n \geq 0$.

كما أن F_n دائماً هي أقرب رقم صحيح لأول حدّ في المعادلة.

بديهية 4.2.11: عدد فيبوناتشي ذو الترتيب n هو أقرب عدد صحيح لـ $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

لأعداد لوكاس:

للحصول على صيغة لأعداد لوكاس (Lucas Numbers)، نتبع نفس الطريقة لكن نستخدم $L_0 = 2$ بدلاً من $F_0 = 1$.

المبرهنة 4.2.12 (أعداد لوكاس): دالة المولّد الاعتيادية لأعداد لوكاس $\{L_n\}_{n\geq 0}$ المعرّفة بـ $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ و $L_0 = 2$ و $L_0 = 2$ لـ $n \geq 2$ يساوي $(2-x)/(1-x-x^2)$. من هذا فإن:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

لكل قيم $n \geq 0$.

السؤال 155: برهن المبرهنة

السؤال 156: حدّد ما إذا كنا سنحصل على نفس نتيجة البديهية 4.2.11 باستخدام أعداد لوكاس.

ملخص

تناول هذا القسم العديد من النتائج المعروفة جيداً المتعلقة بأعداد فيبوناتشي وأعداد لوكاس. ثمة العديد من التفسيرات التوافقية لكلٍ من عائلات الأعداد. إن المنفعة من وجود العديد من التفسيرات المختلفة هي أنها تُنتِج متطابقات مختلفة. لاستكمال الطرق التوافقية، وفّرت وسائل الاستقراء الجبرية والدوال المولّدة متطابقات أخرى وبعض الصيغ المغلقة لكلٍ من أعداد فيبوناتشي ولوكاس.

تمارين

1. عبّر عن إجابة كل سؤال مما يلي في سياق أعداد فيبوناتشي.

أ) كم عدد المجموعات الجزئية من $[n]$ التي لا تحتوي على أعداد صحيحة متتابعة؟

ب) كم عدد الأعداد الثنائية المكونة من n خانة والتي لا تحتوي على أصفار متجاورة؟

ت) كم طريقة يوجد لتسلق سلّم طائرة مكون من n درجة، حيث يمكنك الانتقال من الدرجة i إلى الدرجة $i+1$ أو إلى الدرجة $i+2$.

(توجيه: اشتق تكراراً لكل حالة).

2. اشتق متطابقة شبيهة بتلك الواردة في المبرهنة 4.2.3 بوضع شرط على عدد البلاطات الثنائية في نهاية التبليط، ثم برهنها.

3. افترض أنك ارتكبت خطأً يدوياً في حساب سلسلة فيبوناتشي باستخدام التكرار. إذ حسبتَ الأعداد $F_0, F_1, \ldots, F_{m-1}$ بشكلٍ صحيح، لكن قيمة F_m التي حسبتَها تساوي فعلياً $F_m + 1$. لنفترض أن هذا هو الخطأ الوحيد، كم يبعد كلّ عدد لاحق قمت بحسابه عن الدقة؟ تحديداً، لأي $k > 0$، ما مدى كبر الخطأ بين قيم F_{m+k} التي حسبتها وبين القيمة الصحيحة لـ F_{m+k}؟

4. برهن أن: $\gcd(F_n, F_{n-1}) = 1$ لجميع قيم $n \geq 1$. بمعنى آخر، أعداد فيبوناتشي المتجاورة تكون أعداداً أوليّة نسبياً.

5. برهن المبرهنة 4.2.4 باستخدام الاستقراء القوي.

6. برهن ما يلي باستخدام الاستقراء القوي.

أ) $3F_n = F_{n+2} + F_{n-2}$ لـ $n \geq 2$

ب) $4F_n = F_{n+2} + F_n + F_{n-2}$ لـ $n \geq 2$

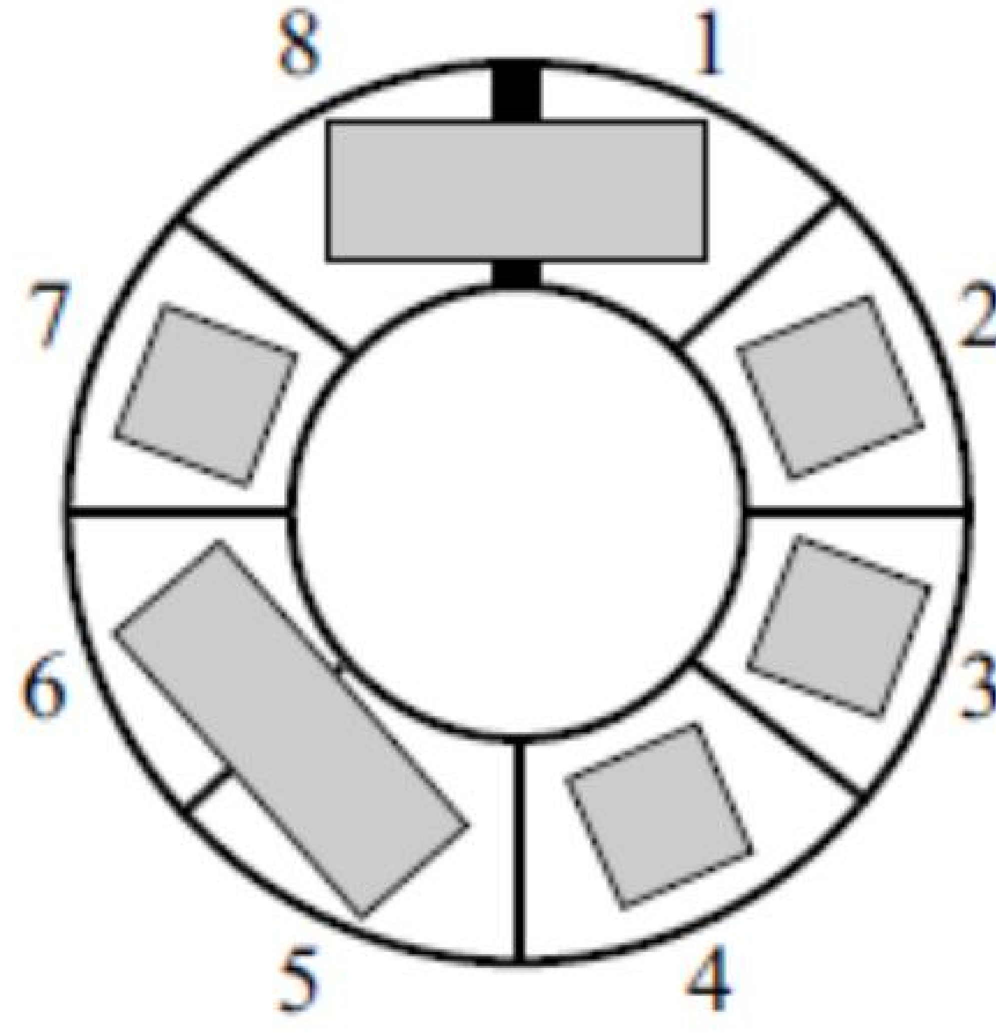
7. برهن بالاستقراء القوي: لأي $n \geq 0$ فإن $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$

8. برهن: لـ $n \geq 1$، فإن $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n$

9. إذا أعطيت العددين الصحيحين غير السلبيين G_1 و G_0، فإن أعداد فيبوناتشي المعمّمة تعرّف بالتكرار $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$ لـ $n \geq 2$. ضع مبرهنة

وبرهنها، بحيث تكون مناظرة للمبرهنتين 4.2.10 و4.2.12، لأعداد فيبوناتشي المعممة.

10. تعدّ أعداد لوكاس تبليط لوحة دائرية مكونة من n وحدة وذلك باستخدام بلاطات أحادية وأخرى ثنائية. يبيّن الشكل التالية عملية تبليط اللوحة الدائرية ثمانية الوحدات.



القفل في الأعلى هو الخط الفاصل بين المربعين 8 و1. بشكلٍ عام، إذا غطّت بلاطة ثنائية كلا المربعين n و1، فإننا نعتبر أن التبليط يرتبط بحلقة مغلقة. وبخلاف ذلك، فإن التبليط يرتبط بحلقة مفتوحة[3]. التبليط في الشكل مغلق.

أ) اكتب كل حالات التبليط في حال وجود لوحة دائرية ذات 3 وحدات، 4 وحدات، 5 وحدات. أي حالات التبليط مفتوحة وأيها مغلقة؟

[3] يستخدم بعض المؤلفين "في الطور" لتعني "مفتوح" و"خارج الطور" لتعني "مغلق".

ب) لتكن β_n تساوي عدد حالات التبليط للوحة دائرية مكونة من n وحدة. برهن أن $\beta_n = L_n$ لكل قيم $n \geq 0$. كيف تعرّف الشروط الأولية وكيف تكون منطقية من الناحية التوافقية؟

ت) اشرح لماذا $L_n \geq F_n$ لكل قيم $n \geq 0$

11. أعطِ برهاناً توافقياً (تبليط) للنظرية 4.2.9.

12. خمن وأثبت الصيغ لكل من المجاميع التالية لأعداد فيبوناتشي وبرهنها.

أ) $\sum_{i=0}^{n} F_{3i}$

ب) $\sum_{i=0}^{n} F_{4i}$

ملاحظات سريعة

يُعرّف بعض المؤلفين أعداد فيبوناتشي كـ $f_0 = 0$ و $f_1 = 1$ و $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ لـ $n \geq 2$. يجب أن تدرك التعريف المعتمد قبل القراءة.

ثمة العديد من المسائل التوافقية التي يتطلب حلها استخدام أعداد فيبوناتشي (طالع التمرين 1 للاطلاع على بعض هذه المسائل)، إذن يوجد طرق عديدة لتفسير هذه الأرقام. ظهرت أعداد فيبوناتشي ولوكاس في تفسير مسائل التبليط أولاً في

بريغهام (Brigham)، وكارون (Caron)، وتشين (Chinn)، وغريمالدي (Grimaldi) (1996). يعرض هذا الكتاب من تأليف بنجامين وكوين (2003) (Benjamin & Quinn 2003) مجموعة ممتازة ومكثفة من البراهين التوافقية لمتطابقات فيبوناتشي ولوكاس باستخدام تفسيرات التبليط. تفسير قرص العسل يعود لدانرون هوانغ وكيونغ هـ. سون (Danrun Huang & Kyung H. Sun) من جامعة ولاية كلاود (Cloud State University) لكنها لم تنشر حتى الآن.

3.4 أعداد ستيرلينغ

في هذا القسم سنحدد الدوال المولّدة لأعداد ستيرلينغ وبيل ومن ثم نشتق صيغة لأعداد بيل. أيضاً، سنقدم أعداد ستيرلينغ من النوع الأول ومن ثم نعرض تفسيراتها الجبرية والتوافقية.

من خلال عملنا في القسمين 2.3 و3.1، عرفنا مسبقاً الحقائق التالية عن أعداد ستيرلينغ من النوع الثاني، إضافة لأعداد بيل.

• يعدّ عدد ستيرلينغ من النوع الثاني $S(n,k)$ تقسيمات المجموعة المكونة من n عنصر إلى k جزء. بصورة مكافئة، فهو يعدّ توزيعات أشياء مختلفة عددها n على مستقبلات متطابقة عددها k بحيث يتلقى كل مستقبِل شيئاً واحداً على الأقل. الأعداد $S(n,k)$ تحقق التكرار التالي:

$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k.S(n-1,k)$ لـ $n > 0$ و $k > 0$

حيث $S\ (0,0) := 1$ و $S(n,0) := S(0,k) = 0$ لـ $n > 0$ و $k > 0$.

اشتققنا هذا بوضع شرط على ما إذا كان العنصر n موجود في جزء بنفسه. (ورد هذا في النظرية 2.3.1).

• استخدمنا الاحتواء - الاستثناء لإيجاد معادلة لـ $S(n,k)$. للعناصر $n \geq 0$ و $k \geq 0$،

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i(k-i)^n$$

• يعدّ عدد بيل $B(n)$ إجمالي عدد التجزئات من المجموعة المكونة من n عنصر. وهكذا فإن $B(0) := 1$ و $B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$. الأعداد $B(n)$ تحقق التكرار التالي:

$$B(n) = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}B(j) \qquad \text{لـ } n > 0$$

الدوال المولّدة

أعداد ستيرلينغ من النوع الثاني

إن الأولوية في العمل هي تحديد الدوال المولّدة لأعداد ستيرلينغ وبيل. بالنسبة إلى أعداد ستيرلينغ التي تعتمد على موسطين k و n، سنثبّت k ونحسب الدالة المولّدة الاعتيادية للتسلسل $\{S(n,k)\}_{n\geq 0}$.

إذن، ثبت أي عدد $k \geq 0$، ثم عرّف الدالة:

$$f_k(x) := \sum_{n \geq 0} S(n,k)x^n$$

لتكون الدالة المولّدة الاعتيادية الذي تريده. حالة $k = 0$ سهلة وتوفّر أساساً

لحالة $k > 0$.

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sum_{n \geq 0} S(n,0)x^n \\ &= S(0,0) + S(1,0)x + S(2,0)x^2 + \cdots \\ &= S(0,0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

عندما $k > 0$، نبدأ بالتكرار المعطى في بداية هذا القسم. اضرب بالمقدار x^n

ثم اجمع $n \geq 1$ للحصول على:

(4.7)

$$\begin{aligned} &\sum_{n \geq 1} S(n,k)x^n \\ &\quad = \sum_{n \geq 1} S(n-1,k-1)x^n + \sum_{n \geq 1} k.S(n-1,k)x^n \end{aligned}$$

لنحلل كل حد. إن الحد الأيسر يساوي $f_k(x)$ لأن $S(0,k) = 0$ لقيم

$k > 0$:

$$\sum_{n \geq 1} S(n,k)x^n = S(1,k)x + S(2,k)x^2 + S(3,k)x^3 + \cdots$$

$$= S(0,k) + S(1,k)x + S(2,k)x^2 + S(3,k)x^3 + \cdots$$

$$= f_k(x)$$

الحد الأوسط يساوي $xf_{k-1}(x)$:

$$\sum_{n\geq 1} S(n-1, k-1)x^n = x\sum_{n\geq 1} S(n-1, k-1)x^{n-1} = xf_{k-1}(x)$$

والحد الأخير يساوي $kxf_k(x)$:

$$\sum_{n\geq 1} k.S(n-1, k)x^n = kx\sum_{n\geq 1} S(n-1, k)x^{n-1} = kxf_k(x)$$

وهذا يبيّن أن المعادلة (4.7) يمكن كتابتها بالصورة:

$$f_k(x) = xf_{k-1}(x) + kxf_k(x) \qquad \text{لـ } k > 0$$

ثمة مشكلة هنا لم نواجهها من قبل، إذ يظهر لدينا دالتين مولدتين بسيطتين مجمولين، تحديداً $f_k(x)$ و$f_{k-1}(x)$.

إحدى طرق إصلاح الأمر تتضمن حل الدالة $f_k(x)$ وملاحظة أنه يعطي تكراراً:

(4.8)

$$f_k(x) = \frac{x}{1-kx}f_{k-1}(x) \qquad \text{لـ } k > 0$$

وهذا يعطينا فكرة عن كيفية تحديد الدالة المولدة البسيطة $f_k(x)$ لـ $k > 0$، بالمضاعفة المتكررة. نعلم مسبقاً أن $f_0(x) = 1$. إذن

$$f_1(x) = \frac{x}{1-x}f_0(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$f_2(x) = \frac{x}{1-2x}f_1(x) = \frac{x^2}{(1-x)(1-2x)}$$

$$f_3(x) = \frac{x}{1-3x} f_2(x) = \frac{x^3}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}$$

وهكذا دواليك. وبذا نكون قد برهنّا المبرهنة التالية.

المبرهنة 4.3.1: لأي $k \geq 0$، الدالة المولدة البسيطة للتسلسل $\{S(n,k)\}_{n\geq 0}$ يساوي 1 إذا كانت قيمة $k = 0$، أما إذا كانت قيمة $k > 0$ فتكون الدالة المولدة البسيطة:

$$\frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)} = \prod_{j=1}^{k} \frac{x}{1-jx}$$

السؤال 157: باستخدام الدالة المولدة، ما هي صيغة $S(n,2)$؟ أي، ما هو معامل x^n في البند $x^2/(1-x)(1-2x)$؟ تأكد من أن إجابتك تطابق صيغة $S(n,2)$ التي وضعناها في القسم 2.3.

أعداد بيل

لأعداد بيل دوال مولّدة أسية معروفة. ولتحديد هذه الدوال بشكلٍ موجز، سينتهي بنا الأمر لحلّ معادلة تفاضلية بسيطة.

عرّف

$$g(x) := \sum_{n\geq 0} B(n) \frac{x^n}{n!}$$

كدالة مولّدة أسية لأعداد بيل. ابدأ كالعادة بالتكرار، وفي هذه الحالة، يكون التكرار هو نفسه الذي ورد في بداية هذا القسم. لأسباب ستتضح بعد قليل، اضرب

بالمقدار $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ (بدلاً من المقدار الاعتيادي $\frac{x^n}{n!}$) ومن ثم اجمع قيم $n \geq 1$ للحصول على

(4.9)

$$\sum_{n\geq 1} B(n)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}B(j)\right)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

يجب أن تُقرع بعض أجراس الإنذار. أولاً، الطرف الأيسر يساوي مشتقّة الدالة $g(x)$. ثانياً، الطرف الأيمن يبدو حاصل ضرب الدوال المولّدة الأسية. في الواقع إذا جعلنا قيمة $m := n-1$ فإن الطرف الأيمن يصبح:

$$\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}B(j)\right)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}B(k)\right)\frac{x^m}{(m)!}$$

بعدئذ، تقتضي صيغة الالتفاف للدوال المولّدة الأسية أن تكون عبارة عن حاصل ضرب الدوال المولّدة الأسية للتسلسل $\{B(n)\}_{n\geq 0}$ والتسلسل $\{1\}_{n\geq 0}$:

$$\sum_{m\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}B(k)\right)\frac{x^m}{(m)!} = \underbrace{\left(\sum_{n\geq 0}B(n)\frac{x^n}{n!}\right)}_{\text{أعداد بيل}}\underbrace{\left(\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\right)}_{\text{جميع الواحدات}}$$

$$= g(x)\cdot e^x$$

بمعنى آخر، تُختصر المعادلة (4.9) $g'(x) = e^x g(x)$. هذه المعادلة التفاضلية البسيطة سهلة الحلّ: ما الذي تحتويه الدالة g التي مشتقتها تساوي e^x مضروبة بـ g نفسه؟ الحل العام يساوي $g(x) = e^{e^x + c}$ لبعض القيم الثابتة C.

لتحديد C، لاحظ أن $g(0) = B(0) = 1$. وعليه فإن $1 = e^{e^0+c} = e^{1+c}$، وعليه فإن $C = -1$.

المبرهنة 4.3.2 الدالة المولّدة الأسية لأعداد بيل $\{B(n)\}_{n\geq 0}$ يساوي e^{e^x-1}.

معادلة لأعداد بيل

كما تذكّرنا في بداية هذا القسم، فنحن نعرف صيغة لأعداد ستيرلينغ من النوع الثاني. وهي:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i(k-i)^n$$

وهذه الصيغة يمكن كتابتها بصورة أخرى وهي:

(4.10)

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}j^n$$

السؤال 158: تحقق من ذلك:

من الطبيعي أن تسأل هل هناك صيغة شبيهة لأعداد بيل. والجواب نعم.

نعلم أيضاً أن $B(n) = \sum_{k\geq 0} S(n,k)$. لا بأس من كتابتها كمجموع لا متناه لأن $S(n,k) = 0$ لـ $k > n$. باستخدام الصيغة المبيّنة في المعادلة (4.10) أعلاه:

$$B(n) = \sum_{k\geq 0} S(n,k) = \sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\,j^n\right)$$

باعتبار $\binom{k}{j}$ كـ $\frac{k!}{j!(k-j)!}$ وحذف البنود $k!$، يظهر لدينا

$$\sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\ j^n\right)=\sum_{k\geq 0}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{k-j}\ j^n}{(k-j)!\,j!}$$

بتبديل ترتيب المجاميع

$$\sum_{k\geq 0}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{k-j}\ j^n}{(k-j)!\,j!}=\sum_{j\geq 0}\sum_{k\geq j}\frac{(-1)^{k-j}\ j^n}{(k-j)!\,j!}=\sum_{j\geq 0}\left(\frac{j^n}{j!}\sum_{k\geq j}\frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!}\right)$$

السؤال 159: أثبت أن ترتيب المجاميع قد تم تغييره بصوره صحيحة.

الآن، بالنسبة إلى القيم $j\geq 0$ الثابتة، المجموع الداخلي هو تسلسل ماكلورين المعروف:

$$\sum_{k\geq j}\frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!}=\sum_{i\geq 0}\frac{(-1)^i}{i!}=e^{-1}$$

إذن:

$$\sum_{j\geq 0}\frac{j^n}{j!}\sum_{k\geq j}\frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!}=\sum_{j\geq 0}\frac{j^n}{j!}e^{-1}=e^{-1}\sum_{j\geq 0}\frac{j^n}{j!}$$

اشتققنا صيغة جميلة لعدد بيل ذي الترتيب n.

المبرهنة 4.3.3، لأي $n>0$، فإن $B(n)=\frac{1}{e}\sum_{j\geq 0}\frac{j^n}{j!}$.

ربما يكون أمراً معجزاً صيغة المبرهنة يكون ناتجها دائماً عدد صحيح. مثلاً $B(5)=52$ وهكذا.

$$\frac{1}{e}\sum_{j\geq 0}\frac{j^5}{j!}=\frac{1}{e}\left(\frac{0^5}{0!}+\frac{1^5}{1!}+\frac{2^5}{2!}+\frac{3^5}{3!}+\frac{4^5}{4!}+\frac{5^5}{5!}+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{e}\left(\frac{0}{1} + \frac{1}{1} + \frac{32}{2} + \frac{243}{6} + \frac{1024}{24} + \frac{3125}{120} + \cdots\right)$$

ويساوي 52، تحديداً. المتسلسلة اللامتناهية تعطي طريقة مقبولة لحساب أعداد بيل بسبب تقاربها السريع. فيما يلي أعداد بيل الخمسة عشر الأولى:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$B(n)$	1	2	5	15	52	203	877	4140	21,147	115,975

n	11	12	13	14	15
$B(n)$	678,570	4,213,597	27,644,437	190,899,322	1,382,958,545

السؤال 160: استخدم الحاسوب لحساب بعض المجاميع الجزئية لـ $\frac{1}{e}\sum_{j\geq 0}\frac{j^{10}}{j!}$. كم عدد البنود التي تحتاجها لإيجاد قيمة $B(10)$؟

كثيرات الحدود وتغيّر الأساس

أعداد ستيرلينغ ومعاملات كثيرات الحدود

لفهم العلاقة بين الجبر والتوافيق، يلقي ما تبقى من هذا القسم بعض الضوء على كيفية ارتباط أعداد ستيرلينغ بمعاملات لبعض كثيرات الحدود.

لنبدأ بإيجاد إجابة صعبة لسؤال سهل. كم عدد الدوال $[n] \to [k]$ موجود؟ إحدى الإجابات هي k^n. للحصول على إجابة أخرى، نضع شرطاً على حجم حيز الدالة. إذا كان حجم حيز الدالة j، حيث $1 \leq j \leq n$، فتوجد $\binom{k}{j}$ طريقة لاختيار العناصر j من $[k]$ لتكوين حيز الدالة. بعد ذلك ستكون هناك $S(n,j) \cdot j!$ طريقة لربط عناصر $[n]$ كافة بعناصر j في دالة شاملة. وهذا يعطي برهاناً توافقياً لـ

$$k^n = \sum_{j=1}^{n} \binom{k}{j} S(n,j) \cdot j!$$

السؤال 161: بتحديد شروط على حجم j حيز الدالة، فقد ذكرنا أن $1 \leq j \leq n$. ثمة خيار طبيعي أكثر وهو $1 \leq j \leq k$، لكن لماذا كان الاختيار الأصلي مبرراً؟ لنعمل بعض التعديلات. فبما أن $\binom{k}{j} \cdot j! = (k)_j$، أعد كتابة المتطابقة التي اشتققناها للتو على النحو التالي:

$$k^n = \sum_{j=1}^{n} S(n,j) \cdot (k)_j$$

هذه المعادلة كثيرة الحدود في k صحيحة لعدد غير متناهٍ من الأعداد الصحيحة الموجبة k. وإن فرادة كثيرات الحدود تتيح استبدال k بـ x غير محددة للحصول على النظرية التالية.

المبرهنة 4.3.4: لأي $n \geq 0$، فإن $x^n = \sum_{j=0}^{n} S(n,j)(x)_j$.

البرهان: إن البرهان عندما $n > 0$ يظهر قبل المبرهنة. وعندما $n = 0$، تذكر أن $(x)_0 =: 1$. في هذه الحالة، تكون صيغة المبرهنة صحيحة أيضاً: $\sum_{j=0}^{0} S(0,j)(x)_j = S(0,0)(x)_0 = 1 \cdot 1 = x^0$

المبرهنة ممتعة لأنه، وعلى الرغم من أننا اشتققناها بطريقة توافقية، إلا أنها حقيقة جبرية عن كثيرات الحدود $(x)_j$. تحديداً، تفيد المبرهنة بأن أعداد ستيرلينغ من النوع الثاني تصف كيفية كتابة كثيرة الحدود x^n كمجموعة من كثيرات الحدود $(x)_j$ لقيم $0 \leq j \leq n$. بالنسبة إلى أولئك المتمكنين في الجبر الخطي، فإن الأعداد $S(n,j)$ هي إحداثيات كثيرة الحدود x^n المتعلقة بالأساس $\{(x)_0, (x)_1, (x)_2, \ldots, (x)_n\}$ للفضاء المتجهي لكثيرات الحدود من الدرجة n على الأكثر. على سبيل المثال، تؤكد المبرهنة أن

$$x^3 = S(3,0)(x)_0 + S(3,1)(x)_1 + S(3,2)(x)_2 + S(3,3)(x)_3$$

تحقق من ذلك:

$$\begin{aligned} &S(3,0)(x)_0 + S(3,1)(x)_1 + S(3,2)(x)_2 + S(3,3)(x)_3 \\ &= 0(1) + 1(x) + 3x(x-1) + 1(x)(x-1)(x-2) \\ &= x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x \\ &= x^3 \end{aligned}$$

السؤال 162: اكتب مجموعة خطية لكثيرات الحدود $(x)_0$، $(x)_1$، $(x)_2$، $(x)_3$، $(x)_4$. كرر الأمر لـ $5x^4 - 10x^3$.

أعداد ستيرلينغ من النوع الأول

قد يكون من الممتع أكثر التوجه إلى مسار آخر: عندما تبسّط المعادلة، نقول،

$$(x)_5 = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$
$$= x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x$$

من أين تأتي المعاملات 1، -10، 35، -50، 24؟ هل لها معنى توافقي؟

بما أن $(x)_n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$ هي كثيرة حدود من الدرجة n، فإن هناك أعداد $S(n,k)$ لـ $0 \le k \le n$، لها

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k$$

هذا هو تعريف أعداد ستيرلينغ من النوع الأول.

السؤال 163: بناءً على مثال $(x)_5$ من الفقرة السابقة، ما قيمة $s(5,k)$ لـ $0 \le k \le 5$؟

يتبع ذلك تكرار حساب $s(n,k)$ من كتابة $(x)_n = (x)_{n-1}(x-n+1)$ أو $(x)_n = x(x)_{n-1} - (n-1)(x)_{n-1}$. الآن استخدم تعريف الأعداد $s(n,k)$ لإعادة كتابة هذه المعادلة كـ

(4.11)

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k}_{(x)_n} = x\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)x^k}_{(x)_{n-1}} - (n-1)\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)x^k}_{(x)_{n-1}}$$

أخيراً، ما عليك سوى مطابقة معاملات x^k على طرفي المعادلة لاشتقاق التكرار التالي.

المبرهنة 4.3.5: لـ $0 < k$ و $0 < n$، أعداد ستيرلينغ من النوع الأول تحقق المتطابقة

(4.12)

$$s(0,k) = 0\ s\ (n-1,k-1) - (n-1)\cdot s(n-1,k)$$

السؤال 164: لماذا $s(n-1,k-1)$ معامل x^k في الحد الأوسط في المعادلة 4.11؟

كما هو الحال في أعداد ستيرلينغ من النوع الثاني، فإن أعداد ستيرلينغ من النوع الأول تحقق نفس شروط الحدود: $s(0,0) = 1, s(n,0) = 0$ و$k >$ لـ$n > 0$ $s(0,k) = 0$ لـ0.

السؤال 165: ما هو سبب كل شرط من شروط الحدود؟ فسّر الأمر في سياق تعريف أعداد ستيرلينغ من النوع الأول. (تذكر أن $(x)_0 \coloneqq 1$).

يتيح التكرار حساب **مثلث ستيرلينغ من النوع الأول**:

7	6	5	4	3	2	1	0	$n \downarrow k \rightarrow$
0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	1	1-	0	2

0	0	0	0	1	3-	2	0	3
0	0	0	1	6-	11	6-	0	4
0	0	1	10-	35	50-	24	0	5
0	1	15-	85	225-	274	120-	0	6
1	21-	175	735-	1624	1764-	720	0	7

كالعادة، العنصر في الصف n والعمود k هو $s(n,k)$.

عدّ تباديل $[n]$ بـ k دورة

لأعداد ستيرلينغ من النوع الثاني تفسير توافقي. هل لأعداد ستيرلينغ من النوع الأول تفسيراً توافقياً أيضاً؟ نعم، نوعاً ما.

ترميز الدورة

تذكّر أن التبديل (Permutation) على $[n]$ هو دالة تناظرية $[n] \to [n]$. بصورة مكافئة، هي قائمة مكونة من n عنصر مأخوذة من المجموعة $[n]$ بحيث يظهر كل عنصر مرة واحدة تحديداً. على سبيل المثال، التبديل $(7,4,3,2,6,1,5)$ من المجموعة $[7]$ هو ترميز ملائم للدالة التناظرية $f:[7] \to [7]$ حيث $f(1) = 7, f(2) = 4, f(3) = 3$ وهكذا دواليك.

لكتابة هذه الدالة كحاصل ضرب دورات منفصلة، نفّذ الآتي. ابدأ بالعنصر 1 ثم طبّق الدالة f تكرارياً حتى تصل إلى 1 مرة أخرى:

$$1 \Rightarrow f(1) = 7 \Rightarrow f(7) = 5 \Rightarrow f(5) = 6 \Rightarrow f(6) = 1$$

سجّل هذا الجزء من التبديل كدورة (6 5 7 1). وفيها، تظهر صورة أي عنصر مباشرة إلى يمين ذلك العنصر. في النهاية، يتم التدوير بحيث تكون صورة العنصر 6 هي 1.

تالياً، ابدأ بأصغر عنصر لا يظهر في الدورة الموضحة أعلاه وطبّق الدالة f تكرارياً مرة أخرى:

$$2 \Rightarrow f(2) = 4 \Rightarrow f(4) = 2$$

سجّل هذه كدورة (4 2). الآن كرر مرة أخرى، لكن ابدأ هذه المرة بالعنصر 3. فيكون $f(3) = 3$، بحيث تكون الدورة المرتبطة تساوي (3). وهذا يستنفذ عناصر المجموعة [7] كافة، بحيث

$$f = (1\ 7\ 5\ 6)(2\ 4)(3)$$

أصبح مكتوباً الآن كحاصل ضرب دورات منفصلة.

عندما يصبح الإجراء الموضّح أعلاه اصطلاحياً، فإنه دائماً يُنتِج تمثيلاً صحيحاً لـ f كحاصل ضرب دورات منفصلة. (طالع التمرين 3). مثل هذا التمثيل لا يكون فريداً، حيث إن الدالة

$f = (5617)\ (3)(2\ 4)$ هي تمثيل صحيح أيضاً للدالة f.

للتأكد من أنك فهمت الترميز الدوري، دعنا نجد طريقة "مألوفة" (مثلاً قائمة من 7 عناصر) لوصف التبديل (7)(5)(37)(4 12). عناصر القائمة هي:

$$\begin{array}{lll} f(1) = 2 & f(3) = 7 & f(5) = 5 \\ f(2) = 4 & f(4) = 1 & f(6) = 6 \end{array}$$

$f(7) = 3$

بكتابتها على هيئة قائمة من 7 عناصر: $f = (2,4,7,1,5,6,3)$.

السؤال 166: اكتب التبديل (10,9,8,7,6,5,4,3,2,1) كحاصل ضرب دورات تماماً. اكتب التبديل (4 5 6 3)(2)(7 8 9 1) كقائمة من 9 عناصر.

التباديل وأعداد ستيرلينغ من النوع الأول

لتكن $c(10,4)$ عدد تباديل المجموعة [10] التي تتضمن أربع دورات تحديداً. مثل هذا التبديل إما يحتوي على العنصر 10 في دورة بنفسه، كما في (10)(5 4)(6 8 9 3)(2 7 1)؛ أو أنه يحتوي العنصر 10 في دورة مع عنصر واحد آخر على الأقل، كما في (9 8 10 6)(4)(2)(3 5 9 1).

يوجد $c(9,3)$ تبديل من النوع الأول، وبما أن حذف الدورة التي تحتوي 10 لوحدها يجعل التبديل على 9 مكوناً من 3 دورات تماماً. فيوجد $9 \cdot c(9,4)$ تبديلات من النوع الثاني، حيث يمكننا إنشاء مثل هذا التبديل باختيار تبديل على [9] أولاً من 4 دورات ومن ثم اختيار موقع العنصر 10 بإحدى الطرق التسع: قبل ظهور أي من العناصر التسعة. على سبيل المثال، التبديل الثاني المعطى في الفقرة السابقة أنشئ باختيار التبديل التالي على [9] من 4 أجزاء:

$$(1\ 9\ 5\ 3)(2)(4)(6\ 8\ 9)$$

ومن ثم اختيار وضع العنصر 10 قبل العنصر 8. إن متطلب وضع 10 قبل أي من العناصر التسعة المعطاة مهم. إذا سمحنا أيضاً بوضعه بعد آخر عنصر في دورة،

فإننا سنفرط في العدّ لأن الدورة (10 3 5 9 1)، على سبيل المثال، هي نفس الدورة (3 5 9 1 10).

التعريف 4.3.6: لأي $k \geq 0$ و $n \geq 0$، فإن التعبير $c(n,k)$ يساوي عدد التباديل على $[n]$ التي فيها عدد k دورات تماماً. نعرّف $c(0,0) \coloneqq 1$.

لاحظ، كما هو الحال في أعداد ستيرلينغ من النوع الأول، إن $c(n,0) = c(0,k) = 0$ لقيم n و k الموجبة. تعطينا المناقشة التي سبقت التعريف فكرة عن برهان المتطابقة التالية.

المبرهنة 4.3.7: لـ $k > 0$ و $n > 0$، تحقق الأعداد $c(n,k)$ المتطابقة التالية:

$$c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1) \cdot c(n-1,k)$$

السؤال 167: أعطِ برهاناً توافقياً للمبرهنة.

مثلث الأعداد $c(n,k)$ يجب أن يبدو مألوفاً:

$n \downarrow k \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0
3	0	2	3	1	0	0	0	0
4	0	6	11	6	1	0	0	0
5	0	24	50	35	10	1	0	0
6	0	120	274	225	85	15	1	0
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1

تحديداً، تظهر الأعداد $c(n,k)$ كقيم مطلقة للأعداد $s(n,k)$. إذ أن $c(n,k)$ لها تفسير توافقي بينما $s(n,k)$ لها تفسير جبري.

قد تقنعك مقارنة جدولين من القيم أن $c(n,k) = |s(n,k)|$، إحدى طرق إعطاء برهان دقيق هو استخدام استقراء مزدوج على k و n. في الواقع يمكننا برهنة أمر أكثر تحديداً: $s(n,k) = (-1)^{n+k} c(n,k)$.

تحدث الحالات الأساسية عند الأطراف العليا واليسرى من الجداول التي بنيناها لـ $c(n,k)$ و $s(n,k)$. أي عند قيم kو n التي تكون إحداها تساوي 0. بما أن $s(0,0) = 1 = c(0,0)$ و $s(n,0) = 1 = c(n,0)$ و $s(0,k) = 1 = c(0,k)$ لجميع قيم $k > 0$ و$n > 0$، بالتالي يكون $s(n,k) = (-1)^{n+k} c(n,k)$ لتلك القيم من k و n.

الآن لتكن $k > 0$ و$n > 0$ قيماً ثابتة، ولنفترض أن العبارة صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة غير السالبة m و i حيث $m \le n$ و $i \le k$، لكن المتطابقة لا تبقى ثابتة في الحالتين. ابدأ بكتابة التكرار لـ $s(n,k)$، ثم استخدم فرضية الاستقراء لاستبدال الحدود الأقل، ثم نفّذ بعض العمليات الجبرية:

$$\begin{aligned}
s(n,k) &= s(n-1,k-1) - (n-1) \cdot s(n-1,k) \\
&= (-1)^{n-1+k-1} c(n-1,k-1) - (n-1) \cdot (-1)^{n-1+k} c(n-1,k) \\
&= (-1)^{n+k} c(n-1,k-1) + (n-1) \cdot (-1)^{n+k} c(n-1,k) \\
&= (-1)^{n+k} [c(n-1,k-1) + (n-1) \cdot c(n-1,k)]
\end{aligned}$$

$= (-1)^{n+k} c(n,k)$

السؤال 168: برّر المعادلة الثالثة أعلاه. ماذا حدث لقوى -1 ولماذا؟

وبناء على ذلك، فإن العبارة صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة غير السالبة k و n.

المبرهنة 4.3.8: لجميع قيم $k \geq 0$ و $n \geq 0$، فإن $s(n,k) = (-1)^{n+k} c(n,k)$. وبشكل خاص، إن القيمة المطلقة لعدد ستيرلينغ من النوع الأول $s(n,k)$ تساوي عدد التباديل على $[n]$ بعدد دورات k تماماً.

مشغّل الفرق

مغامرتنا الأخيرة في هذا القسم تكشف جسراً جبرياً آخر لأعداد ستيرلينغ.

ليكن $f(n)$ دالة معرّفة على الأعداد الصحيحة $n \geq 0$. عرّف مشغّل الفرق Δ بـ:

$$\Delta f(n) \coloneqq f(n+1) - f(n)$$

يمكن تكرار مشغّل الفرق على النحو: $\Delta^k f(n) \coloneqq \Delta(\Delta^{k-1} f(n))$. على سبيل المثال:

$$\Delta^2 f(n) = \Delta\big(\Delta f(n)\big) = \Delta\big(f(n+1) - f(n)\big)$$

$$= f(n+2) - f(n+1) - (f(n+1) - f(n))$$
$$= f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)$$

بما أن $\Delta^3 f(n) = \Delta\big(\Delta^2 f(n)\big)$، فإن:

$$\Delta^3 f(n) = \Delta(f(n+2) - 2f(n+1) + f(n))$$

$$= f(n+3) - 2f(n+2)$$
$$+ (f(n+1) - (f(n+2) - 2f(n+1) + f(n))$$
$$= f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n)$$

بالطبع هذا النمط يصبح واضحاً لـ$\Delta^4 f(n)$:

$$\Delta^4 f(n) = \Delta(f(n+4) - 4f(n+3) + 6f(n+2) - 4f(n+1) + f(n)$$

السؤال 169: تحقق من هذه الصيغة بحساب $\Delta(\Delta^3 f(n))$.

المبرهنة التالية، والتي يتطلب منك التمرين 14 برهانها بالاستقراء، تبين كيفية ظهور معاملات ذات الحدين في حساب $\Delta^m f(n)$.

المبرهنة 4.3.9: إذا كان $f(n)$ دالة معرفة على جميع الأعداد الصحيحة $n \geq 0$، فإن

$$\Delta^m f(n) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(n+m+k)$$

لجميع قيم $m \geq 1$.

فيما نريد اشتقاقه، فإن شغلنا الشاغل هو عندما $n = 0$. في هذه الحالة، تكون صيغة المبرهنة:

$$\Delta^m f(0) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(m-k)$$

حيث يمكن إعادة كتابتها على النحو (لتكن $j := m - k$ بحيث $k = m - j$)

$$\Delta^m f(0) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(j)$$

هذا يعطي صيغة للفرق ذي الترتيب m للدالة عند القيمة 0 عندما $f(0), f(1), \ldots, f(m)$.

السؤال هنا، هل يمكننا عكس الصيغة؟ بمعنى، هل من الممكن الحصول على صيغة للدالة $f(n)$ من حيث $\Delta^k f(0)$؟ الإجابة هي نعم. يطلب منك التمرين 10 برهان النتيجة التالية.

المبرهنة 4.3.10: إذا كان $f(n)$ دالةً معرفةً على جميع الأعداد الصحيحة $n \geq 0$، فإن:

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(0)$$

تقول المبرهنة إنه إذا عرفنا فروقات الدالة عند 0، فيمكننا أن نعيد صياغة الدالة نفسها.

مثال: جدول الفروق (Difference Table)

إذا كانت $f(n)$ دالةً معرفةً على جميع الأعداد الصحيحة غير السالبة n، فإن جدول الفروق للدالة f عند $n = 0$ يكون:

$$\begin{array}{ccccccccc}
f(0) & & f(1) & & f(2) & & f(3) & & f(4) \ldots \\
& \Delta f(0) & & \Delta f(1) & & \Delta f(2) & & \Delta f(3) \ldots & \\
& \Delta^2 f(0) & & \Delta^2 f(1) & & \Delta^2 f(2) & & \Delta^2 f(3) \ldots & \\
& & \Delta^3 f(0) & & \Delta^3 f(1) & & \Delta^3 f(2) \ldots & & \\
& & \Delta^4 f(0) & & \Delta^4 f(1) & & \Delta^4 f(2) \ldots & &
\end{array}$$

$$\ddots \quad \ddots \quad \ddots$$

تكون الأعداد ... ,$f(0), f(1), f(2)$ في الصف الأول. للحصول على الصف الثاني، نعرف أن $\Delta f(0) = f(1) - f(0)$، إذن ضع ذلك العدد مباشرة تحت الفراغ بين $f(1)$و $f(0)$.

بهذه الطريقة، يمكنك حساب بقية الصف بأخذ المدخل إلى الشمال الشرقي ومن ثم طرح المدخل إلى الشمال الغربي. بسبب تعريف مشغّل الفرق، فإنه يتم حساب الصفوف التالية بنفس الطريقة تحديداً.

كمثال، ابنِ **جدول الفروق** لـ $f(n) = n^3$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbf{0} & & 1 & & 8 & & 27 & & 64 & & 125\ldots \\ & \mathbf{1} & & 7 & & 19 & & 37 & & 61\ldots & \\ & & \mathbf{6} & & 12 & & 18 & & 24\ldots & & \\ & & & \mathbf{6} & & 6 & & 6\ldots & & & \\ & & & & \mathbf{0} & & 0\ldots & & & & \end{array}$$

وهذا يبيّن أن $f(0) = 0$، $\Delta f(0) = 1$، $\Delta^2 f(0) = \Delta^3 f(0) = 6$، و$\Delta^m f(0) = 0$ لقيم $m > 3$. طبعت هذه المدخلات بالخط العريض في جدول الفروقات لأنها المدخلات التي تظهر في المبرهنة 4.3.10. تظهر تلك المبرهنة (نفس المدخلات الموجودة بالخط العريض فيما يلي):

$$n^3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(0)$$

$$= 0\binom{n}{0} + 1\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} + 0\binom{n}{4} + \cdots + 0\binom{n}{n}$$
$$= \binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3}$$

بما أن هذا صحيح للعديد من القيم اللامتناهية من الأعداد الصحيحة غير السالبة n، فإنه أيضاً صحيح لمعادلة كثيرة الحدود عندما نقوم بإبدال n بـ x غير محددة واستخدام $\binom{x}{k} = \frac{(x)_k}{k!}$. كما أن

$$x^3 = \binom{x}{1} + 6\binom{x}{2} + 6\binom{x}{3} = (x)_1 + \frac{6}{2!}(x)_2 + \frac{6}{3!}(x)_3$$

بشكلٍ عام، عندما $f(x) = x^n$، فإن:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \Delta^k f(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(0)}{k!}(x)_k$$

لكن نحن نعلم أيضاً أن $x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k$، وكذلك $S(n,k) = \frac{\Delta^k f(0)}{k!}$ أو $\Delta^k f(0) = S(n,k) \cdot k!$

جميع ما سلف يبيّن أنه إذا كان $f(x) = x^n$، فإنه يمكن تفسير $\Delta^k f(0)$ توافقياً: فهي تساوي عدد الدوال الشاملة $[n] \to [k]$.

ملخص

لقيم $k \geq 0$ الثابتة، يساوي الدالة المولدة البسيطة للأعداد $S(n,k)$ $x^k/(1-x)(1-2x)\ldots(1-kx)$. الدالة المولدة الأسية للأعداد $B(n)$ يساوي e^{e^x-1}، وصيغة العدد بيل ذي الرتبة n هي:

$$B(n) = \frac{1}{e}\sum_{j\geq 0}\frac{j^n}{j!}$$

جبرياً، أعداد ستيرلينغ من النوعين الأول والثاني هي معاملات في امتدادات كثيرات حدود معينة:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k \qquad \text{و} \qquad (x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k$$

على الرغم من أن أعداد ستيرلينغ من النوع الأول تبادلية من حيث الإشارة، فإن قيمها المطلقة لها تفسير توافقي: $|S(n,k)|$ يساوي عدد التباديل على $[n]$ والتي عدد دوراتها يساوي k تماماً. يوفر مشغّل الفرق رابطاً آخر بين كثيرات الحدود وأعداد ستيرلينغ من النوع الثاني.

تمارين:

1. اكتب كثيرة الحدود $3x^4 - x^3 + 4x + 10$ كتجميع خطي لكثيرات الحدود $(x)_0$، $(x)_1$، $(x)_2$، $(x)_3$، $(x)_4$.

2. اكتب $3(x)_4 - 12(x)_3 + 4(x)_1 - 17$ كتجميع خطي لكثيرات الحدود $1, x, x^2, x^3, x^4$.

3. صف خوارزمية يكون مدخلها تبديلاً على $[n]$، بحيث تكون مكتوبة كقائمة مكونة من n عنصر، ومخرجاتها مكتوبة كترميز دورة. يجب أن يشمل ترميز الدورة الخصائص التالية:

1) يجب أن تبدأ الدورة الأولى بالعنصر 1؛

2) يجب أن تبدأ كل دورة متتالية بالعنصر الأصغر الذي لا ينتمي إلى أي من الدورات السابقة.

4. (أ) أعطِ برهاناً توافقياً: لكل $n \geq 1$، $c(n, n-1) = \binom{n}{2}$.

(ب) أعطِ برهاناً توافقياً: لكل $n \geq 1$، $c(n, 1) = (n-1)!$.

(جـ) أعطِ برهاناً جبرياً: لكل $n \geq 1$، $s(n, n-1) = -\binom{n}{2}$.

(د) أعطِ برهاناً جبرياً: لكل $n \geq 1$، $s(n, 1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$.

5. لتكن f دالةً متصلةً. برهن أن الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = f(x)y$ يساوي $y = e^{F(x)+C}$ حيث F هي المشتقة العكسية للدالة f و C عدد ثابت.

6. برهن: لأي $n \geq 0$، فإن $(-x)_n = (-1)^n (x)^{(n)}$. (الترميز $(x)^{(n)}$ هو ترميز "مضروب متزايد". طالع التمرين 16 في القسم 2.1)

7. برهن: لأي $n \geq 0$، فإن $(x)^{(n)} = \sum_{k \geq 0} c(n, k) x^k$. (طالع التمرين السابق).

8. اكتب امتداد $(1+x)^n$ كتجميع خطي لكثيرات الحدود $(x)_k$. بمعنى آخر، حدّد المعاملات a_k بحيث يكون $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k (x)_k$.

9. لتكن $k \geq 0$. في هذا القسم، اشتققنا الدالة المولدة البسيطة للتسلسل $\{S(n,k)\}_{n\geq 0}$. بيّن أن الدالة المولدة الأسية للتسلسل نفسه هي $\frac{1}{k!}(e^x - 1)^k$.

10. برهن المبرهنة 4.3.10

11. جد صيغة لعدد تقسيمات $[n]$ بحيث لا تظهر فيها أي أعداد صحيحة متتالية في نفس الكتل، ثم برهن تلك الصيغة.

12. تتبّع المثال لـ x^3 في هذا القسم، ضع جدول الفروقات للدالة $f(n) = x^4$، ثم اكتب x^4 كتجميع خطي لكثيرات الحدود $0 \leq j \leq$ $\binom{x}{j}$ للمتباينة 4.

13. برهن أن، كما الاشتقاق، مشغّل الفرق Δ يحقق $\Delta\big(f(n) + g(n)\big) = \Delta f(n) + \Delta g(n)$ وأنه لأي عدد c فإن $\Delta\big(cf(n)\big) = c\Delta f(n)$.

14. برهن المبرهنة 4.3.9 بالاستقراء على m.

ملاحظات سريعة

عندما تكون $f(x) = x^n$ فإن شكل المعادلة

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k}{k!}(x)_k$$

قد يذكّرك بمتسلسلة ماكلورين للدالة التفاضلية غير المحدودة، تحديداً

$$g(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

تصف كلتا المعادلتين كيفية التعبير عن دالة ($f(x)$ أو $g(x)$، على التوالي) كتجميع خطي لدوال أخرى (مضاريب $(x)_k$ أو دوال قوى x^k) حيث تتضمن معاملات التجميع الخطي مقاييس التغير عند قيمة $x = 0$ (الفرق ذو الترتيب k أو الاشتقاق ذو الترتيب k، على التوالي). في الواقع، يوجد حساب تفاضل وتكامل للفروقات المحدودة التي تعتبر نسخة منفصلة عن حساب التفاضل والتكامل المستمر العادي.

4.4 الأعداد الصحيحة للتقسيمات

درسنا في القسمين 2.4 و3.4 بعض الحقائق عن تقسيمات الأعداد الصحيحة. تذكّر أن $P(n,k)$ تساوي عدد تقسيمات العدد الصحيح n إلى k جزء، و$P(n)$ تساوي العدد الإجمالي لتقسيمات العدد الصحيح n. من بين الأمور الأخرى، تحقق أعداد التقسيمات المتطابقة

$$P(n,k) = \sum_{j=1}^{k} P(n-k, j)$$

يشير هذا إلى أن عدد التقسيمات n إلى k جزء يساوي عدد تقسيمات $n-k$ إلى k جزء على الأكثر. وقد يكون من الأسهل كتابتها كـ:

(4.15)

$$P(n,k) = P(n-k, \text{على الأكثر } k)$$

كما تعلمنا أن الدالة المولّدة البسيطة لـ $\{P(n)\}_{n\geq 0}$ هو

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots} = \prod_{j\geq 1} \frac{1}{1-x^j}$$

في هذا القسم، سنبرهن مبرهنتين توافقيتين أخريين عن أعداد التقسيمات وإيجاد الدالة المولدة البسيطة لـ $P(n,k)$ لعدد الأجزاء الثابت k، والتحقق من الصيغ المحتملة لأعداد التقسيمات.

مخططات فيرير

مخطط فيرير (Ferrers Diagrams) هو أداة مفيدة، ليس فقط لرؤية مخطط التقسيم فحسب، بل لإثبات مبرهنات التقسيمات أيضاً. يبين المخطط التالي شكل فيرير للتقسيم 7+5+5+2+1 للمجموعة 20



ثمة صفّ واحد لكل جزء من التقسيم وعدد النقاط في كل صف يحدد حسب حجم الجزء الذي ترتبط به. كما يحدد مخطط فيرير قائمة الأجزاء بترتيبٍ غير متزايد، من الأعلى إلى الأسفل.

عمليات على مخططات فيرير

من العمليات التي يمكننا تنفيذها على مخطط فيرير حذف أول عمود فيه. وهذا يرتبط بطرح 1 من كل جزء. في الواقع، هذا تماماً ما فعلناه عندما أعطينا برهاناً تقابلياً على أن

$P(n,k) = P(n-k,$ على الأكثر $k)$ في النظرية 2.4.2.

السؤال 170: ما هي العملية على مخططات فيرير والتي تؤدي إلى برهان تقابلي مباشر للمتطابقة

$P\left(n, k\right.$ أكبر جزء من$\left.\right) = P(n-k,$ على الأكثر k أكبر جزء من$)$؟

من العمليات الأخرى الأكثر دقة عملية أخذ التقارن. للحصول على تقارن مخطط فيرير ، ما عليك سوى تبديل الصفوف بالأعمدة[4]. على سبيل المثال، يبينّ الشكل التالي تقارن مخطط فيرير للتقسيم المبيّن سابقاً:

[4] ربما كان مصطلح "تبادل (Transpose) أفضل (كالتبادل في المصفوفات)، لكن مصطلح "تقارن" (Conjugate) مازال ثابتاً.



يرتبط مخطط فيرير بالتقسيم 5+4+3+3+3+1+1 على المجموعة 20. بهذه الطريقة يمكننا ذكر تقارن التقسيم (Conjugate of a Partition) بدون مخطط فيرير . تعرض مخططات فيرير طريقة ملائمة لتنفيذ التقارن. طالع التمرين 2.

السؤال 171: ما هو تقارن التقسيم 19+1؟

فيما يلي بعض الحقائق الأساسية عن التقارن.

- الحقيقة 1: تقارن التقسيم على المجموعة n هو تقسيم على n أيضاً.
- الحقيقة 2: إذا طُبّقت عملية التقارن مرتين، فالناتج يكون العودة إلى التقسيم الأصلي.
- الحقيقة 3: إذا كان أكبر جزء في التقسيم هو k فإن تقارنه يتضمن أجزاء k.

ومثال ذلك أنه إذا كان التقسيم يتضمن k جزء، فإن تقارنه يتضمن أكبر جزء وهو k.

• الحقيقة 4: إذا تضمن تقسيم الأجزاء k على الأكثر، فإن تقارنه يتضمن أكبر جزء على الأكثر k.

• الحقيقة 5: التقارن هو عملية واحد- لواحد دائماً.

السؤال 172: لماذا تعتبر الحقيقة 5 صحيحة؟ أعطِ برهاناً سريعاً.

البراهين باستخدام مخططات فيرير

المتطابقات حسب الحقائق 3 و4

لنأخذ تقسيمات من المجموعة n إلى k جزء. (لنسمها المجموعة A) والتقسيمات على n أكبرها الجزء k (لنسمها المجموعة B). عملية التقارن هي دالة من A إلى B بحسب الحقيقة 3. وهو دالة واحد - لواحد حسب الحقيقة 5. كما أنه دالة شاملة بحسب الحقيقتين 2 و3: إذا أعطي تقسيم على B، خذ تقارنه للحصول على تقسيم في A. ومن ثم فإن تقارن هذا التقسيم هو التقسيم الأصلي من B. أعطينا للتو برهاناً تقابلياً للمبرهنة التالية.

المبرهنة 4.4.1: لأي أعداد صحيحة موجبة kو n، فإن (أكبر جزء $P(n,k$.

تقودنا الحقيقة 4 أعلاه أيضاً إلى مبرهنة توافقية شبيهة بتلك التي سنستفيد منها عندما نشتق بعض النتائج الجبرية.

المبرهنة 4.4.2: لأي $n,k \geq 1$، فإن $P\left(n,\text{على الأكثر } k \text{ أجزاء}\right) = P\left(n,\text{على الأكثر } k \text{ أكبر جزء}\right)$

السؤال 173: أعطِ برهاناً لهذه المبرهنة باستخدام التقارن.

تقسيمات التقارن على نفسه

التقسيم هو تقارن على نفسه مع العلم أن تقارنه يساوي نفسه. من الأمثلة على تقسيم تقارن على نفسه ما يلي: 3+3+3 و7+4+4+2+2+1+1+1+1 و1. النتيجة التالية تفيد بأن تقسيمات التقارن على نفسه من المجموعة n هي ارتباطات واحد – لواحد مع التقسيمات على n إلى أجزاء فردية متميزة.

تساعدنا مخططات فيرير على فهم السبب. خذ التقسيم 3+3+3 من المجموعة 9:



الآن، أزل طبقة واحدة من هذا الشكل بحذف النقاط في الصف الأول والعمود الأول، وعددها خمسة. ما يتبقى هو تقسيم التقارن على نفسه 2+2، ومنه يمكننا إزالة النقاط (3 منها) من الصف الأول والعمود الأول. ومن ثم يتبقى تقسيم التقارن على نفسه 1، وهذا من السهل إزالته. بهذه الطريقة، أنشأنا التقسيم 5+3+1

والذي يتكون من أجزاء مفردة متميزة. يبين المخطط التالي الترابط باستخدام رموز مختلفة لكل طبقة غير مزالة:

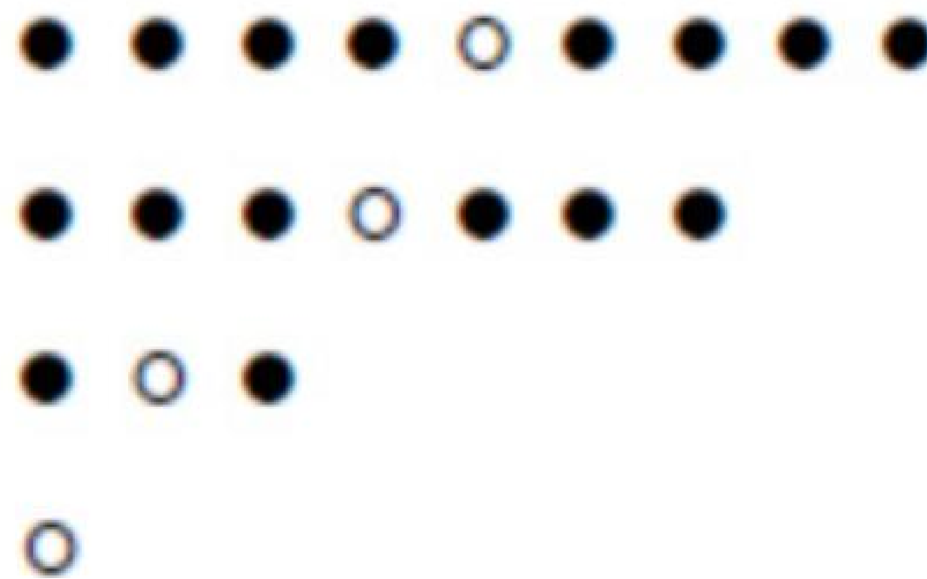


السؤال 174: من خلال عملية الإزالة، بأي تقسيم يرتبط تقسيم التقارن على نفسه 7+4+2+2+1+1+1+1؟ هل تتضمن أجزاء فردية متميزة؟

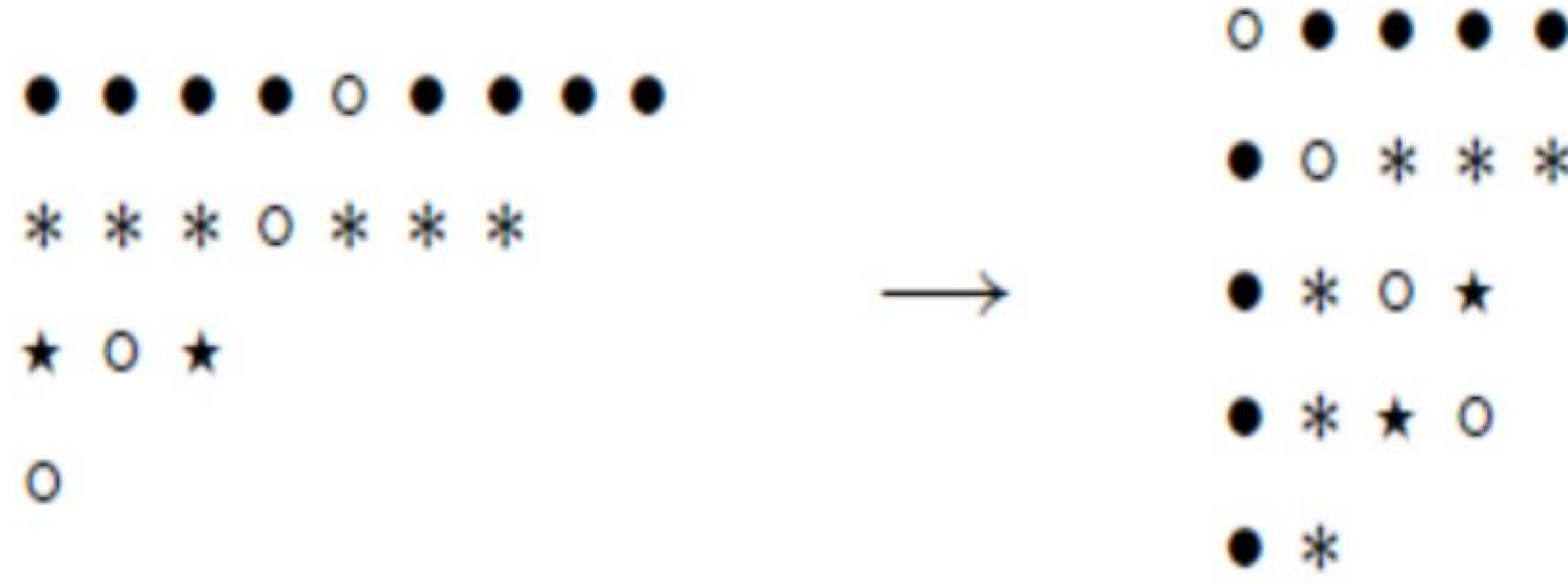
تحوّل هذه العملية دائماً تقسيم التقارن على نفسه إلى تقسيم ذي أجزاء فردية متميزة.

السؤال 175: فسّر سبب حدوث ذلك بشكلٍ عام.

العملية العكسية تحوّل تقسيماً ذا أجزاء فردية متميزة إلى تقسيم تقارن على نفسه بالتأكيد. لتوضيح العملية العكسية، ابدأ بمخطط فيرير لتقسيم ذي أجزاء فردية متميزة وحدد النقطة المركزية في كل صف. على سبيل المثال مراكز التقسيم 9+7+3+1 محددة بالدائرة المفرغة في المخطط التالي:



الآن، احنِ كل صف حول مركزه واستخدم شكل حرف L بحيث ينتج تقسيم تقارن على نفسه كما يلي:



السؤال 176: بشكلٍ عام، لماذا يجب أن يكون هناك نقطة مركزية في كل صف في مثل هذه التقسيمات؟ لماذا يكون التقسيم الناتج تقارن على نفسه؟

هذه الأفكار تبرهن المبرهنة:

المبرهنة 4.4.3: لـ

$n \geq 1$، $P(n,$ أجزاء فردية مختلفة$) = P\left(n,\text{ تقارن على نفسه}\right)$.

الدوال المولّدة

أُعطي الدالة المولدة البسيطة لأعداد التقسيم $P(n)$ في بداية هذا القسم. بإيقاف حاصل الضرب اللامتناهي عند عدد صحيح موجب k، نحصل على الدالة المولد البسيط لعدد التقسيمات على n حيث أكثر جزء هو k على الأكثر. لكن، حسب المبرهنة 4.4.2، هذا يعني أننا نجد الدالة المولدة البسيطة لعدد التقسيمات على n ذات الأجزاء k على الأكثر. بمعنى آخر:

$$\sum_{n\geq 0} P\left(n, \text{على الأكثر } k \text{ أجزاء}\right) = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-x^j}$$

الآن، للحصول على الدالة المولدة البسيطة لـ $P(n,k)$، يمكننا استخدام متطابقة واضحة ضمناً

$$P(n,k) = P\left(n, \text{على الأكثر } k \text{ أجزاء}\right) - P\left(n, \text{على الأكثر } k-1 \text{ أجزاء}\right)$$

ونطرح الدوال المولّدة البسيطة المرتبطة. لدينا:

$$\frac{1}{(1-x)\dots(1-x^{k-1})(1-x^k)} - \frac{1}{(1-x)\dots(1-x^{k-1})}$$

$$= \frac{1}{(1-x)\dots(1-x^{k-1})(1-x^k)} - \frac{1-x^k}{(1-x)\dots(1-x^{k-1})(1-x^k)}$$

$$= \frac{1-(1-x^k)}{(1-x)\dots(1-x^{k-1})(1-x^k)}$$

$$= \frac{x^k}{(1-x)\dots(1-x^{k-1})(1-x^k)}$$

المبرهنة 4.4.4: لأي $k \geq 1$، فإن الدالة المولدة البسيطة للتسلسل $\{P(n,k)\}_{n\geq 0}$ يساوي

$$\frac{x^k}{(1-x)\dots(1-x^2)(1-x^k)} = \prod_{j=1}^{k} \frac{x}{1-x^j}$$

قارن هذا بالمبرهنة 4.3.1. سيكون التشابه مدهشاً!

صيغ لأعداد التقسيم

لدينا صيغ منطقية مغلقة لدوال العدّ التي قدّمناها في الفصل الثاني كافة باستثناء أعداد تقسيم العدد الصحيح. هل من الممكن إيجاد صيغ لـ $P(n, k)$ و $P(n)$؟ نعم ولا.

من الممكن إيجاد صيغة لـ $P(n)$، لكن هذا خارج نطاق هذا النص.

أما صيغ لـ $P(n, 2)$ و $P(n, 1)$و$P(n, 3)$ وهكذا فهي ممكنة لكن الصعوبة تزيد بزيادة عدد الأجزاء.

نحن نعلم مسبقاً أن $P(n, 1) = 1$ وأن $P(n, 2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

السؤال 177: برّر صيغة $P(n, 2)$

المبرهنة التالية، والتي نكرّس ما تبقى من هذا القسم لبرهنتها، تعطي صيغة لـ $P(n, 3)$. يشير الترميز $\{x\}$ إلى أقرب عدد صحيح لـ x.

المبرهنة 4.4.5: لأي $n \geq 0$ فإن $P(n, 3)$ تساوي أقرب عدد صحيح لـ $\frac{n^2}{12}$.

أي أن $P(n, 3) = \left\{\frac{n^2}{12}\right\}$.

إن استراتيجيتنا للبرهان هي الحصول أولاً على صيغة لـ $P(n,$ أجزاء على الأكثر $3)$ ومن ثمّ تطبيق المعادلة (4.15)، تحديداً:

$$P(n, 3) = P\left(n - 3, \text{أجزاء على الأكثر } 3\right)$$

هذه رحلة ممتعة.

نبدأ باستخدام المبرهنة 4.4.2 لكتابة

$$P\left(m, \text{أكبر جزء على الأكثر } 3\right) = P\left(m, \text{أجزاء على الأكثر } 3\right)$$

وعليه فإن الدالة المولدة البسيطة للتقسيمات من m التي تتكون من 3 أجزاء على الأكثر هي:

(4.16)

$$\sum_{m\geq 0} P(m, \text{أجزاء على الأكثر } 3)x^m = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

لإيجاد معامل x^m في التعبير الواقع في الطرف الأيمن، نحلل المقام تحضيراً لإيجاد التحليل الكسري الجزئي:

$$1-x^2 = (1-x)(1+x)$$
$$1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$$

الصيغة التربيعية $1+x+x^2$ غير قابلة للاختزال على الأعداد الحقيقية – لا يمكن تحليلها أكثر من ذلك. ثمة خياران اثنان:

الخيار الأول هو استخدام التحليل الكسري الجزئي العادي؛ يتطلب التمرين 5 اتخاذ هذا المسار. الخيار الثاني يبدو أوضح لكن يبدو من الوهلة الأولى أنه يتطلب بعض الحظ. غير شكل التحليل الكسري الجزئي قليلاً، واستخدم بدلاً منه:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{A}{(1-x)^3} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-x^3} + \frac{D}{1-x^2} \quad (4.17)$$

بما أن التحليل على الطرف الأيمن لا يشمل الحدود المطلوبة في التحليل الكسري الجزئي كافة، فإننا يجب أن نتوقع عدم وجود ضمان أن القيم B و A و C و D موجودة بحيث تتحقق صحة المعادلة. لكن إن وجدت هذه القيم فسيكون من السهل استخراج معامل x^m، وهنا تكمن الأهمية.

ينتج عن تبسيط القواسم في المعادلة (4.17) ما يلي:

$$\begin{aligned}1 = A(1+x)(1+x+x^2) + B(1+x)(1-x^3) \\ + C(1-x)(1-x^2) + D(1-x)(1-x^3)\end{aligned}$$

والحل هو: $A = 1/6\,, B = D = 1/4\,, C = 1/3$

السؤال 178: نفّذ العمليات الجبرية التي تبين أن هذا هو الحل:

أوجدنا التحليل التالي:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{1/6}{(1-x)^3} + \frac{1/4}{(1-x)^2} + \frac{1/3}{1-x^3} + \frac{1/4}{1-x^2}$$

استبدل كل حد في الطرف الأيمن بمتسلسلة لا متناهية تبين أننا نبحث عن معامل x^m في

$$\frac{1}{6}\sum_{m\geq 0}\left(\!\binom{3}{m}\!\right) x^m + \frac{1}{4}\sum_{m\geq 0}\left(\!\binom{2}{m}\!\right) x^m + \frac{1}{3}\sum_{m\geq 0} x^{3m} + \frac{1}{4}\sum_{m\geq 0} x^{2m}$$

فيكون المعامل، وبالتالي الصيغة لـ $P(m,$ 3 أجزاء على الأكثر)، ما يلي:

$$\frac{1}{6}\left(\!\binom{3}{m}\!\right) + \frac{1}{4}\left(\!\binom{2}{m}\!\right) + [either\ \ 1/3\ or\ 0] + [either\ \ 1/4\ or\ 0]$$

هذا مقبول هامشياً كصيغة، بسبب حالة عدم التأكد في البندين الأخيرين. لكن بإجراء المزيد من العمليات الجبرية القليلة يمكن تبريرها. ابدأ بتبسيط أول بندين:

$$\frac{1}{6}\left(\binom{3}{m}\right)+\frac{1}{4}\left(\binom{2}{m}\right)=\cdots=\frac{(m+3)^2}{12}=\frac{1}{3}$$

السؤال 179: تحقق من هذا.

الآن، معامل x^m في الدالة المولّدة البسيطة هو:

$$\frac{(m+3)^2}{12}-\frac{1}{3}+[either\ \ 1/3\ or\ 0]+[either\ \ 1/4\ or\ 0]$$

بعد الاحتمالات الأربعة، نتعلم أن مجموع الحدود باستثناء الحد الأول تأخذ فقط إحدى القيم الأربع الممكنة:

$$-\frac{1}{3}+0+0=-\frac{1}{3}$$
$$-\frac{1}{3}+0+\frac{1}{4}=-\frac{1}{12}$$
$$-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+0=0$$
$$-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

لكن كل رقم من هذه الأرقام، بقيمته المطلقة، أقل من $\frac{1}{2}$. وعليه فإننا نستطيع الاستنتاج أن $P(m,$ 3 أجزاء على الأكثر$)$ تساوي أقرب عدد صحيح على $\frac{(m+3)^2}{12}$.

وهذا يعني أن

$$P\left(m,\ \text{3 أجزاء على الأكثر}\right)=\left\{\frac{(m+3)^2}{12}\right\}$$

للحصول على النتيجة، طبق هذه المعادلة عندما $m=n-3$:

$$P(n,3) = P\left(n, \text{أجزاء على الأكثر } 3\right) = \left\{\frac{((n-3)+3)^2}{12}\right\} = \left\{\frac{n^2}{12}\right\}$$

وهذا يكمل برهان المبرهنة 4.4.5.

تقريب مقارب لـ $P(n,k)$

أساسياً، ينطبق نفس التقارب عند إيجاد صيغ لـ $P(n,4)$، لكن الالتواء المضمّن يصبح أكثر تعقيداً عند كل خطوة. وهذا يشير إلى أن شمول جميع الصيغ المطابقة لـ $P(n,k)$ لن يكون سهلاً.

لنخفض من معاييرنا قليلاً، وبدلاً من ذلك نبحث عن تقريب لـ $P(n,k)$ لقيمة k ثابتة. نوع التقريب الذي سنبحث عنه مهم في الرياضيات: التقريب المقارب (Asymptotic Approximation). التقريبات المقاربة مفيدة؛ وفي بعض الحالات تكون أكثر فائدة من الصيغ الدقيقة.

بإعطاء دالتين $g(n)$ و $f(n)$، يمكننا القول إن f مكافئ مقارب (Asymptotic Equivalent) للدالة g إذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

يشير الترمز $f(n) \sim g(n)$ إلى تكافؤ مقارب (Asymptotic Equivalence). وهذه علاقة تكافؤ. طالع التمرين 7(أ).

السؤال 180: بيّن أن $f(n) = 4n^3 - 100n + 12$ و $g(n) = 19 + 20n - 21n^2 + 4n^3$ مكافئين متقاربين.

إذن، نبحث عن دالة مألوفة (Familiar Function) (مثلاً دالة كثيرة الحدود أو دالة أسّية) تكون مكافئة مقاربة لـ $P(n,k)$ بين الحدود الدنيا والعليا.

$$\frac{\left(\binom{k}{n-k}\right)}{k!} \le P(n,k) \le \frac{\left(\binom{k}{n+\binom{k}{2}-k}\right)}{k!}$$

يمكننا برهنة هذه الحدود بالتوافيق. ثم نبين أن كلاً من الحد الأدنى والحد الأعلى مكافئين مقاربين لـ $\frac{n^k}{k!(k-1)!}$. وهذا بالتالي يفرض أن تكون $P(n,k)$ مكافئ مقارب لهذا الدالة أيضاً.

تعتمد براهين الحدود العليا والدنيا على التفكير باستخدام تقسيم كحلٍّ لنظام محدد. ثمة طريقة أخرى للتفكير بتقسيم على n إلى k من الأجزاء وهي قائمة مكونة من k عنصر $(z_1, z_2, \dots, z_k)$ تحقق ما يلي:

(4.18)

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_k = n$$
$$z_1 \ge z_2 \ge \cdots \ge z_k \ge 1$$

الشرط الثاني يجعل الأجزاء ذات ترتيب غير متزايد. وهذا يؤكّد أننا لا نعتبر أن، لنقل، $1 + 4 + 2$ و $1 + 2 + 4$، أو بدلاً من ذلك (4,2,1) و(2,4,1) هي تقسيمات مختلفة.

لكن إذا أسقطنا الشرط الثاني وأخذنا بدلاً منه قوائم مكونة من k عنصر $(z_1, z_2, \dots, z_k)$ تحقق ما يلي:

(4.19)

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_k = n$$

$$z_i \text{ جميع قيم } \geq 1$$

إذن يوجد $\left(\binom{k}{n-k}\right)$ قائمة. وقد ناقشنا هذا في القسم 2.2.

السؤال 181: كم حلاً يوجد للأسئلة 4.18 و4.19 عندما نكون كلاً من $n = 8$ و$k = 4$؟

حد أدنى لـ $P(n,k)$

لنحاول عد الحلول المتوفرة لنظام "أكبر" (4.19)، بحيث نبدأ أولاً بحلول النظام "الأصغر" (4.18). تستخدم التعبيرات "أكبر" و"أصغر" للإشارة إلى حقيقة أن كل حل لـ 4.18 هو حل لـ 4.19، لكن العكس ليس صحيحاً.

لنفترض أن $n = 7$ و$k = 3$. يوجد $\left(\binom{3}{7-3}\right)$ حلاً للنظام الأكبر و$P(7,3)$ حلاً للأصغر. خذ أي تقسيم من 7 إلى ثلاثة أجزاء، لنقل 4+2+1 أو (4,2,1). يمكننا إجراء تباديل لهذه القائمة ثلاثية العناصر بـ 3! طريقة لإنشاء حلول مختلفة للنظام الأكبر 4.19، وتحديداً

(1,2,4) (1,4,2) (2,1,4) (2,4,1) (4,1,2) (4,2,1)

لكن إذا بدأنا بتقسيم لا يوجد فيه أجزاء واضحة فإننا سننشئ حلولاً عددها أقل من $3!$. إذا اخترنا (3,2,2) فإن ذلك يقودنا إلى ثلاثة حلول مختلفة فقط:

$$(3,3,2)\ (3,2,3)\ (2,3,3)$$

فمهما يكن: إذن $3!\cdot P(7,3)$ تكون تقديراً زائداً للحلول التي عددها $\left(\!\binom{3}{7-3}\!\right)$ للنظام الأكبر. هذا يوضح أن $3!\cdot P(7,3) \geq \left(\!\binom{3}{7-3}\!\right)$ أو

$$P(7,3) \geq \frac{\left(\!\binom{3}{7-3}\!\right)}{3!}$$

بالتعميم، هذا يثبت الحد الأدنى على $P(n,k)$.

المبرهنة 4.4.6: لأي $n,k \geq 1$ فإن $P(n,k) \geq \frac{\left(\!\binom{k}{n-k}\!\right)}{k!}$.

السؤال 182: استخدم المبرهنة لإيجاد الحدود الدنيا على $P(n,3)$ و $P(n,2)$ كدالة على n.

حد أعلى لـ $P(n,k)$

الآن دعنا نحاول استخدام حلول النظام الأصغر 4.18 بطريقة مختلفة. مرة أخرى، افترض أن $n = 7$ و$k = 3$. فيما يلي التقسيمات الـ $P(7,3) = 4$ على 7 إلى 3 أجزاء، مكتوبة كحلول للنظام الأصغر:

$$(5,1,1)\ (4,2,1)\ (3,3,1)\ (3,2,2)$$

نجحت استراتيجيتنا في الحصول على الحد الأدنى لأننا أفرطنا في عدّ حلول النظام الأكبر 4.19. العدّ الأقل لابدّ أن يقودنا إلى حدّ أعلى.

حوّل الحلول الأربعة أعلاه بحيث يكون لجميعها أجزاء مختلفة وذلك بإضافة 2 للجزء الأول، وإضافة 1 للجزء الثاني، وإضافة 0 للجزء الثالث:

(7,2,1) (6,3,1) (5,4,1) (5,3,1)

الآن كل واحد هو تقسيم من $10 = (0 + 1 + 2) + 7$ إلى ثلاثة أجزاء متميزة. ثم نجري تبديلاً بإحدى الطرق الـ !3 كالسابق. هذه المرة، ننشئ حلولاً مختلفة عددها $P(7,3) \cdot 3! = 24$ لـ

$$z_1 + z_2 + z_3 = 10$$
$$z_i \geq 1 \text{ جميع}$$

لكن يوجد حلول أكثر من مجرد 24 التي أنشأناها، تحديداً تلك الشبيهة بـ (4,4,2) والتي يتكرر فيها أحد العناصر على الأقل. إذن فقد قدّرنا أقل عدد من الحلول لهذا النظام ووجدنا أن $P(7,3) \cdot 3! \leq \left(\binom{3}{10-3}\right)$ أو

$$P(7,3) \leq \frac{\left(\binom{3}{10-3}\right)}{3!}$$

بشكلٍ عام، خذ تقسيماً من n إلى k أجزاء، لنقل $(z_1, z_2, \dots, z_k)$ وحوّلها إلى تقسيم ذي أجزاء متميزة

(4.20)
$$(z_1 + (k-1), z_2 + (k-2), \dots, z_{k-1} + 1, z_k + 0)$$

السؤال 183: فسّر سبب هذا التقسيم الذي يجب أن يكون له أجزاء متميزة، حتى لو أن التقسيم الأصلي $(z_1, z_2, \dots, z_k)$ قد لا يكون له أجزاء.

بإجراء التحويل المبيّن في (4.20)، أضفنا ما مجموعه

$$1 + 2 + \cdots + (k-2) + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2} = \binom{k}{2}$$

للتقسيم الأصلي من n، إذن فهذا الآن تقسيم من $n + \binom{k}{2}$ إلى أجزاء متميزة عددها k. إذا أجرينا تبديلاً لعناصر هذا التقسيم بطرق عددها $k!$، نكون قد أنشأنا $P(n,k) \cdot k!$ حلاً مختلفة إلى

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_k = n + \binom{k}{2}$$

$$z_i \geq 1 \text{ جميع}$$

لكن من المحتمل وجود حلول أكثر طالما أن الحلول التي أنشأناها لا تتضمن تلك الحلول التي فيها عناصر مكررة. وعليه فإن $P(n,k) \cdot k!$ هو حدّ أدنى لعدد الحلول الإجمالي:

$$P(n,k) \cdot k! \leq \left(\!\!\binom{k}{n + \binom{k}{2} - k}\!\!\right)$$

لدينا الآن الحدّ العلوي لـ $P(n,k)$.

المبرهنة 4.4.7: لأي $n, k \geq 1$ فإن $P(n,k) \leq \frac{\left(\!\binom{k}{n+\binom{k}{2}-k}\!\right)}{k!}$.

السؤال 184: استخدم المبرهنة لإيجاد الحدود العليا على $P(n,3)$ و $P(n,2)$ كدالة على n.

الضغط

نحن نعلم أن $\left(\!\binom{k}{n-k}\!\right) = \binom{n-1}{k-1}$ وأن $\left(\!\binom{k}{n+\binom{k}{2}-k}\!\right) = \left(\!\binom{n+\binom{k}{2}-1}{k-1}\!\right)$.

السؤال 185: تحقق من ذلك.

الحد يبدو الآن كما يلي:

$$\frac{\binom{n-1}{k-1}}{k!} \leq P(n,k) \leq \frac{\binom{n+\binom{k}{2}-1}{k-1}}{k!}$$

لنبدأ ببيان أن الحدود الدنيا والعليا تكافؤ تقاربي. يمكن رؤية ذلك بسهولة أكبر في سياق مثال. بما أننا نحافظ على بقاء قيمة k ثابتة، لنختر قيمة محددة لـ k، لنقل $k = 4$. الآن الحد الأدنى كدالة لـ n يساوي

$$\frac{\binom{n-1}{4-1}}{4!} = \frac{\binom{n-1}{3}}{4!} = \frac{(n-1)_3}{4!\,3!}$$

والحدّ العلوي يساوي:

$$\frac{\binom{n+\binom{4}{2}1}{4-1}}{4!} = \frac{\binom{n+5}{3}}{4!} = \frac{(n+5)_3}{4!\,3!}$$

الآن لنأخذ نسبها:

$$\frac{(n-1)_3}{4!\,3!} \Big/ \frac{(n+5)_3}{4!\,3!} = \frac{(n-1)_3}{(n+5)_3} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+5)(n+4)(n+3)}$$

بما أن $n \to \infty$ فهذا يقارب 1 بسبب خدعة حسابية: إن كلاً من البسط والمقام عبارة عن كثيرات حدود تكعيبية للصيغة [الحدود الأقل ترتيباً] + n^3، وعليه فإن الحد الشبيه بـ $n \to \infty$ يساوي نسبة معاملاته البادئة وهي تساوي 1.

إذن في هذه الحالة ($k = 4$) الحدود العليا والدنيا هي مكافئ تقاربي، لكن لأي دالة؟ نحن ندّعي أنه مكافئ تقاربي لـ$\frac{n^3}{4!3!}$. وهذا لأن:

$$\frac{\binom{n-1}{4-1}}{4!} \Big/ \frac{n^3}{4!\,3!} = \frac{(n-1)_3}{4!\,3!} \Big/ \frac{n^3}{4!\,3!} = \frac{(n-1)_3}{n^3} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}$$

ويساوي 1 مرة أخرى نظراً لأن $n \to \infty$. الآن، بما أن الحدين الأعلى والأدنى مكافيء متقارب لـ $\frac{n^3}{4!3!} = \frac{n^3}{144}$ وبما أن $P(n,4)$ مضغوط بينهما لجميع قيم n، فإنه

$$P(n,4) \sim \frac{n^3}{144}$$

تتطلب الخطوة الأخيرة برهاناً حتى لو بدت بديهية. طالع التمرين 7(ب).

إن التباديل على k عموماً متماثلة على نحو كبير. والهدف هو بيان أن كلا الحدود العليا والدنيا مكافئ تقاربي لـ$\frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}$. تطلب التمارين منك ملء التفاصيل.

المبرهنة 4.4.8، إذا كان $k > 0$ ثابتاً، فإن $P(n,k)$ مكافئ تقاربي لـ $\frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}$ كدالة لـ n.

من الجدير بالملاحظة أنه لقيم k الثابتة، فإن $P(n,k)$ تتزايد لدالة كثيرة الحدود لـ n.

السؤال 186: ما درجة قرب التقريب التقاربي من الصيغة المحددة لـ $P(n,1)$، $P(n,2)$، $P(n,3)$؟

ملخص

تعطي مخططات فيرير إلهاماً للبراهين التقابلية لتطابقات التقسيمات. من حيث صيغ $P(n,k)$، فإننا نعلم أن

$$P(n,1) = 1 \qquad P(n,2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \qquad P(n,3) = \left\{ \frac{n^2}{12} \right\}$$

حيث $\{\cdot\}$ ترمز إلى أقرب عدد صحيح إلى المعامل. ثمة صيغ أخرى لـ $P(n,k)$ و$P(n)$ لكنها تتطلب طرقاً متقدمة. لـ k الثابتة، فإن التقريب المقارب لـ $P(n,k)$ يكون

$$P(n,k) \sim \frac{n^{k-1}}{k!\,(k-1)!}$$

تمارين:

1. ما هو تقارن التقسيم $(n-k)+k$ من المجموعة n ، حيث $n \geq 2$ و $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$؟

2. لتكن $z_1 + z_2 + \cdots + z_k$ تقسيماً للمجموعة n إلى k جزء، حيث $z_1 \geq z_2 \geq \cdots \geq z_k$. بيّن كيف نحسب التقارن لهذا التقسيم باستخدام z_i فقط وبدون الرجوع إلى مخططات فيرير .

3. افترض أن $P(n)$، إجمالي عدد التقسيمات لعدد صحيح معطى n، عدد فردي. برهن صحة أو خطأ: أحد هذه التقسيمات على الأقل هو تقارن على نفسه.

4. جد صيغة لـ $P(n,2)$ باستخدام التقنية التي استخدمناها لـ $P(n,3)$. ابدأ بإيجاد تحليل الكسر الجزئي للدالة المولدة البسيطة لـ $P(n,$ جزئين على الأكثر$)$:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1+x}$$

ستبدو إجابتك النهائية مختلفة عن الصيغة $P(n,2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ التي نعرفها مسبقاً.

5. فيما يلي طريقة بديلة للحصول على صيغة $P(n,3)$.

(أ) جد r_1 و r_2 بحيث يكون $1 + x + x^2 = (1 - r_1x)(1 - r_2x)$.

(ب) جد A حتى F التي تحدد تحليل الكسر الجزئي للدالة المولدة البسيطة لـ $P(m,$ 3 أجزاء على الأكثر$)$:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3} + \frac{D}{1+x} + \frac{E}{1-r_1x} + \frac{F}{1-r_2x}$$

(جـ) جد معامل x^m وبرهن أن $P\left(m,\right.$ 3 أجزاء على الأكثر$\left.\right) = \left\{\frac{(m+3)^2}{12}\right\}$

6. حدد عدداً صحيحاً $t \geq 0$. برهن أنه إذا كانت $n \to \infty$ فإن قيمة $P(n, n-t)$ تصبح ثابتة. ما هي قيمة هذا الثابت، وعند أي قيمة لـ n يحدث هذا؟

7. استخدمنا الخصائص التالية للتكافؤ المقارب في هذا القسم. افترض أن الدوال كافة ذات قيم موجبة.

(أ) برهن أن العلاقة "ذات التكافؤ المقارب لـ" هي علاقة تكافؤ. (هذه مراجعة جيدة لخصائص الحدود).

(ب) برهن: إذا كان $f(n) \leq g(n) \leq h(n)$ لجميع قيم n وإذا كان $f \sim h$ فإن $f \sim g$.

8. أعطِ برهاناً توافقياً: لأي $n > 0$، فإن $nP(n) = \sum_{j=1}^{n} P(n-j)\sigma(j)$. هنا $\sigma(j)$ تعرّف على أنها مجموع قواسم j.

9. يُعنى هذا التمرين بالحد الأعلى لـ $P(n)$. تذكر بأننا عرّفنا $P(0) := 1$.

(أ) برهن أن $P(n) \le P(n-1) + P(n-2)$ لـ $n \ge 2$.

(ب) استخدم الفرع (أ) من السؤال لبرهنة أن $P(n) \le F_n$ لـ $n \ge 0$، حيث F_n هو عدد فيبوناتشي ذو الترتيب n.

ملاحظات سريعة

يعتبر كتاب أندروز وإيركسون (Andrews & Eriksson) (2004) مقدمة ممتازة للحالة الحالية لتقسيمات الأعداد الصحيحة. من بين الأمور الأخرى، يناقش الكتاب أيضاً صيغ $P(n,5)$ و $P(n,4)$. كما يعطي أمثلة عديدة على براهين متطابقات التجزئات باستخدام التقابل وأشكال فيريرز.

إن دراسة تقسيمات العدد الصحيح هي إحدى أكثر المجالات التي تتقاطع فيها التوافيق مع نظرية الأعداد. إن صيغة $P(n)$ التي بدأت عام 1918 من خلال أعمال

هاردي ورامانوجان (Hardy & Ramanujan) وتوجت بعمل رادي‌ماتشير (Rademacher) ما هي إلا نتيجة لنظرية تحليل الأعداد والتحليل المتقدم.

الفصل الخامس

حساب التكافؤ الناقص

من المحتمل أن تكون قد شاهدت نماذج الكرة والعصا للتركيبات الجزيئية الخاصة بالمركبات الكيميائية حيث تمثل كل كرة ذرة معينة وتمثل كل عصا رابطة كيميائية معينة بين الذرات. في ثلاثينيات القرن الماضي، قام الرياضياتي الهنغاري جورج بوليا بتسليط الضوء على مسألة تعداد متصاوغات (Isomers) المركب الكيميائي، وقد قام بحلها، وكانت النتيجة الأساسية للحل هي التوصل إلى طريقة قوية عامة ومفيدة تم تطبيقها في مجالات عدة، منذ ذلك الوقت، لحل الكثير من مسائل العدّ الأخرى وتدعى بـ "مبرهنة بوليا للتعداد".

تضمنت مسألة بوليا حساب التكافؤ الناقص (Counting Under Equivalence). وفي مثل هذه المسألة يكون الهدف هو عد فئات التكافؤ لعلاقة تكافؤ. يتم تطبيق مبدأ التكافؤ الوارد في القسم 14. عندما تكون جميع فئات التكافؤ ذات نفس الطول. ولكن إنشاء مبدأ عام لمعالجة الحالات التي لا تكون فيها فئات

التكافؤ بنفس الطول يتطلب استخدام بعض رياضيات الجبر المجرد (وتحديداً مبرهنة المجموعات) لإجراء التعديلات الضرورية؛ وهذا يقودنا إلى الصيغة المعروفة بمبرهنة كوتشي – فروبينيوس – بيرنسايد (Cauchy-Frobenius-Burnside) التي تبدو كصيغة مبدأ التكافؤ إلى حدٍّ ما، وهنا أضاف بوليا دوال التوليد إلى تلك النتيجة متوصلاً إلى مبرهنته.

يستطيع القارئ المطلع على مبرهنة المجموعات الأساسية والمدارات ومجموعات التماثل والمجموعات الثنائية والدورية، أن يتصفح سريعاً القسمين 52. و 53. إلى أن يصل إلى مبرهنة كوتشي- فروبينيوس – بيرنسايد في القسم 53.، ولكن القسم 51. يعتبر أساسياً لاحتوائه على مثالين سنتطرق لهما في أقسام هذا الفصل.

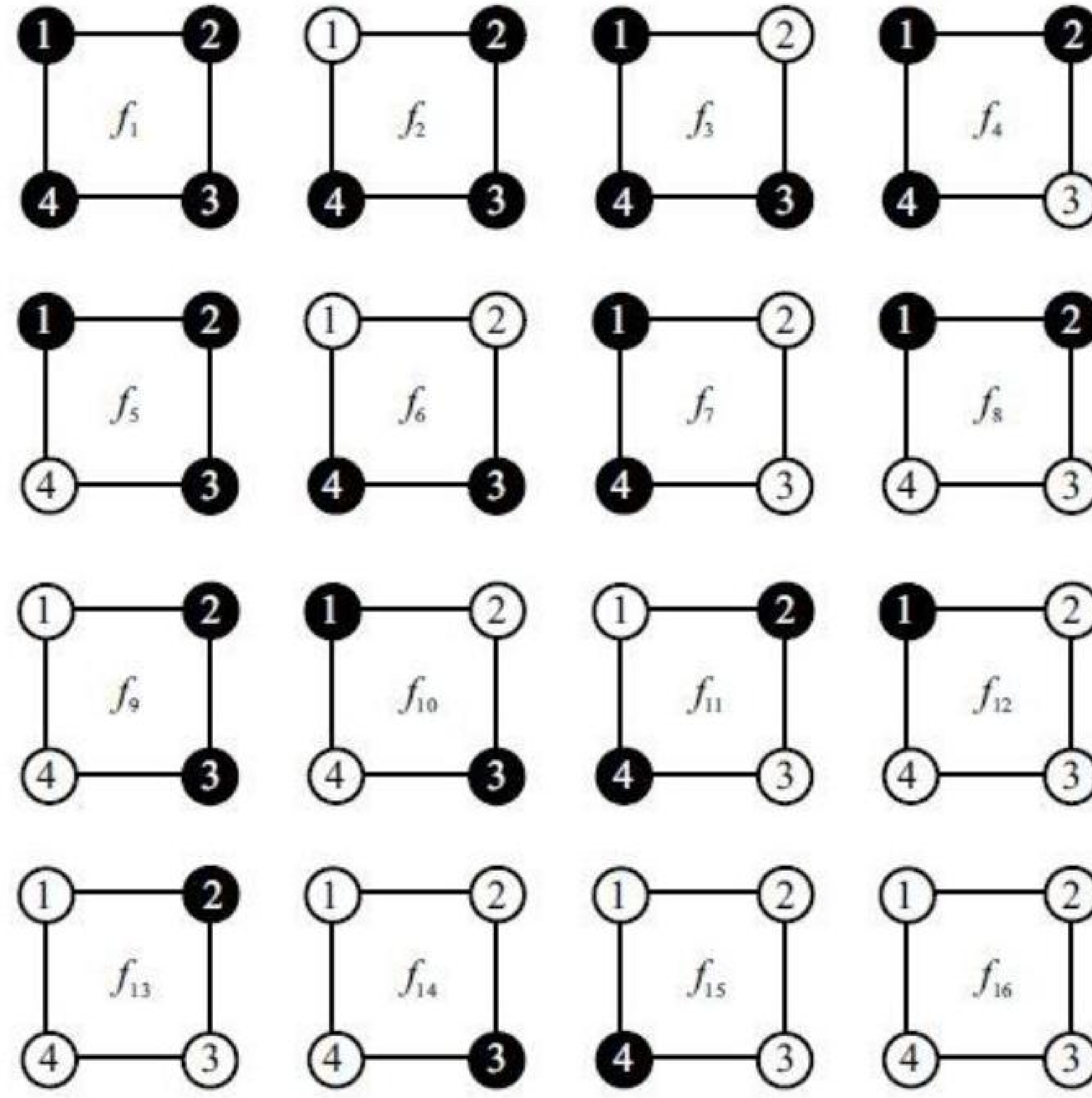
مثالان 51.

سنعرض في هذا القسم الموجز مثالين سنقوم باستخدامهما في توضيح أغلب المفاهيم الواردة في هذا الفصل. يستخدم المثال الأول من قبل مؤلفين كُثُر والسبب في ذلك يعد سبباً جيداً، وهو أن هذا المثال يتعمق بما يكفي في المسائل العامة التي سنقوم بدراستها مع بقائه ضمن الحجم المعقول.

تلوين المربع

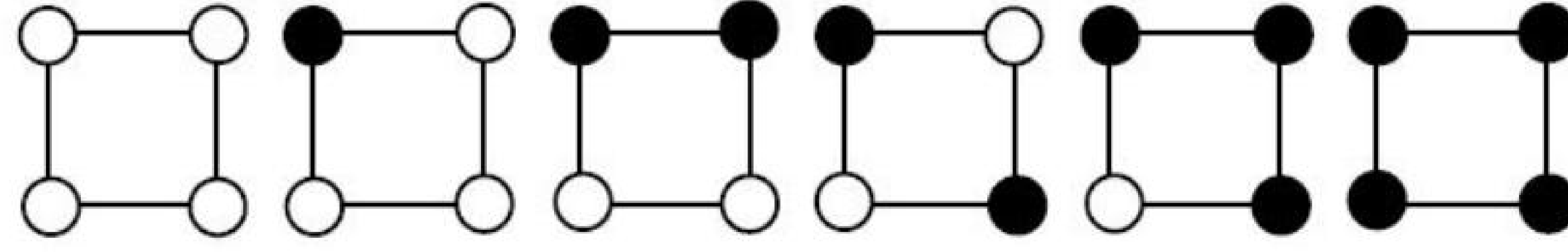
بكم طريقة مختلفة يمكننا تركيب مربع باستخدام أربع عصي متماثلة وأربع كرات بلاستيكية حيث تحمل كل كرة اللون الأبيض أو الأسود؟

تدعى هذه التركيبات بـ **تلوينات (Colourings)** زوايا المربع. إذا تعاملنا مع المربع كشيء ثابت (افترض أنه مثبت على جدار)، فإن أي دالة هي اقتران f: [4] ← {أبيض، أسود} بين مجموعة الزوايا (التي نستطيع ترقيمها من 1 إلى 4) ومجموعة الألوان الممكنة. هنالك $2^4 = 16$ تلويناً ممكناً ويوضح الشكل 15. هذه الدوال الست عشرة مرقمة كـ $f_1, f_2, \dots, f_{16}$.



الشكل 5.1. الستة عشر تلويناً من الأبيض والأسود للزوايا المرقمة في مربع.

لكن إذا تعاملنا مع المربع كشيء قابل للحركة بحرية في الفراغ (افترض أنه دمية يمكن تحريكها)، فإن العديد من التلوينات الستة عشر تكون متكافئة؛ وباستخدام هذا المفهوم عن التكافؤ فإن هنالك ستة تلوينات مختلفة فقط:



لاحظ أن الأرقام لم تعد تظهر على الزوايا، وذلك لأن علاقة التكافؤ المتضمنة يجب أن تأخذ في الحسبان حقيقة أن دوران أو تقليب المربع لا يغير تلوينه حيث تعتمد تلك العمليات على المربع نفسه وليس على التلوينات وهي تدعى بـ **تماثلات المربع** (Symmetries of the Square).

يعتبر كل من التلوينات الستة المذكورة أعلاه ممثلاً عن فئة تكافؤ مختلفة، ومن المهم ملاحظة أن فئات التكافؤ جميعها ليست بنفس الطول؛ فعلى سبيل المثال، $\{f_2, f_3, f_4, f_5\}$ هي فئة التكافؤ التي تحتوي على f_2، في حين $\{f_{10}, f_{11}\}$ هي فئة التكافؤ التي تحتوي على f_{10}.

السؤال 187: ما هي أطوال فئات التكافؤ الأربع الأخرى؟

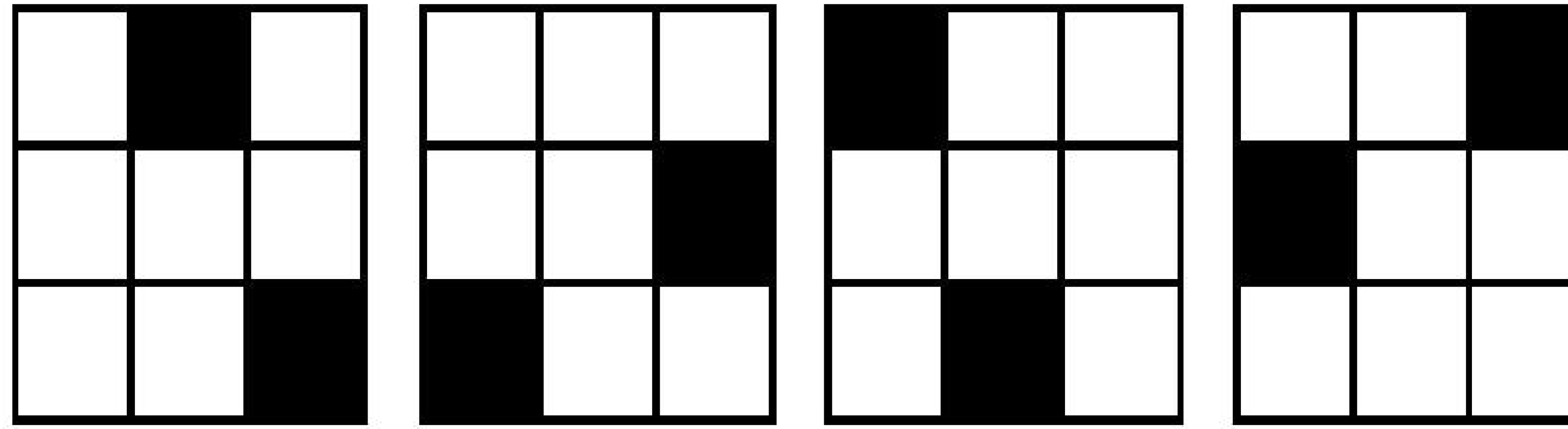
تفتح هذه المسألة الباب للعديد من التعاميم البسيطة، فبدلاً من المربع، نستطيع أن نسأل السؤال ذاته لمضلع خماسي أو سداسي أو أي مضلع يتكون من n ضلع، ونستطيع أيضاً أن نسأل عن عدد التلوينات التي تستخدم عدداً محدداً من الألوان لكل نوع. على سبيل المثال، يوجد تلوين واحد للمربع يستخدم اللونين الأبيض والأسود بحيث يحتوي على زاوية بيضاء واحدة وثلاث زوايا سوداء. ستسمح لنا المبرهنة بالرد على كل هذه الأسئلة.

تقدم هذه المسألة أيضاً لمحة عن الدافع الأساسي لبوليا وراء تطوير نظريته. عندما تكون الألوان هي حقاً جزيئات والعصي هي حقاً روابط كيميائية، فإن الإجابة تعبر عن عدد المركبات الكيميائية من نوع معين؛ لكن عد المركبات الكيميائية يتطلب معرفة كبيرة بالكيمياء لذلك لن نتعرض إلى هذا التطبيق في هذا الكتاب.

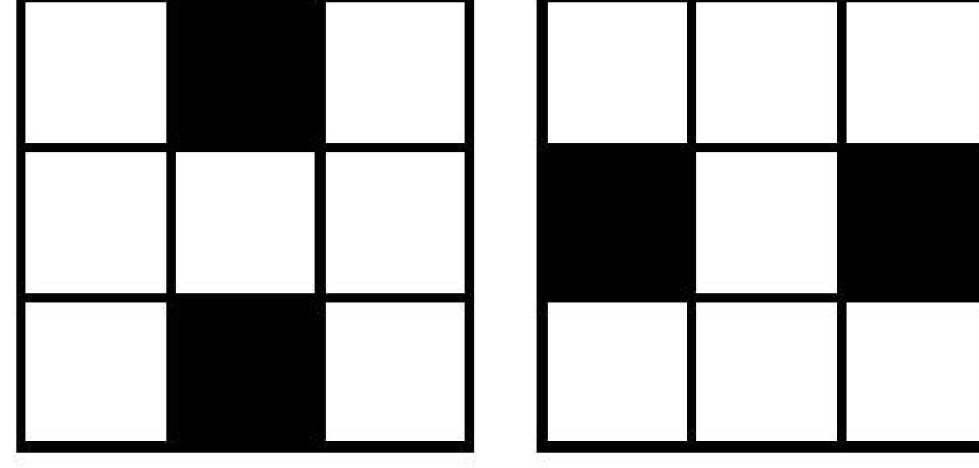
تلوين الشبكة

بكم طريقة يمكننا تلوين المربعات في شبكة أبعادها 3×3 بحيث يحمل كل مربع اللون الأبيض أو الأسود؟

إذا تم ترقيم المربعات في الشبكة أو تم تمييزها بطريقة أخرى، فإن هنالك 2^9 تلويناً تتوافق مع الدوال الممكنة كـ $f: [9] \rightarrow$ {أبيض ,أسود}. لكن إذا سُمح للشبكة بالدوران في المسطح (افترض أنها مرسومة على ورقة بشكل مشابه للوح اللعب (تيك تاك تو))، فإن هنالك تلوينات أقل. على سبيل المثال، التلوينات التالية جميعها متكافئة:



كما في مسألة تلوين المربع، فإن فئات التكافؤ ليست متساوية في طولها؛ فالشبكات أعلاه تشكل فئة تكافؤ من الطول 4، بينما تشكل الشبكتان في الأسفل فئة تكافؤ من الطول 2.



مرةً أخرى، قد نكون مهتمين بتلوينات ذات خصائص معينة، فالسؤال: "كم عدد الشبكات المختلفة التي فيها خمسة مربعات سوداء وأربعة مربعات بيضاء؟" هو نفس السؤال: "كم عدد ألواح الـتيك تاك تو التي فيها خمسة أحرف X وأربعة أحرف O؟".

52. زمر التباديل

إن مهمتنا الأولى هي التعريف بتلك الأجزاء من مبرهنة الزمر القابلة للتطبيق على طرق العدّ التي سنقوم بتطويرها. سنبدأ بالتباديل لنستخدمها في وصف سبب إمكانية حركة شيء كالمربع في الفراغ أو سبب إمكانية حركة شبكة أبعادها 3×3 في المسطح.

في هذا الفصل، سنقوم بكتابة التباديل بإحدى الطريقتين. الطريقة الأولى، وتدعى بـ**الشكل ذي الخطين** (Two-Line Form)، تفسر نفسها بنفسها. فعلى سبيل المثال، يُكتب التبديل $f = (7,4,3,2,6,1,5)$ من [7] على الشكل ذي الخطين كالتالي:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ولإيجاد $f(i)$، انظر مباشرة تحت العنصر i.

الطريقة الأخرى هي كتابة f كحاصل ضرب دوائر منفصلة وقد قمنا بتوضيح ذلك في القسم 3.4 (انظر إلى القسم الفرعي بعنوان "الترميز الدوري" (Cycle Notation) لاستيعاب الفكرة). يمكن كتابة f في هذه الحالة كحاصل ضرب دورات منفصلة كـ $f = (1\ 7\ 5\ 6)(2\ 4)(3)$.

السؤال 188: اكتب التبديل $(8\ 6\ 5\ 9\ 4)(2)(3\ 7\ 1)$ على الشكل ذي الخطين.

الزُّمَر

تشكل مجموعة كل التباديل من $[n]$ مع عملية تركيب الدوال المرمزة بـ $\circ$ ما يعرف بـزمرة التماثل (Symmetric Group) على العناصر n ويرمز لها بالرمز $(S_n,\circ)$ أو S_n فقط ولتحقيق أهدافنا في هذا الفصل؛ فإن هذا النوع هو أهم مثال للزمر. تتضمن الأمثلة المشهورة الأخرى المجموعات $\mathbb{Z}$ أو $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ كلٌ مع عملية الإضافة، أو مجموعة الأعداد الحقيقية غير الصفرية مع عملية الضرب. استنباطاً من الجبر الخطي، تشكل مجموعة المصفوفات العكسية ذات البعد $n \times n$ زمرة تحت عملية ضرب المصفوفات، وسنناقش بعضاً من هذه الأمور بعد طرح تعريف الزمرة.

التعريف 2.15. (الزمرة): الزمرة هي الزوج $(G,*)$ حيث G هي مجموعة و $*$ هي عملية ثنائية[1] على G والتي تحقق الخصائص الأربع التالية:

- **الانغلاق (Closure)**: لكل $a, b \in G$، لدينا $a * b \in G$.
- **التجميع (Associativity)**: لكل $a, b, c \in G$، لدينا $a * (b * c) = (a * b) * c$.
- **وجود العنصر المحايد (Existence of an Identity)**: هنالك عنصر $e \in G$ حيث إنه لكل $a \in G$، لدينا $a * e = a$ و $e * a = a$.
- **وجود المعكوس (Existence of Inverse)**: لكل $a \in G$، يوجد $x \in G$ حيث إن $a * x = e$ و $x * a = e$.

على سبيل المثال، فإن مجموعة الأعداد الصحيحة مع عملية الجمع، تحديداً $(\mathbb{Z}, +)$، تعتبر زمرة للأسباب التالية:

- تحقق خاصية الانغلاق لأن $a + b$ هو عدد صحيح ما دامت a و b أعداد صحيحة.
- نعلم أن الخاصية التجميعية لعملية الجمع: $a + (b + c) = (a + b) + c$ تتحقق لجميع الأعداد الصحيحة.

---

[1] العملية الثنائية هي دالة تنفذ على شيئين في نفس الوقت، كالإضافة والطرح... إلخ. رسمياً، العملية الثنائية على G هي الدالة $G \times G \rightarrow G$.

• يخدم العدد الصحيح 0 كعنصر محايد لأن $a + 0 = 0 + a = a$ لأي عدد صحيح كـ a.

• أخيراً، لأي عدد صحيح كـ a، فإن العدد الصحيح $-a$ هو معكوسه لأن $a + (-a) = 0$ و $(-a) + a = 0$.

تحقق الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$ خاصية إضافية – الخاصية التبديلية – وهي غير مذكورة ضمن تعريف الزمرة، ومفادها أن $a + b = b + a$ لجميع الأعداد الصحيحة a و b. لا تحتاج الزمرة إلى تحقيق الخاصية التبديلية، وفي الحقيقة إن بعض الزمر التي سنستخدمها في هذا الكتاب (أبرزها زمرة التماثل) غير تبديلية ومن الجدير بالذكر أن الزمرة التي تكون العملية الثنائية فيها تبديلية تسمى زمرة تبديلية (Commutative Group) أو زمرة أبيلية (Abelian Group).

السؤال 189: (جبر خطي) لزمرة من المصفوفات العكسية ذات البعد 2×2، ما هو العنصر المحايد؟ ما هو معكوس المصفوفة $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ ؟ وهل هذه الزمرة تبديلية؟

تحتوي القائمة التالية على بعض الحقائق حول الزمر حيث تعتبر قوانين الحذف مفيدة بشكل خاص:

• **حذف الجزء الأيمن والجزء الأيسر (Left-Right Cancellation)**: عندما يكون $a * b = a * c$ فإنه يتبع ذلك أن $b = c$، وهذا هو قانون حذف الجزء الأيسر.

بشكل مشابه، عندما يكون $b * a = c * a$ فإنه يتبع ذلك أن $b = c$، وهذا هو قانون حذف الجزء الأيمن.

• **تفرد العنصر المحايد (Uniqueness of Identity)**: تمتلك الزمرة عنصراً محايداً واحداً فقط لا غير وهذا يعني أننا نستطيع التحدث عن **الـ**عنصر المحايد والذي نرمز له بالرمز e أو I.

• **تفرد المعكوس (Uniqueness of Inverse)**: لدى أي عنصر من عناصر الزمرة معكوس واحد فقط لا غير ولذلك فإن الرمز a^{-1} يشير من دون أي لُبس إلى **الـ**معكوس من العنصر a.

يتطلب التمرين 5 أن تقوم بإثبات هذه الخصائص.

زمرة التماثل

سنثبت الآن أن المجموعة S_n مع تركيب الدوال تستحق اسم "الزمرة" حيث يستخدم معظم الإثبات النتائج التي أثبتناها في القسم 13. وتمارينه.

المبرهنة 2.25. (زمرة التماثل): لأي عدد صحيح $n > 0$ فإن $(S_n, \circ)$ هي زمرة. أي أن مجموعة كل التباديل من $[n]$ هي زمرة تحت عملية تركيب الدوال.

البرهان: ليكن n عدداً صحيحاً موجباً.

الانغلاق: تقول المبرهنة 3.51. أن تركيب دالتين تقابليتين $[n] \to [n]$ هي أيضاً اقتران تقابلي $[n] \to [n]$، لذلك فإن S_n منغلقة تحت تركيب الدوال.

التجميعية: تقول المبرهنة 3.61. أن تركيب الدوال يمتلك الخاصية التجميعية، لذلك فإن S_n تمتلك الخاصية التجميعية.

وجود العنصر المحايد: عرّف $e: [n] \to [n]$ من خلال $e(j) = j$ لجميع قيم $j \in [n]$. من الواضح أن هذا اقتران تقابلي $[n] \to [n]$ لذلك $e \in S_n$. ليكن $f \in S_n$، بالتالي فإن $f \circ e = f$ و $e \circ f = f$ لأن $f(e(j)) = f(j)$ و $e(f(j)) = f(j)$ لجميع قيم $j \in [n]$، لذلك S_n لديها عنصر محايد وهو تحديداً "التبديل المحايد".

وجود المعكوس: يوضح التمرين 8 التابع للقسم 13. أن معكوس الاقتران التقابلي $\pi: [n] \to [n]$ هو بحد ذاته دالة تقابلية $\pi^{-1}: [n] \to [n]$. علاوةً على ذلك فإن $\pi \circ \pi^{-1} = e$ و $\pi_0^{-1} \pi = e$ حيث e هو التبديل المحايد المعرف في الفقرة السابقة، لذلك فإن كل عنصر في S_n لديه معكوس في S_n. ■

الزمرة G هي مجموعة محدودة بشرط أن تكون G مجموعة محدودة، في تلك الحالة تكون $|G|$ هي **رتبة** G. إذا كانت G مجموعة غير محدودة، فإن المجموعة لديها رتبة غير محدودة.

السؤال 190: ما هي رتبة S_n؟

تماثلات جسيم

هي تماثلات لجسيم (كالمربع أو الشبكة ذات البعد 3 × 3 الوارد ذكرهما في القسم 51.) والتي سنقوم بتمثيلهما باستخدام الزمر حيث تصف عناصر الزمرة جميع الطرق التي نستطيع من خلالها تقليب الجسيم مادياً من دون تغيير بنيته.

تماثلات المربع

ما هي الطرق التي نستطيع من خلالها التقاط المربع الوارد في القسم 51. وتدويره ثم إرجاعه إلى نفس المكان؟ لأننا سنقوم بتلوين زوايا المربع، دعنا نرقم الزوايا (كما في الشكل 15.) بحيث نستطيع ملاحظة تأثير كل حركة على موقع كل زاوية.

هنالك ثمان حركات للمربع في الفضاء: تركه من دون تغيير أو تدويره مع عقارب الساعة بمضاعفات الزاوية °90 أو تقليبه في ثلاثة أبعاد حول واحد من أبعاد التماثل الأربعة. تُبقي الحركة المحايدة I المربع ثابتاً. ميّز حركات الدوران بـ R_1 و R_2 و R_3 نسبة إلى مضاعفات الزاوية °90 حيث إن المربع يدور إما بزاوية °90 أو °180 أو °270.

يمتلك المربع محوري تماثل يمران عبر الزوايا المتقابلة (1 و 3، 2 و 4). سمِّ الحركات التي تقلِّب المربع حول محوري التماثل هذين F_1 و F_2، على التوالي. يمتلك

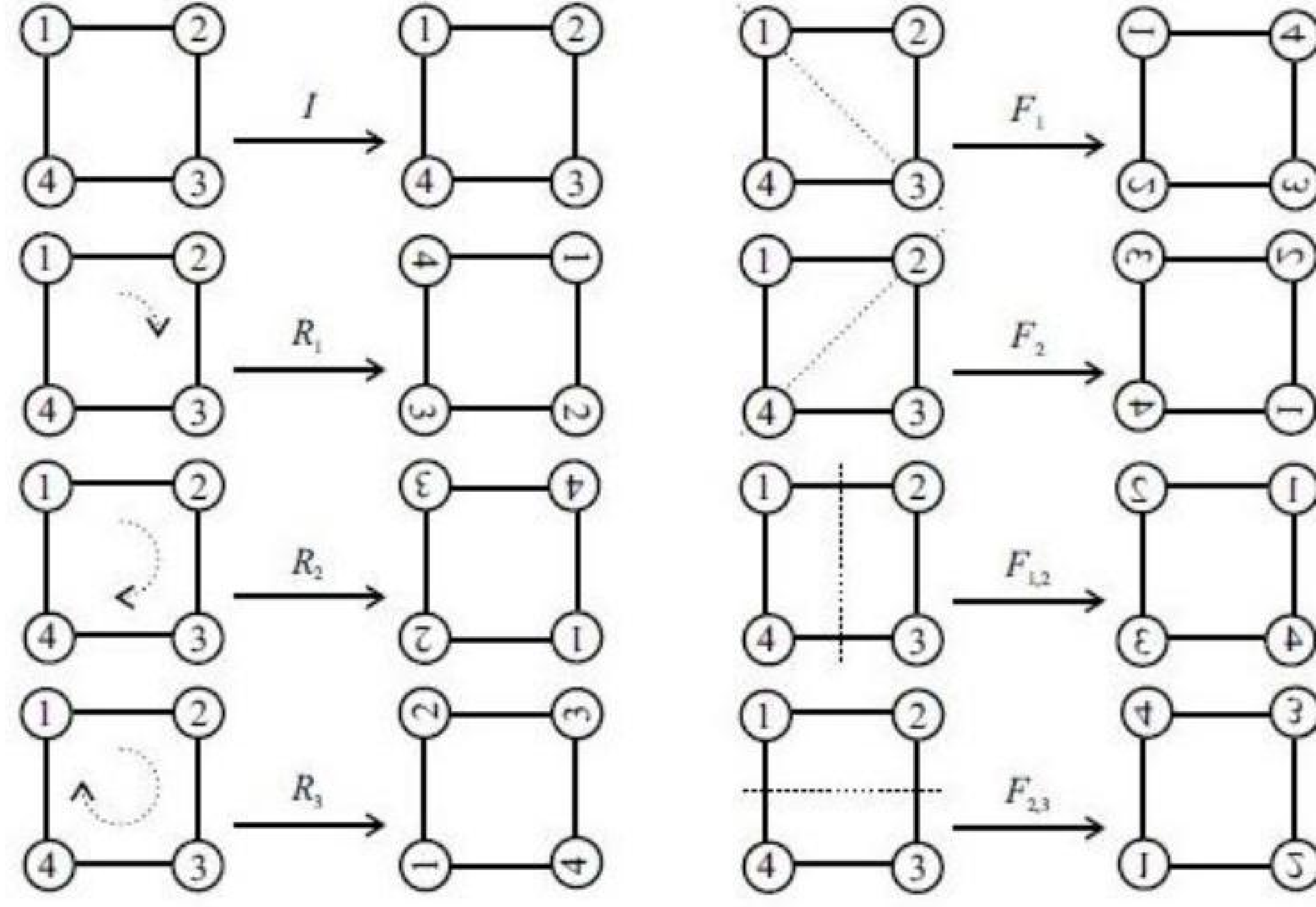
المربع أيضاً محوري تماثل يمران عبر منصفات الجهات المتقابلة (إما الجهتين 2–1 و 4–3 أو الجهتين 3–2 و 4–1). ميّز الحركة الأولى بـ $F_{1,2}$ والثانية بـ $F_{2,3}$. يوضح الشكل 25. كيفية تأثير هذه الحركات على الزوايا ويوضح الجدول 15. كل واحدة من تلك الحركات مكتوبة كتبديل في S_4.

على سبيل المثال، فإن الحركة $F_{1,2}$ التي تقلب المربع (أو تدوره في ثلاثة أبعاد) حول المحور الذي يمر عبر منصفات الجهات 12- و 34- لديها التأثير النهائي على تبديل مواقع الزوايا 1 و 2، وتبديل مواقع الزوايا 3 و 4 ونستطيع كتابة تأثيرها على الزوايا على شكل التبديل التالي في S_4:

$$F_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 4)$$

بشكل مشابه، فإن الحركة R_3 التي تدوّر المربع باتجاه عقارب الساعة في المستوى بزاوية $270°$، تحرك الزاوية 1 إلى الموقع الأصلي للزاوية 4، وتحرك الزاوية 2 إلى الموقع الأصلي للزاوية 1، وتحرك الزاوية 3 إلى الموقع الأصلي للزاوية 2، وتحرك الزاوية 4 إلى الموقع الأصلي للزاوية 3 ونستطيع كتابة تأثيرها على الزوايا على شكل التبديل التالي في S_4:

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 3\ 2)$$



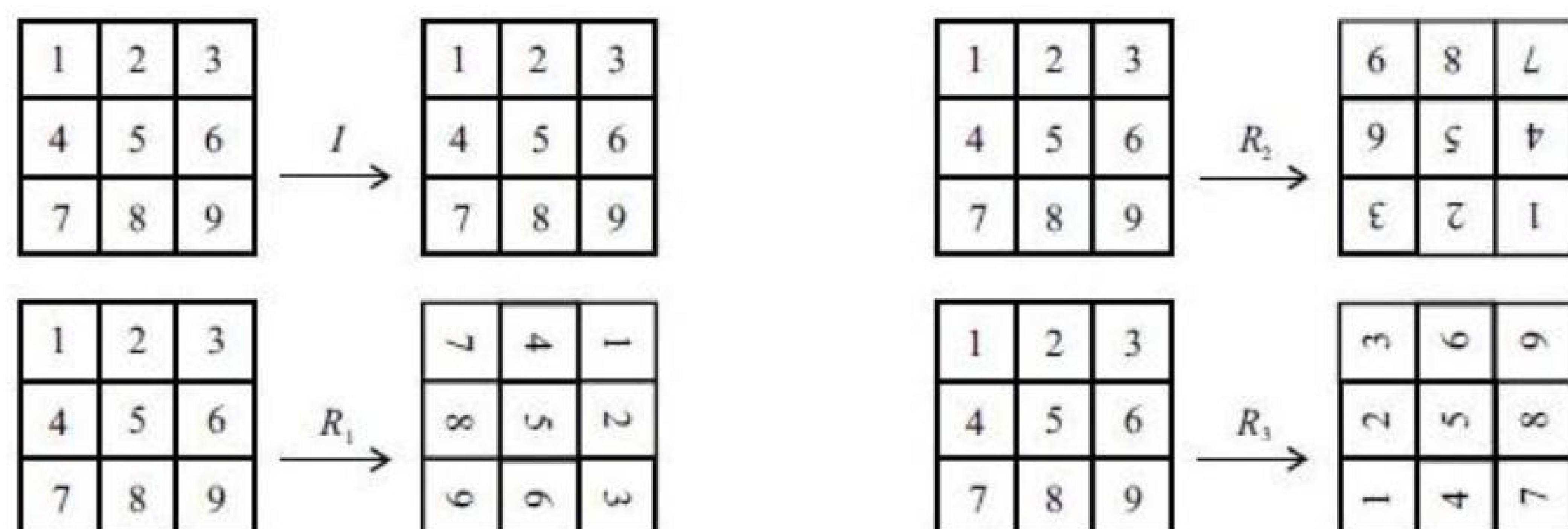
الشكل 5.2. تماثلات المربع وتأثيرها على زواياه.

الحركة	الشكل ذو الخطين	ضرب الدوائر المنفصلة
I	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$(1)(2)(3)(4)$
R_1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$(1\,2\,3\,4)$
R_2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$(1\,3)(2\,4)$
R_3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$(1\,4\,3\,2)$
F_1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$(1)(2\,4)(3)$
F_2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$(1\,3)(2\,)(4)$
$F_{1,2}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$(1\,2)(3\,4)$
$F_{2,3}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(1\,4)(2\,3)$

الجدول 5.1. تماثلات المربع كتباديل في S_4 .

بالنسبة إلى الشبكة ذات البعد 3×3 الواردة في القسم 5.1، يوجد فقط أربع حركات: الحركة التي لا تفعل شيئاً (الحركة المحايدة I)، والحركة المسؤولة عن الدوران بزاوية $90°$ مع عقارب الساعة (R_1)، والحركة المسؤولة عن الدوران بزاوية $180°$ مع عقارب الساعة (R_2)، والحركة المسؤولة عن الدوران بزاوية $270°$ مع عقارب الساعة (R_3). على الرغم من أن هذه المسألة والمسألة السابقة تشتملان على المربعات، إلا أنه من غير المسموح للشبكة أن تتحرك في ثلاثة أبعاد: فكر بها وكأنها مرسومة على ورقة تستطيع تحريكها بحركات ثنائية البعد.

يوضح الشكل 5.3 كيف تنفذ هذه الحركات على المربعات المرقمة، ويوضح الجدول 5.2 كل من هذه الحركات مكتوبة كتبديل في S_9. ثمة توضيحات مشابهة لتلك التي استخدمت في حالة المربع قابلة للتطبيق في هذه الحالة أيضاً باستخدام الترقيم الأصلي للمربعات التسعة كنقطة مرجع. لاحظ أن الحركات الأربع جميعها تُبقي المربع 5 ثابتاً.



الشكل 5.3. كيفية عمل تماثلات الشبكة ذات البعد 3 × 3 على مربعاتها.

الحركة	الشكل ذو الخطين	ضرب الدوائر المنفصلة
I	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\end{pmatrix}$	$(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)$
R_1	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&6&9&2&5&8&1&4&7\end{pmatrix}$	$(1\,3\,9\,7)(2\,6\,8\,4)(5)$
R_2	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\9&8&7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$	$(1\,9)(2\,8)(3\,7)(4\,6)(5)$
R_3	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&4&1&8&5&2&9&6&3\end{pmatrix}$	$(1\,7\,9\,3)(2\,4\,8\,6)(5)$

الجدول 5.2. تماثلات الشبكة ذات البعد 3 × 3 كتباديل في S_9 .

الزمر الجزئية

تشكل التماثلات الثمانية للمربع $\{I, R_1, R_2, R_3, F_1, F_2, F_{1,2}, F_{2,3}\}$ مجموعة جزئية من الـ $4! = 24$ تبديلاً في S_4، وهذا يعني أن أغلب التباديل في S_4 لا تقترن

بإعادة ترتيب زوايا المربع التي نستطيع تمييزها من خلال التقاط المربع وتدويره أو/ وتقليبه ثم إعادته إلى مكانه. على سبيل المثال، لا يقترن التبديل $(1)(2)(3\ 4)$ بتأثير على الزوايا من قبل إحدى هذه الحركات فنحن لا نستطيع، من خلال حركة لا تشتمل على تفكيك تركيبة الكرة والعصا، تبديل مواقع الزوايا 3 و 4 والإبقاء على مواقع الزوايا 1 و 2 في مواقعها الأصلية في الوقت ذاته. ولهذا السبب، فإن الحركات الثمان التي نستخدمها تُدعى أحياناً **الحركات الثابتة** (Rigid Motions) للمربع.

وبطريقة مماثلة، فإن التماثلات الأربعة للشبكة ذات البعد 3×3 وهي $\{I, R_1, R_2, R_3\}$ تشكل مجموعة جزئية صغيرة من الـ $9! = 362{,}880$ تبديلاً في S_9.

لكن لاتزال نتائج مبرهنة الزمر مطبقة على المجموعات الجزئية ذات العناصر الأربعة والعناصر الثمانية الموضحة أعلاه، حتى لو كانت مجموعات جزئية صغيرة فقط من الزمر المعروفة S_4 وS_9 وهذا لأن كل منها هي زمرة جزئية – (Subgroup) زمرة موجودة داخل زمرة أخرى.

التعريف 2.35. (زمرة جزئية): لتكن $(G,*)$ زمرة. الزمرة الجزئية من G هي الزوج $(H,*)$ بحيث إن $H \subseteq G$ و $(H,*)$ هي زمرة. سنستخدم طريقة الكتابة: $H \leq G$ للإشارة إلى أن H هي زمرة جزئية من G.

سنستخدم الرمز $\leq$ لتمييزه عن الرمز $\subseteq$، لأنه، كما سنرى لاحقاً، ليست كل مجموعة جزئية مأخوذة من زمرة هي زمرة جزئية، كما ويجب على السياق الذي يظهر

فيه رمز الزمرة الجزئية أن يميزه عن الرمز المعتاد لأقل من أو يساوي. من الصحيح دائماً أن $\{e\} \leq G$ لأي زمرة مثل G وهذه هي **الزمرة الجزئية البديهية**.

فحص الزمرة الجزئية

عملياً، يعتبر فحص فيما لو كانت مجموعة جزئية معينة من زمرة منتهية هي زمرة جزئية أم لا (Trivial Subgroup) فحصاً بسيطاً كالتالي: تحقق فقط أن المجموعة الجزئية منغلقة تحت عملية الزمرة. يشير الرمز a^n في إثبات المبرهنة التالية، وفي أماكن أخرى، إلى التطبيق المتكرر لعملية الزمرة. على سبيل المثال فإن $a^2 = a * a$ و $a^3 = a * a * a$. أيضاً، $a^1 = a$ و $a^0 = e$.

المبرهنة 2.45.: لتكن $(G,*)$ زمرة محدودة، ولتكن H مجموعة جزئية غير فارغة من G، وبالتالي فإن $H \leq G$ إذا وفقط إذا كانت H منغلقة تحت $*$.

البرهان: افرض أن $(G,*)$ هي زمرة غير محدودة وأن H هي مجموعة جزئية غير فارغة من G.

$(\Leftarrow)$ افرض أن $H \leq G$ وبالتالي فإن $(H,*)$ هي زمرة، ولذلك فهي منغلقة تحت $*$.

$(\Rightarrow)$ افرض أن H منغلقة تحت $*$. يجب أن نثبت أن $(H,*)$ لديها خصائص الزمرة الثلاث المتبقية:

التجميعية: لتكن $a, b, c \in H$، وبالتالي فإن $a, b, c \in G$ لأن $H \subseteq G$. لأن G زمرة ومن ثم تجميعية، ينتج أن $a * (b * c) = (a * b) * c$، ولذلك فإن H لديها الخاصية التجميعية.

وجود العنصر المحايد: افترض أن $|H| = m$ لعدد صحيح موجب مثل m. إذا كانت $m = 1$ فإن $H = \{a\}$ لـ $a \in G$. لأن H منغلقة، ينتج أن $a * a = a$. الآن، بتطبيق هذه المعادلة على الزمرة G، يتضمن حذف الجزء اليسار من $a * a = a * e$ أن $a = e$. لذلك فإن $H = \{e\}$ ولذلك فإن H هي الزمرة الجزئية البديهية من G.

الآن افترض أن $m > 1$ ولتكن $a \in H$. لأن H منغلقة تحت $*$، فإن الـ $m + 1$ عنصر

(5.1)

$$a, a^2, a^3, \ldots, a^{m+1}$$

تنتمي جميعها إلى H. ولكن لأن $|H| = m$، فإن هذه القائمة يجب أن تتكرر: $a^i = a^j$ لأعداد صحيحة كـ i و j التي تحقق المتباينة $1 \leq i < j \leq m + 1$. أعد كتابة $a^j * a^i = a^{j-i}$ ولاحظ أن $0 < j - i < m$. وهذا يعني أن:

$$a^i * e = a^i * a^{j-i}$$

بالتطبيق على الزمرة G، فإن حذف الجزء اليسار يتضمن أن $e = a^{j-i}$ حيث e هو العنصر المحايد في G. لكن لأن $a^{j-i} \in H$، فقد وضحنا أن $e \in H$ وبالتالي فإن H تحتوي على عنصر محايد.

وجود المعكوس: لتكن $a \in H$. يتطلب التعريف 2.15. إيجاد $b \in H$ التي تحقق المعادلة

$a * b = e$ و $b * a = \mathrm{e}$. كون نفس القائمة (5.1) التي تعلمنا منها أن $a^{j-i} = e$، هذا يعني أنه إذا اخترنا $b := a^{j-i-1} \in H$ (حيث $a^0 = e$) فإن:

$$a * b = a * a^{j-i-1} = a^{j-i} = e$$

وبشكل مشابه فإن $a * b = \mathrm{e}$. لذلك فإن كل عنصر في H يحتوي على معكوس ينتمي إلى H وهذا يكمل إثبات أن

$H \leq G$. ■

أما في حالة الزمرة اللامتناهية، فإن فحص الزمرة الجزئية يتطلب أكثر من مجرد التحقق من الانغلاق. لاحظ التمرين 11.

تماثلات المربع

لاحظ أن لدينا فحص الزمرة الجزئية وهنالك طريقة منظمة للتحقق من أن

$$\{I, R_1, R_2, R_3, F_1, F_2, F_{1,2}, F_{2,3}\} \leq S_4$$

وهي استخدام **جدول الزمر** (Group Table)، والذي يوضح نتيجة تركيب أي تبديلين يتوافقان مع تأثير الحركات الثمان على الزوايا، ويوضح الجدول 35. جدول الزمر هذا حيث إن العنصر في أي صف وعمود هو الحركة النهائية التي تنتج من تطبيق حركة العمود أولاً متبوعاً بحركة الصف.

$\circ$	I	R_1	R_2	R_3	F_1	F_2	$F_{1,2}$	$F_{2,3}$
I	I	R_1	R_2	R_3	F_1	F_2	$F_{1,2}$	$F_{2,3}$
R_1	R_1	R_2	R_3	I	$F_{1,2}$	$F_{2,3}$	F_2	F_1
R_2	R_2	R_3	I	R_1	F_2	F_1	$F_{2,3}$	$F_{1,2}$
R_3	R_3	I	R_1	R_2	$F_{2,3}$	$F_{1,2}$	F_1	F_2
F_1	F_1	$F_{2,3}$	F_2	$F_{1,2}$	I	R_2	R_3	R_1
F_2	F_2	$F_{1,2}$	F_1	$F_{2,3}$	R_2	I	R_1	R_3
$F_{1,2}$	$F_{1,2}$	F_1	$F_{2,3}$	F_2	R_1	R_3	I	R_2
$F_{2,3}$	$F_{2,3}$	F_2	$F_{1,2}$	F_1	R_3	R_1	R_2	I

الجدول **5.3**. جدول الزمر لتماثلات المربع.

على سبيل المثال، ما هي الحركة $F_{2,3} \circ R_1$ التي تنتج من دوران المربع باتجاه عقارب الساعة بزاوية 90 درجة أولاً ثم تقليبه حول محوره الأفقي؟ لأن

$$F_{2,3}\big(R_1(1)\big) = F_{2,3}(2) = 3$$
$$F_{2,3}\big(R_1(2)\big) = F_{2,3}(3) = 2$$
$$F_{2,3}\big(R_1(3)\big) = F_{2,3}(4) = 1$$
$$F_{2,3}\big(R_1(4)\big) = F_{2,3}(1) = 4,$$

ينتج أن

$$F_{2,3} \circ R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = F_2$$

لذلك فإن العنصر في صف $F_{2,3}$ وعمود R_1 هو F_2. بطريقة مماثلة،

$$\begin{aligned} R_1(F_{2,3}(1)) &= R_1(4) = 1 \\ R_1(F_{2,3}(2)) &= R_1(3) = 4 \\ R_1(F_{2,3}(3)) &= R_1(2) = 3 \\ R_1(F_{2,3}(4)) &= R_1(1) = 2, \end{aligned}$$

لذلك فإن $F_1 \circ R_{2,3} = F_1$. هنالك شيء يجب ملاحظته وهو أن الترتيب الذي يتم في تطبيق الحركات مهم فهذه الزمرة ليست تبديلية.

من البسيط ولكنه من المتعب أيضاً إثبات الـ 62 عنصراً المتبقية في جدول الزمر. لأن النتيجة النهائية لتطبيق أي حركتين على التتابع تساوي واحدة من الحركات الثمان الأصلية، فإن لدينا زمرة جزئية من S_4 باستخدام المبرهنة 2.45..

السؤال 191: هل أن $\{I, R_1, R_2, R_3, F_{1,2}\}$ زمرة جزئية من S_4 ؟ اشرح لمَ أو لمَ لا.

تماثلات الشبكة ذات البعد 3 × 3

إن جدول الزمر المرتبط بمسألة الشبكة أصغر من ذلك المرتبط بمسألة المربع وهو موضح في الشكل 45.، وعلى الرغم أن هذا الجدول يساوي الزاوية اليسرى

العليا فقط في جدول الزمر الخاص بتماثلات المربع، إلا أنك يجب أن تتذكر أن هذه الحركات الأربع هي تبديلات في S_9 وليس في S_4.

السؤال 192: هل الزمرة الجزئية الموضحة في الجدول45. تبديلية؟

$\circ$	I	R_1	R_2	R_3
I	I	R_1	R_2	R_3
R_1	R_1	R_2	R_3	I
R_2	R_2	R_3	I	R_1
R_3	R_3	I	R_1	R_2

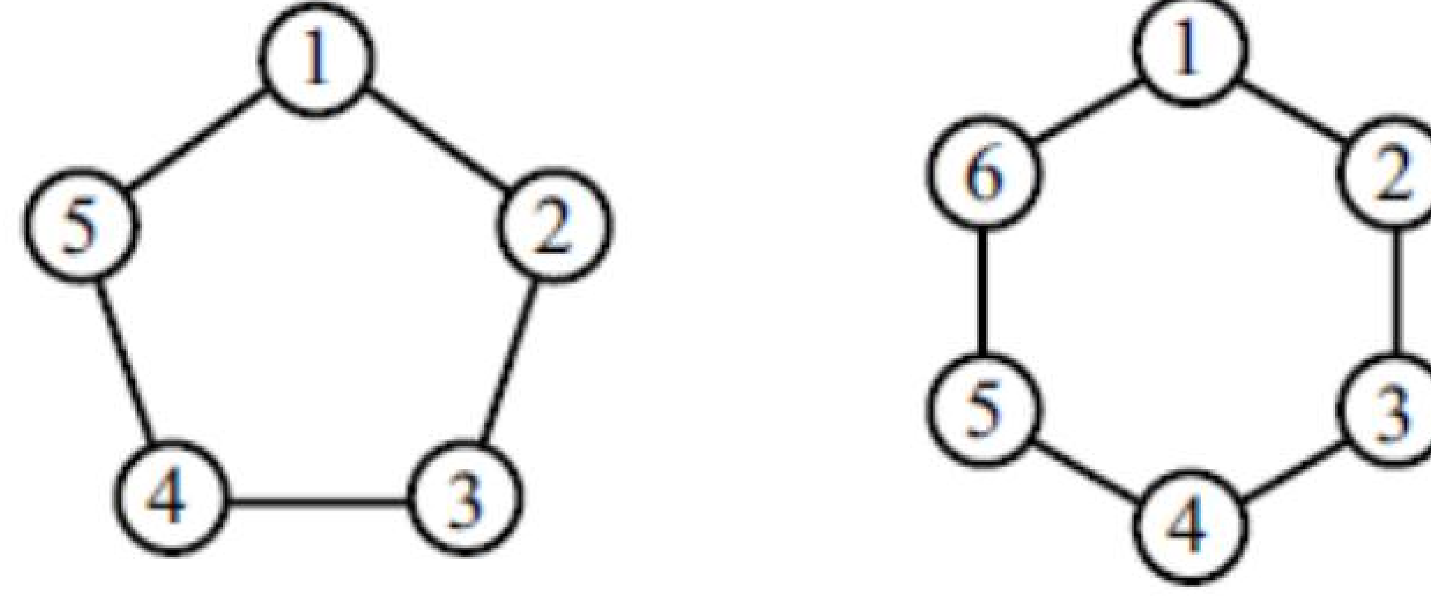
جدول الزمر لتماثلات الشبكة ذات البعد 3 × 3 .

الزمرة الثنائية والزمرة الدورية

الزمرة الثنائية

دعنا نطرح، بدلاً من تلوين زوايا المربع، موضوع تلوين زوايا مضلع خماسي منتظم أو مضلع سداسي منتظم أو (بشكل عام) مضلع منتظم بـ n ضلع حيث $n \geq 3$. إذا سمحنا بأي حركة ثلاثية الأبعاد لتحديد تبديلات ذلك الشكل، فما هو طول زمرة التماثلات؟

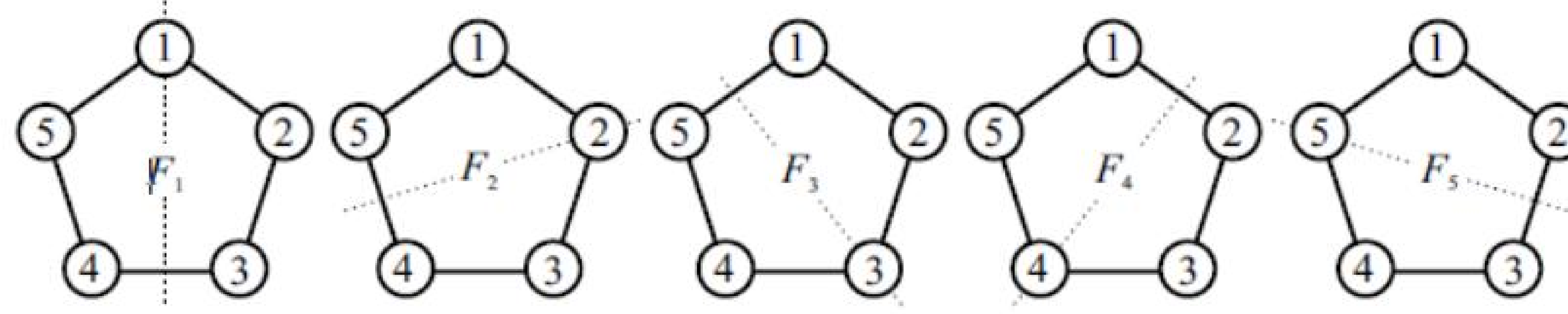
رقّم رؤوس زوايا المضلع المنتظم باستخدام المجموعة $[n]$ ثم وجّهه بحيث يكون الرأس 1 على القمة، فالترقيم لـ $n = 5$ و $n = 6$ هي كالتالي:



كما في المربع (وهو مضلع منتظم رباعي الأضلاع)، فإننا نستطيع تطبيق حركات دورانية ثنائية الأبعاد (Two-Dimensional Rotations) هنالك خمس حركات دورانية للمضلع الخماسي المنتظم (بما فيها العنصر المحايد I (الدوران بزاوية $0°$))، وست حركات دورانية للمضلع السداسي المنتظم. رقّم هذه الحركات بـ I, R_1, R_2, R_3, R_4 في حالة المضلع الخماسي وبـ $I, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$ في حالة المضلع السداسي حيث إن الدوران R_j هو دوران بزاوية مقدارها $360j/n$ درجة.

السؤال 193: ما هي التبديلات في S_5 (للمضلع الخماسي) وS_6 (للمضلع السداسي) والتي تتوافق مع هذه الحركات الدورانية؟

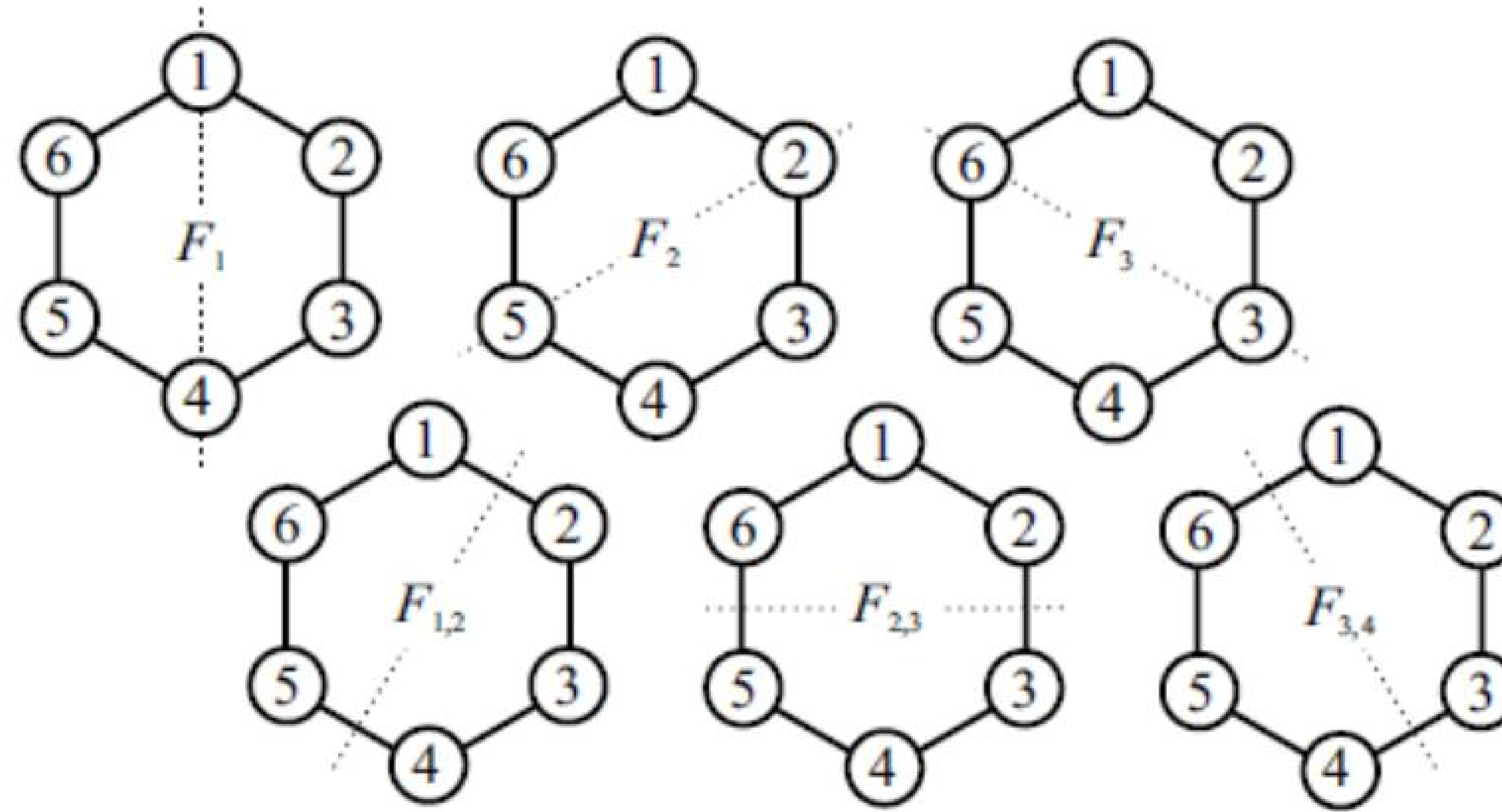
الآن، هنالك حركات التقليب ثلاثية الأبعاد. لدى المضلع الخماسي خمسة محاور تماثل حيث يمر كل محور عبر رأس معين ومنصف الجهة المقابلة مباشرةً لذلك الرأس، وبالتالي فإن الرأس يميّز محور التماثل. رقّم حركات التقليب بـ F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 كما هو موضّح في الأسفل:



(يوضّح الشكل أعلاه مواقع المضلع الخماسي قبل الحركات بالإضافة إلى محاور التماثل، على عكس الشكل 25. والذي يوضّح مواقع المربع قبل وبعد الحركات).

السؤال 194: ما هي التبديلات في S_5 التي تتوافق مع حركات التقليب الخمس هذه؟

لدى المضلع السداسي ستة محاور تماثل، يمر ثلاثة منها عبر أزواج من الرؤوس المتقابلة: (1 و4،2) و(5،3 و6)، وسنرقّم حركات التقليب المتوافقة لذلك بـ F_1, F_2, F_3. أما المحاور الثلاثة المتبقية فتمر عبر أزواج من الجهات المتقابلة: (2-1 و 5-4) و(3-2 و 6-5) و(4-3 و 1-6)، وسنرقّم حركات التقليب الموافقة لذلك بـ $F_{1,2}, F_{2,3}, F_{3,4}$ كما هو موضّح في الشكل التالي:



السؤال 195: ما هي التبديلات في S_6 التي تتوافق مع حركات التقليب الست هذه؟

إن زوجية أو فردية n، وهو عدد الزوايا، تفسّر الاختلاف في طبيعة محاور التماثل للمضلع الخماسي والسداسي.

كما يمكن أن تتوقع، فإن زمرة التماثلات للمضلع المنتظم المكون من n ضلع، حيث $n \geq 3$، لديها n حركة دورانية (تتضمن العنصر المحايد) و n حركة تقليب، وبالتالي فإنها ذات رتبة تساوي $2n$ وتسمى **الزمرة الثنائية للمضلع المنتظم المكون من n ضلع** (Dihedral Group of the Regular n-gon) ويرمز لها بالرمز D_n. تتكون هذه الزمرة من n حركة دوران $I, R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ و n حركة تقليب كالتالي:

إذا كان n عدداً فردياً، فإن حركات التقليب هذه هي:

$$F_1, F_2, \dots, F_n$$

حيث إن حركة التقليب F_i هي حركة حول محور التماثل الذي يمر عبر الرأس i ومنتصف الجهة المقابلة له مباشرةً. أما إذا كان n عدداً زوجياً، فإن حركات التقليب هذه هي:

$$F_1, F_2, \dots, F_{\frac{n}{2}}, F_{1,2}, F_{2,3}, \dots, F_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1}$$

حيث إن حركة التقليب F_i هي حركة حول المحور الذي يمر عبر الرأس i والرأس المقابل له مباشرةً، وحركة التقليب $F_{i,i+1}$ هي حركة حول المحور الذي يمر عبر منتصف الجهة التي تضم الرأسين i و $i + 1$، والجهة المقابلة لها مباشرةً.

إن زمرة تماثل المربع التي تحدثنا عنها سابقاً هي الزمرة الثنائية D_4 ورتبتها 8. بشكل عام، فإن تأثير تماثلات المضلع المنتظم المكون من n ضلع على زواياه، عند التفكير به كتبديلات في S_n، تشكل في الحقيقة زمرة جزئية من S_n رتبتها $2n$. أي أن، $D_n \leq S_n$ و $|D_n| = 2n$.

الزمرة الدورية

هنالك طريقة واحدة لتعريف الزمرة الدورية (Cyclic Group) ذات الرتبة n، والتي يرمز لها بالرمز C_n، وهي بأنها الزمرة الجزئية من D_n التي تتكون من العنصر المحايد والـ $n-1$ عملية دوران على المضلع المنتظم المكون من n ضلع. وبالتالي، فإنها أساساً تشبه الزمرة $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ حيث $\mathbb{Z}_n: \{n-1, \ldots, 1, 0\}$ هي مجموعة بواقي القسمة على n و $\oplus$ هي الجمع المباشر لبواقي القسمة على n .

على سبيل المثال، فإن جدول الزمر لـ C_4 موضّح في الجدول 45.. إن جدول الزمر لـ $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$ هو:

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

تتصرف الزمرتان بالطريقة نفسها، عدا كونهما مختلفتين في أسماء العناصر، وهذا يوضّح مفهوم "تماثل الزمر" الذي لن نتطرق إليه رغم أهميته البالغة في مبرهنة الزمر.

الملخّص

لأغراض العدّ، خاصةً عندما يكون هنالك تماثلات لجسيم مادي يجب أخذها بعين الاعتبار، فإن أهم الزمر هي:

- زمرة التماثل، ويرمز لها بالرمز S_n، وهي مجموعة كل التبديلات لـ $[n]$ أو، بشكل مكافئ، دوال التقابل $[n] \to [n]$، تحت عملية تركيب الدوال.
- الزمرة الثنائية (Dihedral Group)، ويرمز لها بالرمز D_n، وهي مجموعة تماثلات المضلع المنتظم المكون من n ضلع.
- الزمرة الدورية، ويرمز لها بالرمز C_n، وهي مجموعة التماثلات الدورانية للمضلع المنتظم المكون من n ضلع، أو بشكل مكافئ مجموعة الأعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على n مع الجمع.

كلتا الزمرتين D_n و C_n هما زمرتان جزئيتان من S_n.

التمارين

1) كم عدد الدورات في التبديل $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 2 & 8 & 7 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$؟

2) كم عدد التباديل المختلفة في S_5 التي لديها دورتان على وجه التحديد؟ التي لديها ثلاث دورات على وجه التحديد؟

3) لتكن $\pi \coloneqq (1\ 3\ 5)(2)(4\ 6)$ و $\tau \coloneqq (1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)$ تبديلين في S_6. جد:

(أ) π^{-1} و τ^{-1}

(ب) $\pi \circ \tau$ و $\tau \circ \pi$

(ج) $(\pi^2 \circ \tau) \circ \pi^{-1}$

(د) π^{-2} و τ^{-3}

4) اشرح لماذا لا تكون $(\mathbb{R},\cdot)$ زمرة، حيث $\mathbb{R}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية و $\cdot$ هي عملية الضرب، ثم قم بإجراء تغيير بسيط على المجموعة $\mathbb{R}$ بحيث تصبح زمرة تحت عملية الضرب وأثبت كونها كذلك.

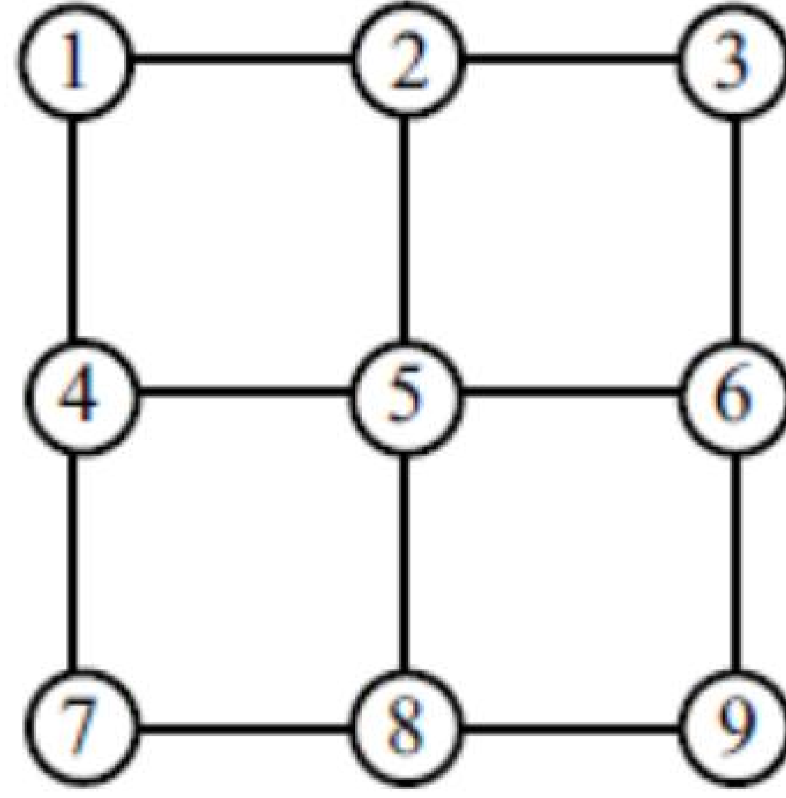
5) لتكن $(G,*)$ زمرة. أثبت قانوني حذف الجزء اليمين واليسار، ثم استخدمهما لإثبات أن العنصر المحايد في الزمرة يكون متفرداً، وأن المعكوس لأي $a \in G$ يكون متفرداً أيضاً.

6) لتكن $(G,*)$ زمرة محدودة. أثبت أن كل صف في جدول الزمر الخاص بها هو تبديل من G.

7) لتكن $(G,*)$ زمرة محدودة رتبتها n، ولتكن $a \in G$. من الصحيح أن القائمة a, a^2, a^3, a^{n+1} يجب أن تحتوي تكراراً. أثبت أن a هو العنصر المتكرر أولاً.

8) بالإضافة إلى ترقيم زوايا المضلع الخماسي، قم بترقيم جهاته كـ a, b, c, d, c. صف كيف تؤثر الزمرة الثنائية D_5 على جهات المضلع الخماسي. اكتب نتيجة كل حركة كتبديل من $\{a, b, c, d, e\}$ وكوّن جدولاً شبيهاً بالجدول 15. ثم قم بعمل الشيء نفسه للمضلع السداسي.

9) جد زمرة التماثل، كزمرة جزئية من S_9، لتركيبة العصا والكرة الموضحة في الأسفل حيث إن هذه التركيبة حرة الحركة في الفراغ. (الزوايا مرقمة للتسهيل).



10) أعد التمرين السابق ولكن لتركيبة أبعادها 4×4.

11) لتكن $(G,*)$ زمرة (ليس بالضرورة أن تكون محدودة)، ولتكن H مجموعة جزئية غير فارغة من G. أثبت أن: $H \leq G$ إذا وفقط إذا (1) كانت H منغلقة تحت $*$ و(2) عندما تكون $a \in H$، ينتج أن $a^{-1} \in H$.

12) لمجموعة التماثل $(S_5,\circ)$ وأحد عناصرها $\pi := (134)\ (25)$:

(أ) عرّف $\pi^0 = e$، العنصر المحايد، و $\pi =: \pi^1$. احسب $\pi \circ \pi :\pi^2$ و $\pi^3 = \pi \circ \pi \circ \pi$، وهكذا حتى تبدأ القائمة بالتكرار.

(ب) لتكن المجموعة H مكونة من مجموعة التباديل التي أوجدتها في الجزء (أ). استخدم جدول الزمر لإثبات أن H زمرة جزئية من S_5.

13) لتكن $(G,*)$ زمرة، وليكن الجزء الصحيح لأي $\pi \in G$. أثبت أن المجموعة

$$\langle\pi\rangle := \{\mathbb{Z} \ni n : \pi^n\}$$

هي زمرة جزئية من G. (تدعى المجموعة $\langle\pi\rangle$ **الزمرة الجزئية الدورية من G المتولدة باستخدام π**. أوجدت في التمرين السابق الزمرة الجزئية الدورية من S_5 المتولدة باستخدام التبديل $(1\ 3\ 4)(2\ 5)$).

14) متمماً للتمرين السابق، أثبت أن المجموعة الجزئية الدورية $\langle\pi\rangle$ تبديلية.

15) يستعرض التمرين التالي إثباتاً لمبرهنة لاجرانج (Lagrange) وهي نتيجة مهمة في مبرهنة الزمر. لتكن $(G,*)$ زمرة.

(أ) لتكن H زمرة جزئية من G ولتكن $a \in G$. **المجموعة المشاركة اليمنى لـ H في G والتي تحتوي على a** هي المجموعة

$$Ha := \{h * a : h \in H\}.$$

أثبت: إذا كان $a, b \in G$، فإن الدالة $f: Ha \rightarrow Hb$ المحددة باستخدام $f(h * a) = h * b$ هي دالة تقابلية.

(ب) عرّف العلاقة $\equiv$ على G باستخدام التالي: $a \equiv b$ إذا وفقط إذا $a * b^{-1} \in H$. أثبت: $\equiv$ هي علاقة تكافؤ على G.

(ج) أثبت: فئات التكافؤ لعلاقة التكافؤ في الجزء (ب) هي المجموعات المشاركة اليمنى لـ H في G.

(د) جمع النتائج في الأجزاء (أ) – (ج) لإثبات مبرهنة لاجرانج: إذا كانت $(G,*)$ هي زمرة محدودة وH هي زمرة جزئية من G، فإن $|G|$ تقبل القسمة على $|H|$.

(ه) اشرح كيف تقدم مبرهنة لاجرانج طريقة بديلة للإجابة عن السؤال 191 الوارد فيما سبق.

3.5 المدارات ومجموعات النقاط الثابتة

إن هذا القسم يسد الفجوة بين العدّ ومبرهنة الزمر. نستطيع التفكير بزمرة تماثل المربع (أي الزمرة الثنائية D_4) بأنها تؤثر على خصائص معينة في المربع: الزوايا والحواف والتلوينات الممكنة للمربع والتلوينات الممكنة للحواف... إلخ. في الحقيقة،

لقد قمنا بذلك فيما يتعلق بالزوايا وهذا موضح في الشكل 5.2 والجدول 5.1 ولقد قمنا بترقيم الزوايا لأن هذا ما نريد تلوينه.

تلوين المربع

تذكر مثال تلوين المربع الوارد في القسم 5.1. بينما تؤثر العملية $F_1 = (3)(24)(1)$ على الزوايا الأربع المرقمة للمربع، فإنها تترك الزاويتين 1 و 3 ثابتتين ولكنها تغير موقعي الزاويتين 2 و 4. ولكن بينما تؤثر تلك العملية على التلوينات الستة عشر لزوايا المربع الموضحة في الشكل 5.1، فإنها تفعل ما يلي:

$$F_1 = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 & f_9 & f_{10} & f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_1 & f_2 & f_5 & f_4 & f_3 & f_9 & f_8 & f_7 & f_6 & f_{10} & f_{11} & f_{12} & f_{15} & f_{14} & f_{13} & f_{16} \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال، ينتج عن تقليب المربع الملون المرقم بـ f_5 حول المحور الرابط بين الزوايتين 1 و 3 المربع الملون f_3 وهذا يعني أن $F_3 = (f_5)f_1$. تؤثر العملية $R_1 = (1\ 2\ 3\ 4)$ على التلوينات كالتالي:

$$R_1 = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 & f_9 & f_{10} & f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_1 & f_3 & f_4 & f_5 & f_2 & f_7 & f_8 & f_9 & f_6 & f_{11} & f_{10} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{12} & f_{16} \end{pmatrix}$$

لاحظ أن كل عملية هي اقتران تقابلي على مجموعة التلوينات.

تلوين الشبكة

قمنا في مثال تلوين الشبكة الوارد في القسم 1.5 بتوضيح تأثير زمرة التماثل على المربعات التسعة المكونة للشبكة في الشكل 5.3 والجدول 5.2، ولكن إن هذه الزمرة تؤثر أيضاً على الـ $512 = 2^9$ تلويناً ممكناً للمربعات التسعة، وعلى عكس مثال المربع؛ فإن تعداد جميع التلوينات الممكنة بشكل صريح يعتبر عملاً مرهقاً جداً.

ولكن، كما هو الحال في مثال المربع، فإن كل عملية من العمليات الأربع: I و R_1 و R_2 و R_3 تنتِج دالةً تقابلية على مجموعة التلوينات.

تأثير الزمرة على الدوال

تقدم مبرهنة الزمر طريقة مفيدة — مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد — لحل مسألة تلوينات المربع وتلوينات الشبكة بجهد مماثل؛ على الرغم من أن هنالك تلوينات أسود وأبيض في الشبكة أكثر من تلك تلوينات الابتداء في المربع (512 مقابل 16).

إن الفكرة الأساسية هي تأثير الزمرة على مجموعة من الدوال. في أمثلتنا، الدوال هي التلوينات ويكفي للعديد من المسائل وجود فكرة بديهية لما يعنيه تأثير الزمرة، ولكن تطوير المبرهنة يتطلب تعريفاً دقيقاً.

التعريف 5.3.1 (تأثير الزمرة على الدوال): لتكن A و C مجموعتين محدودتين، ولتكن G زمرة التباديل من A. للمجموعة C^A من الدوال $f: A \to C$ يعرّف **تأثير G على** C^A بـ:

$f(\pi^{-1}(a)) =: (\pi(f))(a)$ لكل $\pi \in G$ و $a \in A$

في مثال المربع، $A = [4]$ هي مجموعة الزوايا المرمزة، و $C = \{$أبيض،أسود$\}$ هي مجموعة الألوان، و G هي الزمرة الثنائية D_4 لأنها تؤثر على مجموعة الزوايا A.

إن الغرض من التعريف هو التوضيح بدقة ما يعنيه، لنقل، $R_1(f_2)$. بعد كل ذلك، تصف R_1 كيفية تأثير الزمرة على الزوايا وليس على التلوينات. بديهياً، إن القول بأن $R_1(f_2) = f_3$ يعتبر منطقياً لأن دوران التلوين f_2 مع عقارب الساعة بزاوية مقدارها 90° ينتج عنه التلوين f_3. (عد إلى الشكل.15.) يعرّف التعريف ماهية الدالة $R_1(f_2)$. لأن $R_1{}^{-1} = R_3$، يقول التعريف:

$$R_1(f_2(1)) = f_2(R_1^{-1}(1)) = f_2(R_3(1)) = f_2(4) = \text{black} = f_3(1)$$
$$R_1(f_2(2)) = f_2(R_1^{-1}(2)) = f_2(R_3(2)) = f_2(1) = \text{white} = f_3(2)$$
$$R_1(f_2(3)) = f_2(R_1^{-1}(3)) = f_2(R_3(3)) = f_2(2) = \text{black} = f_3(3)$$
$$R_1(f_2(4)) = f_2(R_1^{-1}(4)) = f_2(R_3(4)) = f_2(3) = \text{black} = f_3(4).$$

لذلك في الحقيقة فإن $f_3 = R_1(f_2)$ لأن f_3 هي التلوين الذي يرقّم الزوايا 1–4 بالترتيب أسود – أبيض – أسود - أسود.

السؤال 196: استخدم نفس الطريقة لإيجاد $F_2(f_{11})$.

مفهومان مهمان

المدار

لأن هدفنا هو عد التلوينات غير المتكافئة، فإننا يجب أن نجعل فكرتنا عن التكافؤ أدق. نعتبر، في مثال تلوين المربع، التلوينين متكافئين إذا استطعنا "الوصول" لأحدهما من الآخر بواسطة عمليات الزمرة.

على سبيل المثال، يعتبر التلوينان f_7 وf_8 متكافئين لأن عملية الدوران بزاوية 90 درجة تأخذ أحد التلوينات إلى الآخر: $R_1(f_7) = f_8$، وهذا هو الحال أيضاً أن $F_1(f_7) = f_8$ و $R_3(f_8) = f_7$، لكن المقصود أنه يوجد طريقة واحدة على الأقل للوصول من f_7 إلى f_8 أو العكس.

عندما تؤثر الزمرة على مجموعة من الدوال (التلوينات مثلاً) فإن مدار الاقتران هو مجموعة كل الدوال التي يمكن الوصول إليها من خلال تنفيذ عمليات الزمرة على الدالة الأصلية (Original Function).

التعريف 5.3.2 (المدار): لتكن A و C مجموعتين محدودتين، ولتكن G زمرة التباديل من A. لأي $f \in C^A$، **مدار f تحت G** هو المجموعة:

$$orb_G(f) := \{\pi(f) : \pi \in G\}$$

على سبيل المثال، لإيجاد مدار التلوين f_7، نقوم بتنفيذ كل واحدة من عمليات الزمرة الثمان على f_7 وجمع النتائج كالتالي:

$$I(f_7) = f_7 \quad R_1(f_7) = f_8 \quad R_2(f_7) = f_9 \quad R_3(f_7) = f_6$$
$$F_1(f_7) = f_8 \quad F_2(f_7) = f_6 \quad F_{2,3}(f_7) = f_7 \quad F_{1,2}(f_7) = f_9.$$

هذا يعني أن مدار f_7، وتحديداً $orb_{D_4}(f_7)$، يساوي $\{f_6, f_7, f_8, f_9\}$ وكأمثلة أخرى $orb_{D_4}(f_{10}) = \{f_{10}, f_{11}\}$ و $\{f_1\} = orb_{D_4}(f_1)$.

السؤال 197: ما هو مدار f_{15} ؟

لاحظ أن كل مدار يحتوي على تلوينات زوايا المربع التي نعتبرها متكافئة فعلاً.

السؤال 198: بشكل عام، اشرح لم تكون أي دالة f في مدارها الخاص.

مجموعة النقاط الثابتة

إن مجموعة النقاط الثابتة الخاصة بعملية زمرة معينة هي مجموعة الدوال التي تبقى من دون تغيير في هذه العملية.

التعريف 5.3.3 (مجموعة النقاط الثابتة): لتكن A و C مجموعتين محدودتين، ولتكن G زمرة التباديل من A. لأي $\pi \in G$، تكون مجموعة النقاط الثابتة لـ π في G هي المجموعة

$$\mathrm{fix}_G(\pi): \{f \in C^A: \pi\,(f) = f\}$$

في مثال المربع، التلوينات الوحيدة التي لم تتغير من قبل الحركة R_1 هي جميع التلوينات السوداء f_1 وجميع التلوينات البيضاء f_{16}، لذلك

$$\mathrm{fix}_{D_4}(R_1) = \{f_1, f_{16}\}$$

التلوينات التي لم تتغير من قبل العمليات $F_{1,2}$ هي

$$\mathrm{fix}_{D_4}(F_{1,2}) = \{f_1, f_6, f_8, f_{16}\}$$

السؤال 199: بشكل عام، ما هو عنصر الزمرة π الذي يكون لديه $\mathrm{fix}_G(\pi) = C^A$ دائماً؟

الغاية: عدّ المدارات

علينا الآن إثبات أن المدارات تجزّئ مجموعة الدوال التي تتأثر من قبل الزمرة، حالما ننتهي من ذلك، سنعيد صياغة هدفنا الأساسي حول عد الترتيبات غير المتكافئة كما وأنها عدّ للمدارات.

لتكن A و C مجموعتين محدودتين ولتكن G زمرة التباديل من A. لتكن $f \in C^A$. ملاحظتنا الأولى هي أن المدارات جميعها ليست فارغة، وهذا ينتج عن حلك للمسألة الواردة في السؤال 198 الذي لاحظت فيه أن أي اقتران يقع ضمن مداره الخاص.

تتبع الملاحظة الثانية على الفور تقريباً. لأن f ينتمي إلى مداره الخاص، فإن هذا يعني أن كل عنصر في C^A يقع ضمن مدار معين؛ لذلك فإن اتحاد المدارات يساوي C^A وهي مجموعة الدوال التي تتأثر من قبل الزمرة.

لنكمل الإثبات بأن المدارات تجزّئ C^A، سنبيّن أن مجموعة المدارات تحتوي على مجموعات منفصلة وسنقوم بذلك من خلال إثبات أن أي مدارين ليسا منفصلين يجب أن يكونا متساويين.

المبرهنة 5.3.4: لتكن A و C مجموعتين محدودتين ولتكن G زمرة التباديل من A، وبالتالي فإن المدارات C^A تجزّئ C^A؛ أي أن المجموعة

$$\mathcal{O}: \{ \operatorname{orb}_G(f): f \in C^A\}$$

هي تجزئة من C^A.

الإثبات: لتكن A و C مجموعتين محدودتين ولتكن G زمرة التباديل من A. أثبتنا للتو أن $\mathcal{O}$ تحتوي على مجموعات غير فارغة والتي يكون ناتج اتحادها مساوياً لـ C^A، ويجب علينا الآن أن نثبت أن هذه المجموعات منفصلة.

افترض أن $\mathrm{orb}_G(f_1)$ و$\mathrm{orb}_G(f_2)$ هما مداران غير منفصلين، وليكن g أي اقتران ينتمي إلى كلا المدارين. هذا يعني، من خلال التعريف 3.25.، أن $g = \pi_1(f_1)$ و $g = \pi_2(f_2)$ لـ $\pi_1 \in G$، π_2.

سنثبت أن $\mathrm{orb}_G(f_1)$ و $\mathrm{orb}_G(f_2)$ من خلال بيان أن كل واحد منهما هو مجموعة جزئية من الآخر.

ليكن $h \in \mathrm{orb}_G(f_1)$، هذا يعني أن $h = \pi_1(f_1)$ لـ $\pi \in G$، ولكن لأن $\pi_1(f_1) = \pi_2(f_2)$؛ فإننا نستطيع كتابة $f_1 = {\pi_1}^{-1}(\pi_2(f_2))$. لذلك

$$h = \pi(f_1) = \pi\left(\pi_1^{-1}\left(\pi_2(f_2)\right)\right) = \underbrace{(\pi \circ \pi_1^{-1} \circ \pi_2)}_{=:\sigma}(f_2).$$

بانغلاق الزمرة G، فإن العملية σ تنتمي إلى G وهذا يعني أن $h = \sigma(f_2)$ حيث $\sigma \in G$. لذلك فإن $h \in \mathrm{orb}_G(f_2)$ وبالتالي $\mathrm{orb}_G(f_1) \subseteq \mathrm{orb}_G(f_2)$.

إن إثبات أن $\mathrm{orb}_G(f_1) \supseteq \mathrm{orb}_G(f_2)$ يشبه الإثبات السابق، وقد تم تركه لتقوم بحله في السؤال القادم. لذلك فإن $\mathcal{O}$ يجب أن تحتوي على مجموعات منفصلة وبذلك نكون قد أكملنا إثبات أن المدارات تجزّئ C^A.

السؤال 200: أثبت أن $\mathrm{orb}_G(f_1) \subseteq \mathrm{orb}_G(f_2)$.

لاحظنا في مثال تلوين المربع الوارد في القسم 51. أن هنالك ستة تلوينات غير متكافئة فقط وهذا يعني أن هنالك ستة مدارات.

السؤال 201: اكتب المدارات الستة في مثال المربع.

مبرهنة كوتشي – فروبينيوس – بيرنسايد

من أجل توضيح كيفية عد المدارات بطريقة فعالة، فإننا سنتطرق إلى المبرهنة التي تمكننا من فعل ذلك وسنثبتها في القسم 5.5.

المبرهنة 5.3.5 (كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد): لتكن A وC مجموعتين محدودتين ولتكن G زمرة التباديل من A ولتكن $\mathcal{O}$ مجموعة المدارات لـ C^A، وبالتالي فإن:

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \left|\text{fix}_G(\pi)\right|.$$

وبالتالي فإن تطبيق مبرهنة كوتشي – فروبينيوس – بيرنسايد (.C.F.B) يهدف إلى تحديد حجم كل واحدة من مجموعات النقاط الثابتة والقيام بذلك يتطلب العلم بهيكلية الدائرة لكل واحدة من عمليات الزمرة ودعنا نستخدم ذلك لإنهاء المثالين اللذين نعمل عليهما.

إنهاء مثال تلوين المربع

قمنا في الجدول5.1 بكتابة كل واحدة من عمليات الزمرة الثمان كحاصل ضرب دوائر منفصلة، وهذا يمكّن من تسهيل حساب أحجام مجموعات النقاط الثابتة.

ههنا الفكرة؛ فلعد التلوينات التي تُبقي عملية الزمرة عليها ثابتة، يكفينا عد الطرق لتعيين لون لكل دورة من دورات تلك العملية؛ وهذا لأن كل زاوية في دورة معينة يجب أن تحصل على اللون نفسه حتى يبقى التلوين ثابتاً تحت العملية.

على سبيل المثال، يمكن كتابة العملية R_2 على الشكل $(1\ 3)(2\ 4)$؛ وهذا يعني أنها تقوم بتبديل الزاويتين 1 و3 وتقوم بتبديل الزاويتين 2 و4. لذلك فإن كلتا الزاويتين 1 و3 يجب أن تحصلا على اللون نفسه وكذلك الحال بالنسبة إلى الزاويتين 2 و 4. هنالك خياران للونين (أسود أو أبيض) لكل واحدة من الزوايا لذلك فإن $|\text{fix}_{D_4}(R_2)| = 2^2$. يمكن كتابة العملية المحايدة I كالتالي: $(1)(2)(3)(4)$، لذلك فإن أي زاوية يمكن أن تحصل على أي لون لأن أي تلوين يبقى ثابتاً تحت العملية المحايدة وهذا يعني أن $|\text{fix}_{D_4}(I)| = 2^4$.

بشكل عام، وبوجود لونين، فإن عدد التلوينات التي تبقى ثابتة من خلال عملية معينة يساوي $2^{c(\pi)}$ حيث $c(\pi)$ هو عدد الدورات المنفصلة في التبديل π والجدول التالي يلخّص هذه المعلومات.

$\|fix_{D_4}(\pi)\|$	ضرب الدوائر المنفصلة	الحركة π
2^4	(1)(2)(3)(4)	I
2^1	(1 2 3 4)	R_1
2^2	(1 3)(2 4)	R_2
2^1	(1 4 3 2)	R_3
2^3	(1)(2 4)(3)	F_1
2^3	(1 3)(2)(4)	F_2
2^2	(1 2)(3 4)	$F_{1,2}$
2^2	(1 4)(2 3)	$F_{2,3}$

باستخدام مبرهنة كوتشي– فروبينيوس– بيرنسايد، فإن عدد المدارات، وبالتالي عدد التلوينات غير المتكافئة، يساوي:

$$\frac{1}{|G|} \times \sum_{\pi \in G} |\text{fix}_G(\pi)| = \frac{1}{8} \times (2^4 + 2^1 + 2^2 + 2^1 + 2^2 + 2^2 + 2^3 + 2^3)$$
$$= 6$$

وبالطبع فإن هذا يتوافق مع إجابتنا الابتدائية في القسم 1.5.

السؤال 202: جد الإجابة في حال توفر ثلاثة ألوان بدلاً من لونين.

إنهاء مثال تلوين الشبكة

بتطبيقنا لنفس الأفكار على مثال تلوين الشبكة الوارد في القسم 1.5 فإننا نتوصل إلى الجدول التالي. الزمرة ذات الصلة هنا هي C_4، وهي الزمرة الدورية ذات الرتبة 4 بتأثيرها على المربعات التسعة في الشبكة.

$\|\text{fix}_{C_4}(\pi)\|$	ضرب الدوائر المنفصلة	الحركة
2^9	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)	I
2^3	(1 3 9 7)(2 6 8 4)(5)	R_1
2^5	(1 9)(2 8)(3 7)(4 6)(5)	R_2
2^3	(1 7 9 3)(2 4 8 6)(5)	R_3

باستخدام مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد، فإن عدد التلوينات غير المتكافئة، يساوي:

$$\frac{1}{4} \times (2^9 + 2^3 + 2^5 + 2^3) = 140$$

حساب حجم مجموعة النقاط الثابتة

إن أسلوبنا في حساب أحجام مجموعات النقاط الثابتة يعتمد على النتيجة التالية. بلغة التلوينات، يقال بأن عملية الزمرة تثبّت التلوين عندما تكون كل دورة على وجه التحديد في تلك العملية أحادية اللون.

المبرهنة 5.3.6: لتكن A و C مجموعتين محدودتين، ولتكن G زمرة التباديل من A. لأي $f \in C^A$ و $\pi \in G$؛ يكون $\pi(f) = f$ إذا وفقط إذا كان f ثابتاً في كل دورة لـ π.

يستخدم الإثبات، الذي يطلبه منك التمرين 4، التعريف 5.3.1.

الملخص

لتكن G زمرة تؤثر على مجموعة الاقترانات C^A. حتى الآن، نستطيع التفكير بهذه الاقترانات كتلوينات.

- مدار $f \in fC^A$ هو مجموعة جزئية من C^A وهو يحتوي على عناصر C^A التي يمكن "الوصول إليها" من f بواسطة عمليات الزمرة.
- مجموعة النقاط الثابتة لـ $\pi \in G$ هي مجموعة جزئية من C^A وهي تحتوي على عناصر C^A التي لا تتغير من قبل π.

تمكّن مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد من حساب عدد المدارات بدلالة أحجام مجموعات النقاط الثابتة، وفي أمثلتنا كان من الممكن حساب حجم مجموعة النقاط الثابتة من خلال كتابة كل عنصر في الزمرة π كحاصل ضرب دوائر منفصلة.

التمارين

1. عد إلى مثال المربع، ولكن افترض أنه يمكن تلوين كل زاوية بالألون الأسود أو الأبيض أو الأحمر. ليكن f التلوين الذي يلون الزوايتين 1 و 2 باللون الأسود والزاوية 3 باللون الأبيض والزاوية 4 باللون الأحمر. اكتب كل التلوينات في مدار f.

2. كم عدد الطرق لبناء الشكل في التمرين 9 الوارد في القسم 2.5 إذا كان من الممكن لكل كرة أن تحمل واحداً من k لون؟ طبق مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد.

3. بكم طريقة مختلفة يمكن بناء مربع باستخدام أربع عصي وأربع كرات متماثلة؛ بحيث تحمل كل عصا اللون الأسود أو الأبيض؟ (أي أننا نلون الحواف وليس الزوايا).

(أ) رقّم أطراف المربع بـ a, b, c, d. جد هيكلية الدورة لكل عنصر في المجموعة الثنائية بتأثيرها على الحواف ثم طبق مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد.

(ب) الآن قم بتغيير السؤال إلى: بكم طريقة مختلفة يمكن بناء مربع باستخدام أربع عصي وأربع كرات؛ بحيث تحمل كل عصا اللون الأسود أو الأبيض وتحمل كل كرة اللون الأسود أو الأبيض؟ أجب عن السؤال باستخدام مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد.(مساعدة: تؤثر الزمرة الثنائية الآن على المجموعة $\{1,2,3,4,a,b,c,d\}$ من الزوايا والحواف).

4. أثبت المبرهنة 5.3.6.

5. يوضح هذا التمرين لمَ تعتبر مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد تعميماً لمبدأ التكافؤ. لنأخذ مثلاً حساب عدد الطرق المختلفة التي نستطيع من خلالها توزيع خمسة أشخاص على مقاعد حول طاولة دائرية وسنفترض مبدئياً أن المقاعد مرقمة أو يمكن تمييزها عن بعضها البعض بطريقة ما.

(أ) ما هي زمرة التماثل التي تؤثر على طرق الجلوس؟

(ب) كم عدد طرق الجلوس التي تبقى ثابتة من خلال العنصر المحايد؟

(ج) اشرح لمَ لا تبقى أي جلسة ثابتة من خلال كل عملية من عمليات الدوران؟

(د) استخدم مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد لإيجاد عدد طرق الجلوس المختلفة عندما تكون المقاعد غير متميزة.

6. كم كومة مختلفة يمكن تكوينها من 8 قطع نقدية، بحيث تكون القطع إما ذهبية أو فضية ولكنها تمتلك الحجم نفسه؟ يمكن ترك الكومة من دون تغيير أو قلبها.

7. عمم المسألة السابقة لكومة مكونة من n قطعة نقدية حيث يتم استخدام k نوع مختلف للقطع النقدية. (مساعدة: يرجى الانتباه إلى زوجية أو فردية n لأنها مهمة).

ملاحظات سريعة

كثيراً ما تُدعى مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد بمسلمة بيرنسايد (Burnside's Lemma) أو أحياناً مبرهنة بيرنسايد (Burnside's Theorem)، وفيها يبدو أن هذه الأسماء جميعها خاطئة. فنسبة إلى بحث أجراه نيومان (1970)؛ فإن كوتشي هو من أثبت أولاً النتيجة لحالة خاصة في عام 1845 ثم قام فروبينيوس بإثباتها في شكلها الحالي في عام 1887، أما الدالة ببيرنسايد فلم يحدث حتى ستينيات القرن الماضي حين قام بعض المؤلفين باستخدام تلك النتيجة التي وجدوها في كتاب

بيرنسايد لسنة 1911 حول مبرهنة الزمر، وفي غياب المرجعية لأصل تلك النتيجة، قاموا بنسبها إلى بيرنسايد وأصبح استخدام اسم "مسلمة بيرنسايد" تدريجياً شيئاً مألوفاً.

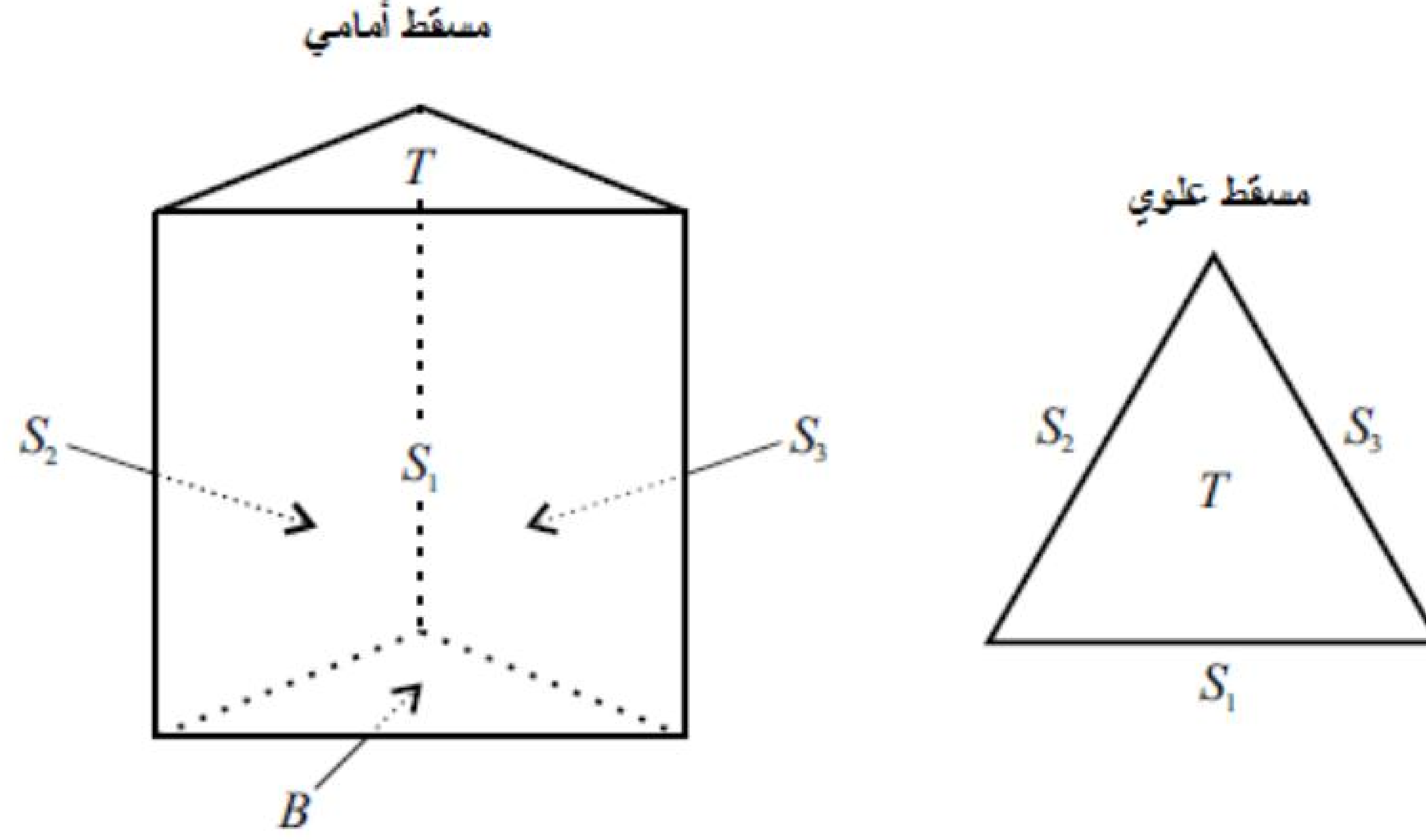
ولكن، خطأً أم صواباً، فإن العديد يعرفون النتيجة باسم مسلمة بيرنسايد وهذا ما جعلنا نُدخل اسمه، ولكن الورقة العلمية لنيومان بعنوان " المسلمة التي ليست لبيرنسايد" (A Lemma that is not Burnside's) تستحق القراءة وفيها يقترح أن تدعى المبرهنة بفرضية كوتشي- فروبينيوس.

4.5 استخدام مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد

الآن وقد أجبنا على مسألتي العدّ المطروحتين في القسم 1.5، فإننا سنكرّس هذا القسم لتوضيح كيفية تطبيق مبرهنة كوتشي - فروبينيوس- بيرنسايد من البداية للإجابة على أربع مسائل عدّ إضافية، وسنؤجل إثبات المبرهنة للقسم التالي.

المثال الأول: تلوين أوجه المنشور الثلاثي

لدى المنشور الثلاثي مثلث متساوي الأضلاع للقاعدة وآخر للقمة وجوانب مستطيلة. بكم طريقة مختلفة يمكن تلوين الأوجه الخمسة لهذا المنشور إذا أمكن تلوين كل وجه بواحد من k لون؟



الشكل 5.4. المنشور الثلاثي.

تظهر صورة المنشور الثلاثي في الشكل 5.4 بحيث إن القمة هي T والقاعدة هي B والجوانب هي S_1 و S_2 و S_3. سنحدد أولاً زمرة التماثل G للمنشور. هنالك ثلاث حركات دوران مع عقارب الساعة حول المحور الرأسي الذي يمر عبر مراكز القمة والقاعدة وهي: العنصر المحايد I، والدوران بزاوية $120°$ (R_1)، والدوران بزاوية $240°$ (R_2). نستطيع أيضاً تمرير محور عبر مركز كل جهة (عمودياً على تلك الجهة) وتدوير المنشور بزاوية $180°$ حول ذلك المحور؛ تدعى هذه العمليات F_1 و F_2 و F_3 نسبة إلى المحور الذي يمر عبر مراكز الجهات S_1 و S_2 و S_3 على التوالي. يوضّح الجدول التالي المعلومات المتعلقة بهذا الموضوع والمطلوبة لتطبيق مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد.

الحركة π	ضرب الدوائر المنفصلة	$\|\text{fix}_G(\pi)\|$
I	$(B)(T)(S_1)(S_2)(S_3)$	k^5
R_1	$(B)(T)(S_1\ S_2\ S_3)$	k^3
R_2	$(B)(T)(S_1\ S_3\ S_2)$	k^3
F_1	$(B\ T)(S_1)(S_2\ S_3)$	k^3
F_2	$(B\ T)(S_1\ S_3)(S_2)$	k^3
F_3	$(B\ T)(S_1\ S_2)(S_3)$	k^3

على سبيل المثال، تقوم الحركة F_2 بتبديل وجهي القمة والقاعدة؛ وتُبقي الوجه 2 ثابتاً ولكنها تبدل الوجهين 1 و 3، لذلك فإن $F_2 = (B\ T)(S_1\ S_3)(S_2)$. نستطيع تعيين واحد من k لون لكل دورة من الدورات الثلاث لذلك فإن $|\text{fix}_G(F_2)| = k^3$، وتتبع مدخلات العمليات الخمس الأخرى بشكل مشابه.

باستخدام مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد، فإن عدد التلوينات غير المتكافئة يساوي:

$$\frac{1}{6} \times (k^5 + k^3 + k^3 + k^3 + k^3 + k^3) = \frac{1}{6} \times (k^5 + 5k^3)$$

(كملاحظة جانبية، إن هذا يوضّح أيضاً أن $k^5 + 5 \times k^3$ يقبل القسمة على 6 لـ $k \geq 1$).

المثال الثاني: عدّ القلائد

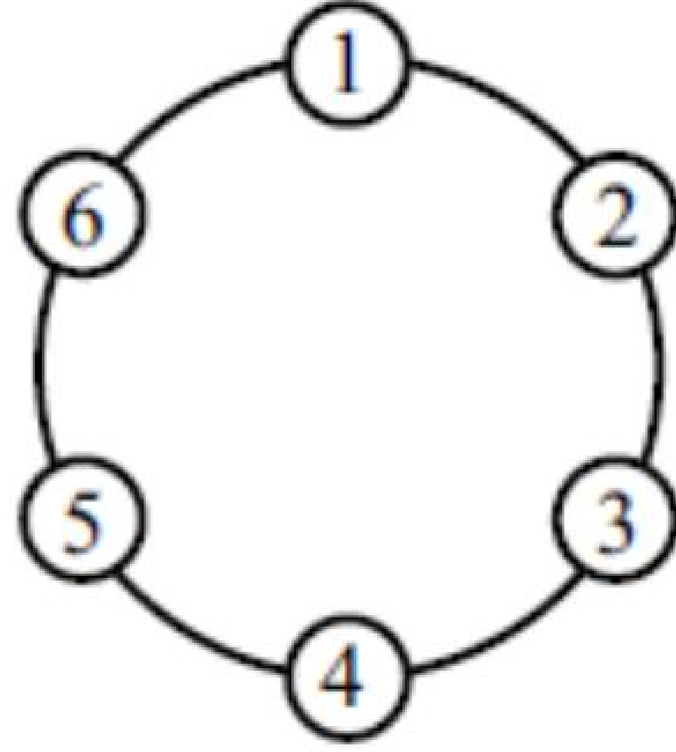
كم عدد القلائد المختلفة والمكونة من ست خرزات التي يمكن تكوينها بحيث تحمل كل خرزة لوناً من ثلاثة ألوان؟ كم عدد القلائد المختلفة والمكونة من سبع خرزات التي يمكن تكوينها بحيث تحمل كل خرزة لوناً من ثلاثة ألوان؟

الحركة π	ضرب الدوائر المنفصلة	$\lvert \text{fix}_{D_6}(\pi) \rvert$
I	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	3^6
R_1	(1 2 3 4 5 6)	3^1
R_2	(1 3 5)(2 4 6)	3^2
R_3	(1 4)(2 5)(3 6)	3^3
R_4	(1 5 3)(2 6 4)	3^2
R_5	(1 6 5 4 3 2)	3^1
F_1	(1)(2 6)(3 5)(4)	3^4
F_2	(1 3)(2)(4 6)(5)	3^4
F_3	(1 5)(2 4)(3)(6)	3^4
$F_{1,2}$	(1 2)(3 6)(4 5)	3^3
$F_{2,3}$	(1 4)(2 3)(5 6)	3^3
$F_{3,4}$	(1 6)(2 5)(3 4)	3^3

الجدول 5.5. هيكلية دوائر القلادة المكونة من ست خرزات.

تشبه زمرة التماثل لكل قلادة زمرة التماثل للمضلع المنتظم المكون من 6 أضلاع أو المضلع المنتظم المكون من 7 أضلاع على التوالي، وبالتالي فإننا نتعامل مع الزمرتين الثنائيتين D_6 و D_7.

للقلادة المكونة من ست خرزات، رتب القلادة في دائرة بحيث تكون الخرزات متباعدة بشكل متساوٍ ومرقمة كما هو موضح هنا:



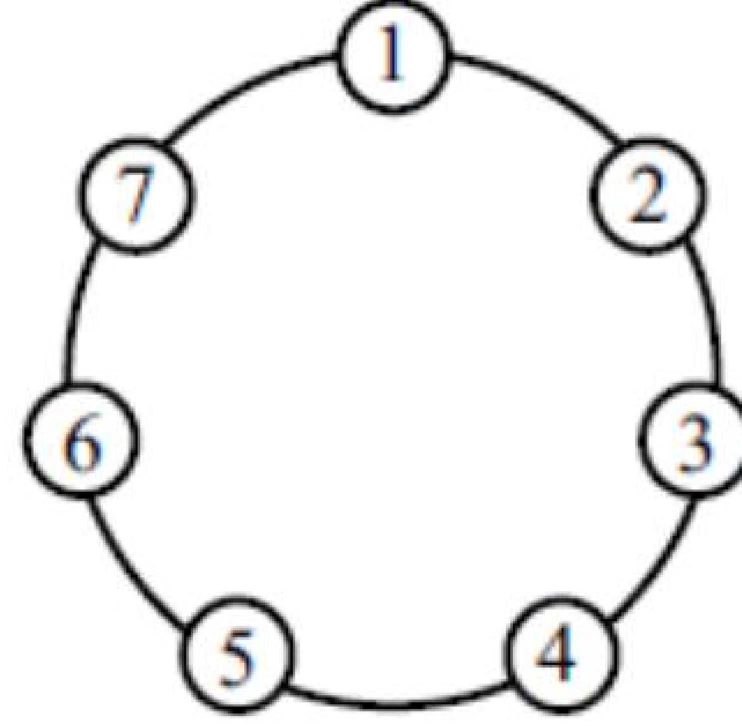
يوضح الجدول 5.5 هيكلية الدورات وعدد القلائد الثابتة من قبل كل عملية.

باستخدام مبرهنة كوتشي -فروبينيوس- بيرنسايد، فإن عدد القلائد المختلفة يساوي:

$$\frac{1}{12} \times (3^6 + 3 \times 3^4 + 4 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^1) = 92$$

أي أنه من بين الـ $3^6 = 729$ قلادة الأولى (أي تلك القلائد ذات الخرزات المرقمة والقلادة غير قابلة للحركة) يوجد فعلاً 92 احتمالاً متميزاً فقط.

للقلادة المكونة من سبع خرزات، رتبها كما هو موضح في الشكل التالي:



الحركة π	ضرب الدوائر المنفصلة	$\lvert \text{fix}_{D_7}(\pi) \rvert$
I	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)	3^7
R_1	(1 2 3 4 5 6 7)	3^1
R_2	(1 3 5 7 2 4 6)	3^1
R_3	(1 4 7 3 6 2 5)	3^1
R_4	(1 5 2 6 3 7 4)	3^1
R_5	(1 6 4 2 7 5 3)	3^1
R_6	(1 7 6 5 4 3 2)	3^1
F_1	(1)(2 7)(3 6)(4 5)	3^4
F_2	(1 3)(2)(4 7)(5 6)	3^4
F_3	(1 5)(2 4)(3)(6 7)	3^4
F_4	(1 7)(2 6)(3 5)(4)	3^4
F_5	(1 2)(3 7)(4 6)(5)	3^4
F_6	(1 4)(2 3)(5 7)(6)	3^4
F_7	(1 6)(2 5)(3 4)(7)	3^4

الشكل 5.6. هيكلية دوائر القلادة المكونة من سبع خرزات.

يعرض الجدول 5.6 المعلومات ذات الصلة وباستخدام مبرهنة كوتشي – فروبينيوس – بيرنسايد نستنتج أنه يوجد

$$\frac{1}{14} \times (3^7 + 7 \times 3^4 + 6 \times 3^1) = 198$$

قلادة مختلفة من سبع خرزات تستخدم ثلاثة ألوان من الخرز.

السؤال 203: ما هي الإجابة لكل مسألة عد للقلائد إذا كان عدد الألوان المتوفرة يساوي k بدلاً من ثلاثة؟

القلادة المكونة من n خرزة

بعد حل مسائل القلائد المكونة من ست خرزات وسبع خرزات، ولربما المكونة من تسع خرزات لوحدك أيضاً، ستبدأ بتكوين بعض الحس البديهي حول ما هو مطلوب لمسألة القلادة المكونة من n خرزة، ومن الواضح أن الخصائص العددية لـ n تلعب دوراً مهماً. انظر التمارين 15 و16.

المثال الثالث: مثال غير هندسي

تدارس العمليات التالية المطبقة على عدد ثنائي. العملية الأولى هي عملية الإزاحة (SHIFT) التي تزيح كل عدد منزلة واحدة إلى اليسار، مع الالتفاف عند نهاية العدد. على سبيل المثال،

$$.\mathrm{SHIFT}(00010) = 00100\ and\ SHIFT\ (01011) = 10110.$$

العملية الأخرى هي عملية القلب (FLIP) التي تحول كل 0 إلى 1 و كل 1 إلى 0. على سبيل المثال، $\text{FLIP}(00010) = 11101 \; and \; FLIP\;(01011) =$ 10100.

كم عدد الأعداد الثنائية المختلفة والمكونة من 5 أرقام التي يمكن تكوينها إذا تم اعتبار عددين من تلك الأعداد متكافئين في حال تم الحصول على أحدهما من الآخر من خلال أي دمج لعمليات الإزاحة (SHIFT) والقلب (FLIP)؟

على سبيل المثال، الأرقام التالية كلها متكافئة:

$$01001 \xrightarrow[\text{SHIFT}]{} 10010 \xrightarrow[\text{SHIFT}]{} 00101 \xrightarrow[\text{FLIP}]{} 11010 \xrightarrow[\text{SHIFT}]{} 10101.$$

بالتحضير لتكوين زمرة التماثل، دعنا نمثّل العدد الثنائي المكون من خمسة أرقام كـ $d_1d_2d_3d_4d_5$. سنحتاج إلى العملية المحايدة، وعملية الإزاحة (SHIFT) بمقدار مرة أو مرتين أو ثلاث أو أربع مرات، وعملية القلب (FLIP). يوضح الجدول التالي المعلومات ذات الصلة. (نستخدم d_i' للإشارة إلى أنه تم "قلب" قيمة الرقم d_i).

الحركة π	النتيجة	ضرب الدوائر المنفصلة
I	$d_1d_2d_3d_4d_5$	$(d_1)(d_2)(d_3)(d_4)(d_5)$
S_1	$d_2d_3d_4d_5d_1$	$(d_1\ d_5\ d_4\ d_3\ d_2)$
S_2	$d_3d_4d_5d_1d_2$	$(d_1\ d_4\ d_2\ d_5\ d_3)$
S_3	$d_4d_5d_1d_2d_3$	$(d_1\ d_3\ d_5\ d_2\ d_4)$
S_4	$d_5d_1d_2d_3d_4$	$(d_1\ d_2\ d_3\ d_4\ d_5)$
F	$d_1'd_2'd_3'd_4'd_5'$	? ? ?

ولكن ماذا عن عملية القلب (FLIP)، F؟ لا نستطيع حساب هيكلية الدورات الخاصة بها كما فعلنا لعملية الإزاحة (SHIFT)، وذلك لأن عملية القلب (FLIP) تغير "قيمة" كل رقم وليس موقعه؛ وهذا يعني أننا، على عكس جميع الأمثلة السابقة، لا نتعامل مع زمرة تبديل. بالإضافة إلى ذلك، فإنه لا يمكن لزمرة التماثل أن تتكون فقط من العمليات في $H := \{I, S_1, S_2, S_3, S_4, F\}$ لأن هذه المجموعة ليست منغلقة تحت التركيب وبالتالي هي ليست زمرة. على سبيل المثال، إذا قمنا بتطبيق S_2 أولاً ثم F فإننا نحصل على

$$\begin{aligned} FS_2(d_1d_2d_3d_4d_5) &= F\left(S_2(d_1d_2d_3d_4d_5)\right) \\ &= F(d_3d_4d_5d_1d_2) \\ &= d_3'd_4'd_5'd_1'd_2'. \end{aligned}$$

(الرمز FS_2 هو اختصار لـ $F \circ S_2$ وهو تركيب F مع S_2). لا توجد أي طريقة للوصول من $d_1d_2d_3d_4d_5$ إلى $d_3'd_4'd_5'd_1'd_2'$ بعملية واحدة في المجموعة H المعرفة أعلاه، لذلك فإن H ليست منغلقة وبالتالي هي ليست زمرة.

نستطيع جعلها زمرة من خلال إضافة أربع عمليات أخرى – تلك العمليات على الشكل FS_i

لـ $i = 1, 2, 3, 4$. تستطيع بعدها أن تتحقق أن:

$$G := \{I, S_1, S_2, S_3, S_4, F, FS_1, FS_2, FS_3, FS_4\}$$

هي فعلاً زمرة. ليس ضرورياً أن تقوم ببناء جدول الزمرة المكون من عشرة صفوف وعشرة أعمدة لأن تحققاً بديهياً يجب أن يكون كافياً.

السؤال 204: ما هي عملية الزمرة التي هي الناتج الصافي من تطبيق S_3 متبوعةً بـ S_4؟ F متبوعةً بـ S_3؟ FS_2 متبوعةً بـ S_4؟ S_4 متبوعةً بـ FS_2؟ هل هذه الزمرة تبديلية؟

الآن، من أجل تطبيق مبرهنة كوتشي- فروبينيوس - بيرنسايد فإننا بحاجة إلى أحجام مجموعات النقاط الثابتة:

الحركة π	$\|\text{fix}_G(\pi)\|$	الحركة π	$\|\text{fix}_G(\pi)\|$
I	2^5	F	0
S_1	2^1	FS_1	0
S_2	2^1	FS_2	0
S_3	2^1	FS_3	0
S_4	2^1	FS_4	0

تساعد هيكلية الدورات التي تم حسابها في الجدول السابق في حساب أحجام مجموعات النقاط الثابتة للعمليات الخمس الأولى. أما بالنسبة إلى العمليات الخمس المتبقية، فلا تُبقي أيٌّ منها أيَّ عدد ثنائي مكون من خمسة أرقام ثابتاً.

السؤال 205: اشرح لمَ.

أخيراً، باستخدام مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد، يوجد

$$\frac{1}{10} \times (2^5 + 2^1 + 2^1 + 2^1 + 2^1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0) = 4$$

أعداد ثنائية مكونة من خمسة أرقام تحت هذا المفهوم للتكافؤ.

السؤال 206: أعط مثلاً عن كل فئة من فئات التكافؤ الأربع.

المثال الرابع: تلوين الشبكة ذات البعد 3×3 بطريقة محددة

كم عدد تلوينات الأبيض والأسود للشبكة ذات البعد 3×3 التي لديها خمسة مربعات سوداء وأربعة مربعات بيضاء على وجه التحديد؟

في سؤال تلوين الشبكة الأساسي الوارد في القسم 51.، كانت المجموعة C^A هي مجموعة الـ $2^9 = 512$ تلويناً ثنائياً ممكناً. في هذه الحالة، تكون C^A هي مجموعة كل التلوينات الثنائية الممكنة التي تستخدم خمسة مربعات سوداء وأربعة مربعات بيضاء، والتي يوجد منها $\binom{9}{5}$، لذلك تبقى زمرة تماثل الشبكة كما هي ولكن المجموعة C^A تتغير؛ وهذا يتطلب إعادة حساب حجم كل مجموعة من مجموعات النقاط الثابتة.

تُبقي العملية المحايدة I جميع الـ $\binom{9}{5}$ تلويناً ثابتة. لتحديد عدد التلوينات التي تُبقي عليها العملية R_1 ثابتةً، قم بتفحّص هيكلية الدوائر الخاصة بها:

$$R_1 = (1397)(2684)(5)$$

لأن كل تلوين يحتوي على خمسة مربعات سوداء وأربعة مربعات بيضاء على وجه التحديد، فإن هذه العملية تثبّت لونين فقط. هذا لأن المربعات في الدورة (1 3 9 7) يجب أن تكون جميعها سوداء أو جميعها بيضاء. بمجرد تلوين تلك

المربعات، فإن المربعات (4 8 6 2) يجب أن تحمل اللون المقابل، وهذا يُنتج أربعة مربعات سوداء وأربعة مربعات بيضاء، لذلك فإن المربع حامل الرقم 5 يجب أن يحمل اللون الأسود. للسبب ذاته، تثبّت العملية R_3 أيضاً لونين فقط.

على الرغم من أن العملية $R_2 = (1\,9)(2\,8)(3\,7)(4\,6)(5)$ تشتمل على دورات أكثر، إلا أن طريقة عد التلوينات التي تُبقي عليها هذه العملية ثابتةً تبقى ذاتها وهنالك ستة منها ككل.

السؤال 207: اعرض التفاصيل (فكر بحالات) التي توضح أن العملية R_2 تثبّت ستة تلوينات.

يلخّص الجدول التالي النتائج:

الحركة π	ضرب الدوائر المنفصلة	$\|\text{fix}_{C_4}(\pi)\|$
I	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)	$\binom{9}{5}$
R_1	(1 3 9 7)(2 6 8 4)(5)	2
R_2	(1 9)(2 8)(3 7)(4 6)(5)	6
R_3	(1 7 9 3)(2 4 8 6)(5)	2

باستخدام مبرهنة كوتشي – فروبينيوس – بيرنسايد، فإن عدد التلوينات غير المتكافئة يساوي:

(5.2)

$$\frac{1}{4}\left(\binom{9}{5} + 2 + 6 + 2\right) = 34$$

من الجدير بالملاحظة أنه بتحديدنا لنوع التلوين (هنا، خمسة مربعات سوداء وأربعة مربعات بيضاء، بدلاً من أي عدد لكل نوع) فإن تحديد حجم كل مجموعة من مجموعة النقاط الثابتة يصبح أقل وضوحاً. تستخدم مبرهنة بوليا للتعداد، وهو موضوع القسم 6.5، دوال التوليد لتعالج هذه الصعوبة.

الملخص

يهدف تطبيق مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد لفهم زمرة التماثل للكائن موضع السؤال ثم لتحليل هيكلية الدورات الخاصة به. في العديد من المسائل، يمكننا الاستفادة من زمر تماثل معروفة كالزمرة الثنائية D_n أو الزمرة الدورية C_n، لكن مسائل أخرى تتطلب البداية من نقطة الصفر.

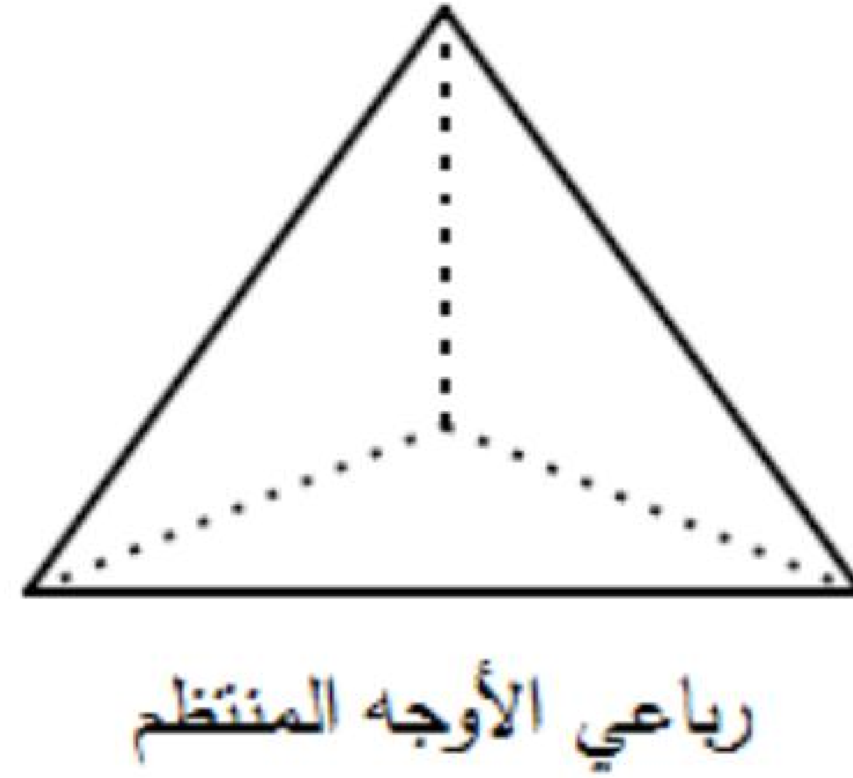
التمارين

1. أجب عن سؤال المنشور الثلاثي ولكن في حالة كانت القاعدة والقمة للمنشور مثلثات متساوية الساقين (ليست متساوية الأضلاع).

2. تدارس فكرة تلوين الزوايا الست في المنشور الثلاثي في المثال الأول. حدد كيفية عمل زمرة التماثل على الزوايا، ثم قم بحساب عدد التلوينات غير المتكافئة بحيث تحمل كل زاوية لوناً واحداً من بين k لون.

3. كم عدد القلائد المكونة من سبع خرزات التي يمكن تكوينها بحيث تحمل كل خرزة اللون الأحمر أو الأزرق؟ كم عدد القلائد التي لديها ثلاث خرزات حمراء وأربع خرزات زرقاء على وجه التحديد؟

4. بكم طريقة مختلفة يمكننا تلوين الزوايا الأربع في رباعي الأوجه المنتظم إذا كانت كل زاوية تحمل واحداً من بين k لون؟ (مساعدة: حجم زمرة تماثل رباعي الأوجه المنتظم يساوي 12، وكل وجه فيه هو عبارة عن مثلث متساوي الأضلاع).

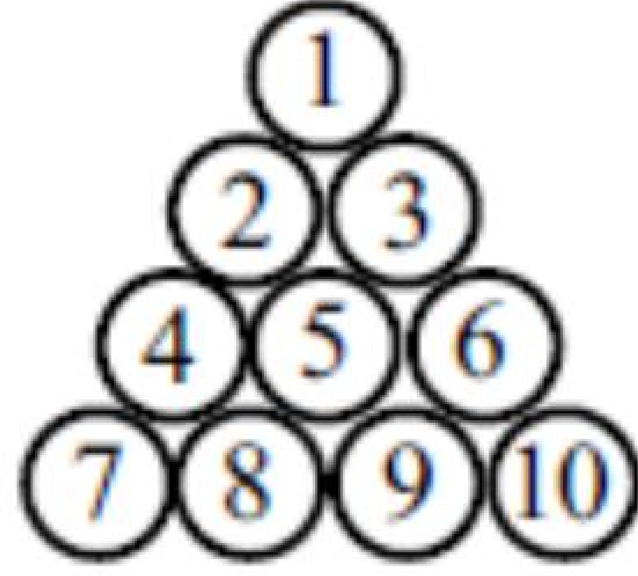


رباعي الأوجه المنتظم

5. بكم طريقة مختلفة يمكننا تلوين الأوجه الستة للمكعب إذا كان كل وجه يحمل واحداً من ثلاثة ألوان مختلفة؟ من بين تلك التلوينات، كم عدد تلك التي يكون لديها وجه واحد على الأقل من كل لون؟ (مساعدة: حجم زمرة تماثل المكعب يساوي 24).

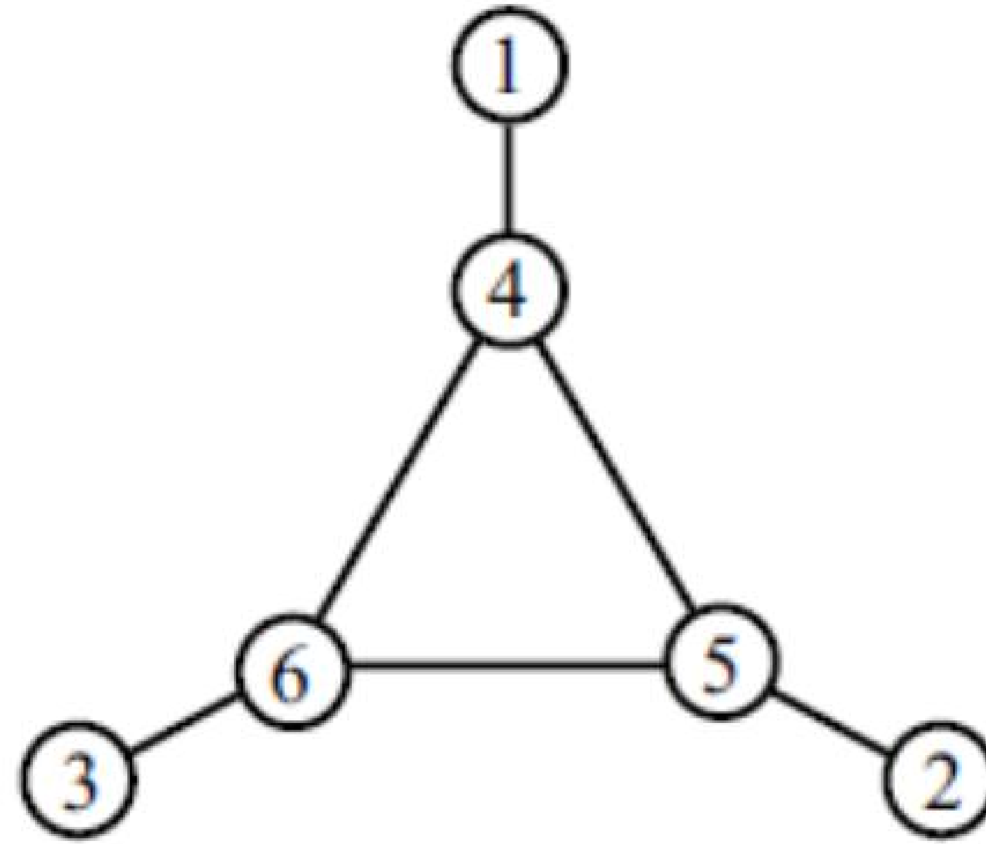
6. أعد التمرين السابق ولكن لتلوين الزوايا الثمان للمكعب.

7. بكم طريقة مختلفة يمكننا تكوين تصميم للشكل التالي باستخدام قطع البوكر الحمراء والخضراء والبيضاء؟ التصميم موضوع على طاولة بحيث يمكن النظر إليه من أي زاوية. (مواقع القطع مرقمة للسهولة).



8. الآن، أعد السؤال السابق ولكن افترض أن التصميم هو هيكلية الكرة التي تكون حرة الدوران في الفضاء.

9. كم عدد الهيكليات المختلفة الممكنة للتصميم التالي، بحيث إن كل كرة يمكن أن تحمل واحداً من أربعة ألوان وكل عصا يمكن أن تحمل واحداً من ثلاثة ألوان؟



10. كم عدد تلوينات الأبيض والأسود المختلفة للشبكة ذات البعد 3×3 التي لديها ثلاثة مربعات سوداء وستة مربعات بيضاء على وجه التحديد؟ كم عدد التلوينات التي لديها مربعان سوداوان وسبعة مربعات بيضاء على وجه التحديد؟

11. أعد مسألة عد تلوينات الأبيض والأسود للشبكة ذات البعد 3×3، ولكن هذه المرة للشبكات ذات الأبعاد 4×4 و 5×5.

12. عمم المسألة السابقة لعد الـ k تلوينات للشبكة ذات البعد $n \times n$.

13. اكتب المدارات الأربعة في التمرين 3 من هذا القسم، أي وضح كيف تجزّأ مجموعة الأعداد الثنائية المكونة من 5 أرقام إلى فئات تكافؤ.

14. كم عدداً مختلفاً يمكن تكوينه من الأعداد الثنائية المكونة من 6 أرقام إذا تم اعتبار عددين من هذه الأعداد متكافئين إذا تم الحصول على أحدهما من الآخر من خلال أي دمج لعمليات الإزاحة (SHIFT) والقلب (FLIP)؟ (مساعدة: هنالك أمر ما هنا غير موجود في المثال الموضح في هذا الكتاب).

15. لدينا قلادة مكونة من p خرزة حيث p هو عدد أولي أكبر من 2. أثبت أن هيكلية الدورية لكل دوران في مسطح (باستثناء الدوران بصفر درجة، أو العنصر المحايد) تحتوي على دورة واحدة على وجه التحديد.

16. كم عدد القلائد المختلفة المكونة من n خرزة والتي يمكن تكوينها حيث يمكن أن تحمل كل خرزة واحداً من k لون؟ اجعل الصيغة مفيدة قدر الإمكان. (مساعدة: سوف تحتاج إلى استخدام الخصائص العددية للعدد الصحيح n).

5.5 إثبات مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد

سنقوم في هذا القسم الموجز بإثبات مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد، وفيه أيضاً نستخدم، إضافة إلى المدارات ومجموعات النقاط الثابتة، مفهوم الموازن.

التعريف 5.5.1 (الموازن (Stabilizer)): لتكن A و C مجموعتين محدودتين، ولتكن G زمرة التباديل من A. لأي $f \in C^A$، يكون **موازن $\boldsymbol{f}$ تحت $\boldsymbol{G}$** هو المجموعة

$$\mathrm{stab}_G(f) := \{\pi \in G : \pi(f) = f\}$$

لذلك، فإن موازن الدالة هو مجموعة كل عمليات الزمرة التي تُبقي على تلك الدالة من دون تغيير.

سنقسم إثبات مبرهنة كوتشي - فروبينيوس- بيرنسايد إلى ثلاثة أجزاء حيث يعتبر الجزء الأول هو الجزء الأكثر تقنية.

الخطوة 1: ربط المدارات والموازنات

سنقوم مرة أخرى، من أجل فهم الارتباط بين المدارات والموازانات، باستخدام مسألة تلوين المربع الواردة في القسم 1.5 للتوضيح. يوضح الجدول 5.7 المدار والموازن لكل واحد من التلوينات الستة عشر. (عد إلى الشكل 5.1). لكل

تلوين، يكون حجم مداره مضروباً في حجم موازنه مساوياً لـ 8 وهو حجم زمرة التماثل.

خذ أي تلوين، لنقل f_2. مداره هو $\{f_2, f_3, f_4, f_5\}$. لكل تلوين في هذا المدار، عرّف عملية الزمرة التي تأخذ f_2 إلى ذلك التلوين، ولذلك أعد كتابة المدار كالتالي:

$$\mathrm{orb}_{D_4}(f_2) = \{\underbrace{I(f_2)}_{=f_2},\ \underbrace{R_1(f_2)}_{=f_3},\ \underbrace{F_2(f_2)}_{=f_4},\ \underbrace{F_{2,3}(f_2)}_{=f_5}\}$$

ثمة طرق أخرى ممكنة لإعادة كتابة المدار.على سبيل المثال، قد نعيد كتابة f_4 على الشكل $R_2(f_2)$.

لأن حجم الزمرة يساوي حاصل ضرب أحجام مدار f_2 وموازنه، فإن مبدأ الضرب يقترح أننا قادرون على تكوين تطابق ذي معنى من النوع واحد لواحد بين عناصر وأزواج الزمرة الثمانية (O, S) حيث O هي من مدار f_2 و S هي من موازنه.

خذ أي عنصر من عناصر الزمرة، لنقل R_2. مع أي زوج (O, S) علينا أن نربط R_2؟ إن الاختيار الطبيعي للعنصر O الخاص بالمدار هو $R_2(f_2)$ والذي يساوي f_4. الآن، إن الفكرة الأساسية في الإثبات اللاحق تأتي من اختيار العنصر الموازن S. نحن نعلم، من الطريقة التي كتبنا بها المدار في الأعلى، أن $F_2(f_2) = f_4$، لذلك فإن لحركة

الدوران R_2 التأثير نفسه على التلوين f_2 الذي تفعله حركة القلب F_2 . فلإنشاء عنصر في الموازن، اختر فقط:

$$S := F_2^{-1} \circ R_2.$$

من المضمون أن يكون هذا ضمن الموازن لأن كلتا العمليتين F_2 وR_2 لديهما التأثير نفسه على f_2:

$$\left(F_2^{-1} \circ R_2\right)(f_2) = F_2^{-1}\left(R_2(f_2)\right) = F_2^{-1}\left(F_2(f_2)\right) = f_2.$$

لذلك فإن R_2 يجب أن تُربط مع $\left(F_2{}^{-1} \circ R_2\right)$.

السؤال 208: باستخدام جدول الزمر لتماثلات المربع (الجدول 35.)، ما هو عنصر الزمرة الذي يساوي $F_2^{-1} \circ R_2$ ؟

لمعالجة الحالة بشكل عام، افترض أن مدار الدالة f لديه الحجم n، لنقل

(5.3)

$$\text{orb}_G(f) = \left\{\sigma_1(f),\ \sigma_2(f),\ \ldots,\ \sigma_n(f)\right\}.$$

ههنا فإن $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ هي عناصر متميزة من G. سنربط $\pi \in G$ مع الزوج

$$\left(\pi(f),\ \sigma_j^{-1} \circ \pi\right)$$

حيث σ_j هو ذلك العنصر في الزمرة الذي تم إدراجه في المدار (5.3) والذي يحقق نفس التأثير الذي تحققه π على f. إن العنصر الثاني من الزوج ينتمي فعلاً إلى الموازن لأن

$$\left(\sigma_j^{-1} \circ \pi\right)(f) = \sigma_j^{-1}\left(\pi(f)\right) = \sigma_j^{-1}\left(\sigma_j(f)\right) = f.$$

لذلك فإن هذه الدالة معرّفة جيداً، ولإكمال الإثبات، سنبين أنها دالة تقابلية.

f	$\text{orb}_{D_4}(f)$	$\text{stab}_{D_4}(f)$	$\lvert\text{orb}_{D_4}(f)\rvert \times \lvert\text{stab}_{D_4}(f)\rvert$
f_1	$\{f_1\}$	D_4	$1\times 8 = 8$
f_2	$\{f_2, f_3, f_4, f_5\}$	$\{I, F_1\}$	$4\times 2 = 8$
f_3	$\{f_2, f_3, f_4, f_5\}$	$\{I, F_2\}$	$4\times 2 = 8$
f_4	$\{f_2, f_3, f_4, f_5\}$	$\{I, F_1\}$	$4\times 2 = 8$
f_5	$\{f_2, f_3, f_4, f_5\}$	$\{I, F_2\}$	$4\times 2 = 8$
f_6	$\{f_6, f_7, f_8, f_9\}$	$\{I, F_{1,2}\}$	$4\times 2 = 8$
f_7	$\{f_6, f_7, f_8, f_9\}$	$\{I, F_{2,3}\}$	$4\times 2 = 8$
f_8	$\{f_6, f_7, f_8, f_9\}$	$\{I, F_{1,2}\}$	$4\times 2 = 8$
f_9	$\{f_6, f_7, f_8, f_9\}$	$\{I, F_{2,3}\}$	$4\times 2 = 8$
f_{10}	$\{f_{10}, f_{11}\}$	$\{I, R_2, F_1, F_2\}$	$2\times 4 = 8$
f_{11}	$\{f_{10}, f_{11}\}$	$\{I, R_2, F_1, F_2\}$	$2\times 4 = 8$
f_{12}	$\{f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15}\}$	$\{I, F_1\}$	$4\times 2 = 8$
f_{13}	$\{f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15}\}$	$\{I, F_2\}$	$4\times 2 = 8$
f_{14}	$\{f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15}\}$	$\{I, F_1\}$	$4\times 2 = 8$
f_{15}	$\{f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15}\}$	$\{I, F_2\}$	$4\times 2 = 8$
f_{16}	$\{f_{16}\}$	D_4	$1\times 8 = 8$

الجدول 5.7. المدارات والموازنات في مثال المربع.

المساعدة 5.25.: لتكن A و C مجموعتين محدودتين، ولتكن G زمرة التباديل من A. بالتالي لأي $f \in C^A$، يكون لدينا

$$\left|\text{orb}_G(f)\right| \times \left|\text{stab}_G(f)\right| = |G|.$$

الإثبات: لتكن A و C مجموعتين محدودتين، ولتكن G زمرة التباديل من A. لتكن $f \in C^A$ وافترض أن لدى مداره n عنصر مختلف كما هو مُدرج في (5.3) أعلاه. عرّف الدالة $G: F \rightarrow \text{orb}_G(f) \times \text{stab}_G(f)$ من خلال

$$\tau) = \left(\pi(f),\ \sigma_j^{-1} \circ \pi\right)$$ حيث σ_j تحقق $\pi(f) =$

والذي أثبتنا للتوّ أنه معرّف جيداً وسنوضح الآن أن $\mathcal{F}$ هي دالة تقابلية.

$\mathcal{F}$ هي دالة واحد – لواحد: لتكن $\pi, \tau \in G$ وافترض أن $\mathcal{F}(\pi) = \mathcal{F}(T)$. هذا يعني أنه لأعداد معينة كـ j و k،

$$\underbrace{\left(\pi(f),\ \sigma_j^{-1} \circ \pi\right)}_{=\mathcal{F}(\pi)} = \underbrace{\left(\tau(f),\ \sigma_k^{-1} \circ \tau\right)}_{=\mathcal{F}(\tau)}$$

حيث إن $\pi(f) = \sigma_j(f)$ و $\tau(f) = \sigma_k(f)$ لأعداد معينة كـ j و k. لكن $\pi(f) = \tau(f)$ لأن المكونات الأولى للأزواج متساوية، وبالتالي فإن $\sigma_j = \sigma_k$. لأن المكونات الثانية للأزواج متساوية، سنستخدم $\sigma_j = \sigma_k$ وحذف الجزء اليسار لبيان أن:

$$\sigma_j^{-1} \circ \pi = \sigma_k^{-1} \circ \tau \implies \sigma_j^{-1} \circ \pi = \sigma_j^{-1} \circ \tau \implies \pi = \tau.$$

لذلك فإن $\mathcal{F}$ هي دالة واحد - لواحد.

$\mathcal{F}$ هي دالة شاملة: لتكن $(\sigma_j(f), \tau)$ عناصر في المدى المساعد. يجب أن نجد $G \ni \pi$ التي ترتبط مع الأزواج. عرف $\pi = \tau \circ \sigma_j$. بالتالي، لأن τ تنتمي إلى الموازن،

$$\pi(f) = (\sigma_j \circ \tau)(f) = \sigma_j(\tau(f)) = \sigma_j(f)$$

وبالتالي فإن العنصر الأول في $\mathcal{F}(\pi)$ يساوي $\sigma_j(f)$. العنصر الثاني هو

$$\sigma_j^{-1} \circ \pi = \sigma_j^{-1} \circ (\sigma_j \circ \tau) = \tau$$

لذلك بالفعل إن $\mathcal{F}(\pi) = (\sigma_j(f), \tau)$ ولذلك فإن $\mathcal{F}$ هو اقتران شامل. ■

السؤال 209: افترض أن $|G|$ هو عدد أولي. ماذا تستطيع أن تقول عن حجم أي مدار أو موازن؟

الخطوة 2: صيغة لعدد المدارات

سنشتق فيما يلي صيغة لعدد المدارات.

الفرضية المساعدة 5.35.: لتكن A و C مجموعتين محدودتين، ولتكن G زمرة التباديل من A، ولتكن $\mathcal{O}$ مجموعة المدارات لـ C^A. بالتالي فإن لدينا

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in C^A} |\text{stab}_G(f)|.$$

الإثبات: لتكن A و C مجموعتين محدودتين، ولتكن G زمرة التباديل من A.

نعلم من خلال الفرضية المساعدة 5.25. أنه لأي $f \in C^A$،

$$\frac{1}{\left|\mathrm{orb}_G(f)\right|} = \frac{1}{|G|} \times \left|\mathrm{stab}_G(f)\right|.$$

قم بجمع كلا الطرفين لجميع الاقترانات $f \in C^A$ لتحصل على

$$\sum_{f \in C^A} \frac{1}{\left|\mathrm{orb}_G(f)\right|} = \frac{1}{|G|} \times \sum_{f \in C^A} \left|\mathrm{stab}_G(f)\right|.$$

مجموع الطرف الأيسر يساوي $\mathcal{O}$، وهو العدد الكلي للمدارات. ■

السؤال 210: برّر السطر الأخير من الإثبات.

الخطوة 3: تعديل الصيغة للحصول على مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد

توضح الفرضية المساعدة التالية كيفية استبدال المجموع في الفرضية المساعدة 5.5.3 بمجموع آخر يكون عدد حدوده مساوياً لحجم الزمرة G وليس لحجم التلوينات (أي الدوال) C^A، حيث يمنع هذا التعديل من تزايد عبء العمل كلما ازداد عدد الألوان.

الفرضية المساعدة 5.5.4: لتكن A و C مجموعتين محدودتين، ولتكن G زمرة التباديل من A. بالتالي فإن لدينا

$$\sum_{f \in C^A} \left|\text{stab}_G(f)\right| = \sum_{\pi \in G} \left|\text{fix}_G(\pi)\right|.$$

إثبات توافقي: كم يوجد من الأزواج $(\pi, f) \in G \times C^A$ بحيث إن $\pi(f) = f$؟

الإجابة 1: سنعتمد هنا على الدالة f. من خلال التعريف 5.5.1، هنالك $|\text{stab}_G(f)|$ عنصراً من G تحقق كون $f = \pi(f)$، وبالجمع لجميع الدوال في C^A، نحصل على $\sum_{f \in C^A} |\text{stab}_G(f)|$ زوجاً ممكناً ككل.

الإجابة 2: سنعتمد هذه المرة على عنصر الزمرة π. من خلال التعريف 5.5.3، يوجد $|\text{fix}_G(\pi)|$ عنصراً من C^A تحقق كون $\pi(f) = f$، وبالجمع لجميع العناصر في G، نحصل على $\sum_{\pi \in G} |\text{fix}_G(\pi)|$ زوجاً ممكناً ككل.

■

تنتج مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد (المبرهنة 3.55.) الآن مباشرة من خلال جمع نتائج الفرضيات المساعدة 5.5.3 و5.5.4.

6.5 دليل الدورة التسلسلي ومبرهنة بوليا

تمكّن مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد من تسهيل عملية الحساب في المسائل التي نبحث فيها عن عدد "التلوينات" غير المتكافئة من دون مزيد من القيود.

لكن إذا وضعنا شرطاً، كأن يكون لدينا خمسة مربعات سوداء وأربعة مربعات بيضاء في مثال الشبكة، فإن مجموعة التلوينات تتغير، وقد نضطر إلى إعادة حساب أحجام مجموعات النقاط الثابتة. تستخدم مبرهنة بوليا للتعداد دالة توليد لتكوين لائحة بالتلوينات تبعاً لخصائص معينة، وهي مرن بما فيه الكفاية للإجابة عن العديد من مسائل العدّ في وقت واحد.

سنعرض مبرهنة بوليا للتعداد (المبرهنة 5.6.2) من دون إثبات، وبدلاً من ذلك سنركز على التطبيقات الخاصة بها. هنالك العديد من المراجع الجيدة للقارئ المهتم بالإثبات مثل كتب إيريكسون (Erickson) (1996) أو بوغارت (Bogart) (1990) أو روبرت وتيسمان (Robert & Tesman) (2004).

دليل الدورة التسلسلي الخاص بالزمرة

استعداداً لفهم مبرهنة بوليا للتعداد، سنعرض أولاً دليل الدورة التسلسلي الخاص بالزمرة (The Cycle of a Group). دليل الدورة التسلسلي (Cycle Index) هو مقدار متعدد الحدود الذي يشفّر هيكلية الدورة لعناصر الزمرة.

سنوضح ههنا كيفية العمل على مثال المربع الوارد في القسم 1.5. لدى الحركة $F_1 = (1)(2\,4)(3)$ دورتان من عنصر واحد ودورة واحدة بعنصرين، ولذلك سنستخدم المقدار متعدد الحدود $z_1^2 z_2$ لتمثيل هذا. لدى الحركة I أربع دورات مكونة

من عنصر واحد، ولذلك سنستخدم المقدار z_1^4، في حين لدى الحركة R_1 دورة واحدة مكونة من أربعة عناصر، لذلك فإن مقدارها هو z_4، وتظهر القائمة الكاملة للمقادير في الأسفل.

الحركة π	ضرب الدوائر المنفصلة	الحد في رقم الدورة
I	(1)(2)(3)(4)	z_1^4
R_1	(1 2 3 4)	z_4
R_2	(1 3)(2 4)	z_2^2
R_3	(1 4 3 2)	z_4
$F_{2,3}$	(1 4)(2 3)	z_2^2
$F_{1,2}$	(1 2)(3 4)	z_2^2
F_1	(1)(2 4)(3)	$z_1^2 z_2$
F_2	(1 3)(2)(4)	$z_1^2 z_2$

وبالتالي فإن دليل الدورة التسلسلي Z يعرّف على أنه مجموع هذه الحدود مقسوماً على حجم الزمرة:

(5.4)

$$\begin{aligned} Z(z_1, z_2, z_3, z_4) &:= \frac{1}{8}\left(z_1^4 + z_4 + z_2^2 + z_4 + z_2^2 + z_2^2 + z_1^2 z_2 + z_1^2 z_2\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(z_1^4 + 2z_1^2 z_2 + 3z_2^2 + 2z_4\right). \end{aligned}$$

السؤال 211: ما هو دليل الدورة التسلسلي لزمرة التماثلات في مسألة الشبكة؟

بشكل عام، افترض أن لدى عنصر الزمرة دورات عددها C_1 ذات الطول 1، ودورات عددها C_2 ذات الطول 2، وهكذا. بالتالي فإن دليل الدورة التسلسلي الذي يقدمه هذا العنصر هو متعدد الحدود التالي:

$$z_1^{c_1} z_2^{c_2} \dots z_m^{c_m}$$

حيث m هو الطول المصاحب لأكبر دورة، ويكون دليل الدورة التسلسلي مساوياً لمعدل متعددات الحدود المذكورة أعلاه. لاحظ التشابه في الشكل مع صيغة مبرهنة كوتشي – فروبينيوس– بيرنسايد (المبرهنة 3.55.).

التعريف 6.15. (دليل الدورة التسلسلي): لتكن G زمرة محدودة، وافترض أن كل عنصر من عناصرها مكتوب كحاصل ضرب دوائر منفصلة. إذا كان الطول الكلي لأطول دورة هو m فإننا نعرّف دليل الدورة التسلسلي لـ G بأنه متعدد الحدود:

$$Z(z_1, z_2, \dots, z_m) := \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} z_1^{c_1(\pi)} z_2^{c_2(\pi)} \cdots z_m^{c_m(\pi)}$$

حيث ترمز $C_j(\pi)$ إلى رقم الـ j دورة في π.

لاحظ أن دليل الدورة التسلسلي يعتمد فقط على الزمرة، حيث لم يذكر التعريف أن الزمرة تؤثر على مجموعة.

دليل الدورة التسلسلي لزمر معينة

لأن دليل الدورة التسلسلي يعتمد فقط على زمرة التماثل وليس على الدوال أو التلوينات نفسها، فإنه من الممكن حساب دليل الدورة التسلسلي للزمر المعيارية والمفيدة وهي S_n و D_n و C_n. ألقِ نظرة على التمارين.

لائحة جردة الأنماط

فيما يلي سنقوم باستخدام دليل الدورة التسلسلي لتكوين لائحة بعدد التلوينات غير المتكافئة ذات خصائص معينة. في مثال تلوين المربع، تقدم كل دورة ذات الطول 1 زواية سوداء واحدة أو زاوية بيضاء واحدة إلى التلوين، وفي نطاق دوال التوليد، فإن هذا يقترح تبديل كل حدث من z_1 بالمتتالية الرمزية $b + w$ للإشارة إلى اختيار "الأبيض والأسود".

وبالمثل، فإن دورة ذات الطول 2 تقدم إما زاويتين سوداوين أو زاويتين بيضاوين إلى التلوين، وبالتالي قم باستبدال كل z_2 بـ $b^2 + w^2$ للإشارة إلى هذا الاختيار. بالإجمالي فإن عمل الاستبدالات التالية

$$
\begin{aligned}
z_1 &\longleftarrow b + w \\
z_2 &\longleftarrow b^2 + w^2 \\
z_3 &\longleftarrow b^3 + w^3 \\
z_4 &\longleftarrow b^4 + w^4
\end{aligned}
$$

في دليل الدورة التسلسلي Z الموضح في المعادلة (5.4) يكوّن لائحة جردة من التلوينات غير المتكافئة منظمةً باستخدام أعداد الزوايا السوداء والبيضاء المستخدمة في كل منها:

$$\begin{aligned} &Z(b+w, b^2+w^2, b^3+w^3, b^4+w^4) \\ &\quad = \frac{1}{8}\Big((b+w)^4 + 2(b+w)^2(b^2+w^2) + 3(b^2+w^2)^2 + 2(b^4+w^4)\Big) \\ &\quad = \cdots \\ &\quad = b^4 + b^3w + 2b^2w^2 + bw^3 + w^4. \end{aligned}$$

تخفي النقاط "..." التبسيط الجبري الذي لربما من الأفضل تركه ليقوم به نظام جبر حاسوبي مثل مابل (Maple) أو ماثماتيكا (Mathematica).

إن النتيجة النهائية هي اقتران توليد حيث يكون المعامل b^iw^j مساوياً لعدد التلوينات غير المتكافئة التي لديها i زاوية سوداء و j زاوية بيضاء. يكون عدد التلوينات غير المتكافئة التي لديها زاويتان سوداوان وزاويتان بيضاوان مساوياً لـ 2 وذلك بسبب الحد $2b^2w^2$، أما معامل بقية الحدود فيكون مساوياً لـ 1 ولذلك يوجد تلوين غير متكافئ واحد مع كل تركيبة أخرى من الزوايا البيضاء والسوداء الموضحة، ويُدعى اقتران التوليد هذا بـ "لائحة الأنماط".

نستطيع أن نفعل الشيء ذاته لمثال تلوين الشبكة في القسم 15.، ويحتوي الجدول 25. على المعلومات ذات الصلة لحساب رقم الدائرة التسلسلي، وهو:

$$Z(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{4}\left(z_1^9 + 2z_1 z_4^2 + z_1 z_2^4\right).$$

وبالتالي فإن لائحة الأنماط هي:

$$\begin{aligned}
&Z(b+w, b^2+w^2, b^3+w^3, b^4+w^4)\\
&\quad= \frac{1}{4}\left((b+w)^9 + 2(b+w)(b^4+w^4)^2 + (b+w)(b^2+w^2)^4\right)\\
&\quad= \cdots\\
&\quad= b^9 + 3b^8w + 10b^7w^2 + 22b^6w^3 + 34b^5w^4\\
&\qquad + 34b^4w^5 + 22b^3w^6 + 10b^2w^7 + 3bw^8 + w^9.
\end{aligned}$$

على وجه التخصيص، هنالك 34 تلويناً غير متكافئ لديها خمسة مربعات سوداء وأربعة مربعات بيضاء بسبب المعامل b^5w^4، وهذا بالطبع يتوافق مع الإجابة التي قمنا بحسابها في نهاية القسم 54..

السؤال 212: فسّر لمَ تكون المعاملات في لائحة الأنماط متماثلة (Pattern Inventory). أي، لمَ يكون المعامل b^jw^{9-j} مساوياً دائماً للمعامل $b^{9-j}w^j$؟

من الجدير بالاهتمام معرفة الطريقة الرائعة التي ينفّذ دالة التوليد الخاص بلائحة الأنماط من خلالها هذه الحسابات. إن الحد الأول الموضوع ضمن الأقواس في لائحة الأنماط هو $(b+w)^9$ وبالتالي فإن معامل b^5w^4 هو $\binom{9}{5}$ باستخدام مبرهنة ذات الحدين. الحد الثاني هو:

$$2(b+w)(b^4+w^4)^2 = 2(b+w)(b^8+2b^4w^4+w^8)$$

وبالتالي فإن 4 هو معامل b^5w^4. أما الحد الثالث فهو:

$$(b+w)(b^2+w^2)^4 = (b+w)(b^8+4b^6w^2+6b^4w^4+4b^2w^6+w^8)$$

و بالتالي فإن 6 هو معامل b^5w^4. إن هذا يعني أن المعامل الذي نبحث عنه هو:

$$\frac{1}{4}\left(\binom{9}{5}+4+6\right) = 34$$

قارن هذا بحلنا السابق في المعادلة (5.2).

مبرهنة بوليا للتعداد

إن ما يسمى مبرهنة بوليا للتعداد هو ليس النسخة الأكثر عمومية لنتيجته. من الممكن تعديل نسختنا بحيث نقوم بتعيين أرقام للألوان تدل على "الأهمية" وينتج عن هذا مرونة إضافية. ألقِ نظرة على المثال المطروح في ختام هذا القسم لتكوّن نظرة عامة.

المبرهنة 6.25. (بوليا): لتكن A و C مجموعتين محدودتين، ولتكن G زمرة التباديل من A، وافترض أن دليل الدورة التسلسلي لـ G هو $Z(z_1, z_2, \ldots, z_m)$. إذا كانت $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_t\}$، فإنه يمكن الحصول على لائحة الأنماط من دليل الدورة التسلسلي من خلال القيام بالتعويض التالي في دليل الدورة التسلسلي:

$$k \in [m] \text{ لكل } : \longleftarrow c_1^k + c_2^k + \cdots + c_t^k$$

لائحة الأنماط هي دالة التوليد الذي تكون فيه معاملات $c_1^{i_1} c_2^{i_2} \ldots c_t^{i_t}$ تساوي عدد التلوينات غير المتكافئة التي يظهر فيها اللون c_1 بمقدار i_1 مرة، واللون c_2 بمقدار i_2 مرة، وهكذا.

مثال: تلوين أوجه المنشور الثلاثي

بكم طريقة يمكننا تلوين الأوجه الخمسة للمنشور الثلاثي (انظر إلى المثال 1 في القسم 54.) بحيث يحمل كل وجه اللون الأسود أو الأبيض أو الأحمر ويكون هنالك وجه أحمر واحد فقط؟

دعنا نستعِر الجدول الذي استخدمناه في القسم 54. لإيجاد دليل الدورة التسلسلي.

الحركة π	ضرب الدوائر المنفصلة	الحد في رقم الدائرة التسلسلي
I	$(B)(T)(S_1)(S_2)(S_3)$	z_1^5
R_1	$(B)(T)(S_1\ S_2\ S_3)$	$z_1^2 z_3$
R_2	$(B)(T)(S_1\ S_3\ S_2)$	$z_1^2 z_3$
F_1	$(B\ T)(S_1)(S_2\ S_3)$	$z_1 z_2^2$
F_2	$(B\ T)(S_1\ S_3)(S_2)$	$z_1 z_2^2$
F_3	$(B\ T)(S_1\ S_2)(S_3)$	$z_1 z_2^2$

وبالتالي فإن دليل الدورة التسلسلي هو:

$$Z(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{6}\Big(z_1^5 + 2z_1^2z_3 + 3z_1z_2^2\Big).$$

وللحصول على لائحة الأنماط، استبدل كل z_k بـ $b^k + w^k + r^k$:

$$\frac{1}{6}\Big((b+w+r)^5 + 2(b+w+r)^2(b^3+w^3+r^3) \\ + 3(b+w+r)(b^2+w^2+r^2)^2\Big).$$

والآن قم بتفكيكها إلى:

$$b^5 + w^5 + r^5 + 2b^4w + 3b^3w^2 + 3b^2w^3 + 2bw^4 + 4b^3wr + 6b^2w^2r \\ + 6b^2wr^2 + 4bw^3r + 6bw^2r^2 + 4bwr^3 + 2b^4r + 3b^3r^2 \\ + 3b^2r^3 + 2br^4 + 2w^4r + 3w^3r^2 + 3w^2r^3 + 2wr^4.$$

نحن نبحث عن مجموع معاملات الحدود التي تبدو مثل b^iw^jr وهذه الحدود

هي:

$$4b^3wr + 6b^2w^2r + 4bw^3r + 2b^4r + 2w^4r,$$

وبالتالي فإن الإجابة هي $4 + 6 + 4 + 2 + 2 = 18$.

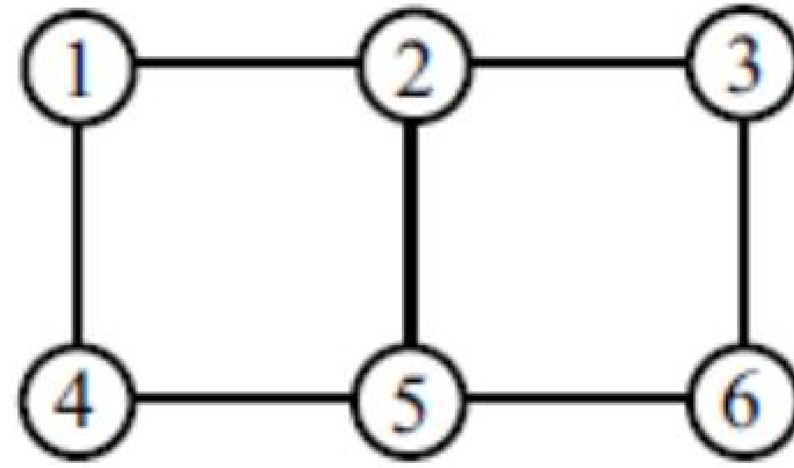
السؤال 213: كم عدد التلوينات التي يظهر فيها وجه أحمر واحد على الأكثر؟

السؤال 214: تخبرنا لائحة الأنماط أن هنالك أربعة تلوينات لديها وجه أسود واحد وثلاثة أوجه بيضاء ووجه أحمر واحد. ارسم هذه التلوينات.

مرونة مبرهنة بوليا

لإنهاء هذا الفصل، سنقدم مثالاً نوضح من خلاله كيفية استخدام دليل الدورة التسلسلي للإجابة عن مسائل عد محددة، وكما ذكرنا قبل طرح مبرهنة بوليا، فإنه يمكن جعل هذه الطرق دقيقة جداً من خلال تعيين أوزان تدل على "أهمية" كل لون، وهنا ستتجنب الصيغ الرسمية ونكتفي بالأمثلة.

دعنا نقوم بعدّ الطرق المختلفة لبناء الهيكل التالي باستخدام سبع عصي متماثلة وست كرات بألوان متنوعة. (تم ترقيم مواقع الكرات تحضيراً لإيجاد زمرة التماثل).



كم عدد الهيكليات المختلفة التي يمكن تكوينها ضمن الشروط التالية؟

(أ) تحمل كل كرة اللون الأحمر أو الأزرق أو الأخضر.

(ب) هنالك كرتان من كل لون مستخدم.

(ج) لا كرات حمراء.

(د) هنالك كرتان خضراوان على الأقل.

(هـ) هنالك كرة زرقاء واحدة وكرة خضراء واحدة.

إن وظيفتنا الأولى هي تحديد زمرة التماثل G لهذا الشكل. إن لدى الزمرة أربعة عناصر: المحايد I، والدوران بزاوية 180 درجة (R_{180})، والتقليب على طول المحور الأفقي (F_H)، والتقليب على طول المحور الرأسي (F_V). يوضح الجدول التالي معلومات رقم الدائرة التسلسلي:

الحركة π	ضرب الدوائر المنفصلة	الحد في رقم الدائرة التسلسلي
I	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	z_1^6
R_{180}	(1 6)(2 5)(3 4)	z_2^3
F_H	(1 4)(2 5)(3 6)	z_2^3
F_V	(1 3)(2)(4 6)(5)	$z_1^2 z_2^2$

إن الدليل التسلسلي للدورة هو:

$$Z(z_1, z_2) = \frac{1}{4}\left(z_1^6 + 2z_2^3 + z_1^2 z_2^2\right).$$

إذا استبدلنا z_1 بـ $r + b + g$ و z_2 بـ $r^2 + b^2 + g^2$ فإننا نحصل على لائحة الأنماط:

$$\begin{aligned} &Z(r+b+g, r^2+b^2+g^2) \\ &\quad = \frac{1}{4}\Big((r+b+g)^6 + 2(r^2+b^2+g^2)^3 + (r+b+g)^2(r^2+b^2+g^2)^2\Big). \end{aligned}$$

يمكن الإجابة على جميع الأسئلة أعلاه من خلال القيام بالتعويضات المناسبة في دليل الدورة التسلسلي أو لائحة الأنماط، وههنا الكيفية:

(أ) هنا، نقوم عادةً بتطبيق مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد ولكن لاحظ أن المبدأ الذي استخدمناه لحساب حجم كل مجموعة من مجموعات النقاط الثابتة (أي أن كل دورة يجب أن تكون أحادية اللون) يتضمن أنه يمكننا الحصول على الإجابة من خلال جعل $z_1 = 3$ و $z_2 = 3$ في دليل الدورة التسلسلي:

$$Z(3,3) = \frac{1}{4}\left(3^6 + 2 \cdot 3^3 + 3^2 \cdot 3^2\right) = 216.$$

وبشكل مكافئ نستطيع جعل $r = 1$ و $b = 1$ و $g = 1$ في لائحة الأنماط.

(ب) الإجابة هي معامل $r^2b^2g^2$ في لائحة الأنماط، وباستخدام برمجية كـ "مابل"، تكون الإجابة هي 27.

(ج) نستطيع جمع معاملات جميع الحدود التي تخلو من الـ r في لائحة الأنماط، وهنالك طريقة أسرع لعمل ذلك: احسب لائحة الأنماط عند $r = 1$ و$b = 1$ و $g = 1$ لتكون الإجابة 24.

(د) نستطيع الحصول على التلوينات التي تستخدم أي عدد من الكرات الخضراء من 0 إلى 6 من خلال احتساب لائحة الأنماط عند $r = 1$ و $b = 1$ وترك g لوحدها، وباستخدام "مابل" ينتج التالي:

$$24 + 52g + 71g^2 + 44g^3 + 20g^4 + 4g^5 + g^6.$$

لذلك يوجد $140 = 1 + 4 + 20 + 44 + 71$ هيكلية باستخدام كرتين خضراوين على الأقل. بشكل مكافئ، نستطيع أن نطرح عدد الهيكليات التي تستخدم كرة خضراء واحدة على الأكثر من العدد الكلي: $140 = 52 - 24 - 216$.

(ه) سنحسب أولاً المتممة من خلال تحديد عدد الهيكليات التي ليس لديها كرات زرقاء أو ليس لديها كرات خضراء. الإجابة هي $24 + 24 - 1 = 47$ لأن هنالك 24 هيكلية من دون كرات زرقاء (نفس إجابة الفرع (ج))، و24 هيكلية من دون كرات خضراء وهيكلية واحدة من دون كرات زرقاء وخضراء؛ لذلك، فإن عدد الهيكليات التي تستخدم كرة زرقاء واحدة على الأقل وكرة خضراء واحدة على الأقل هي $47 - 216 = 169$.

الملخص

إن دليل الدورة التسلسلي لزمرة التباديل يبقينا على علم بهيكلية دورة كل تبديل. لائحة الأنماط، التي نحصل عليها من دليل الدورة التسلسلي، هي دالة توليد يمكننا من الإجابة على أسئلة عدّ محددة بطريقة سريعة جداً، وفي أمثلتنا التي تشتمل على التلوينات، تنظم لائحة الأنماط جميع التلوينات الممكنة من خلال عدد مرات استخدام كل لون، وهي مرنة بشكل يكفي للإجابة عن أسئلة عد محددة جداً.

التمارين

1) جد دليل الدورة التسلسلي لزمرتي التماثل S_3 و S_4.

2) جد دليل الدورة التسلسلي للزمرتين الدوريتين C_4 و C_5.

3) جد دليل الدورة التسلسلي للزمرة الدائرية C_p، حيث p عدد أولي.

4) جد دليل الدورة التسلسلي للزمرة الثنائية D_n في تأثيرها على زوايا المضلع المنتظم المكون من n ضلع. ستحتاج إلى التفكير بحالتين تبعاً لزوجية أو فردية العدد n.

5) إذا كانت H زمرة فرعية من G، كيف يرتبط دليل الدورة التسلسلي لـ H بدليل الدورة التسلسلي لـ G؟

6) كم عدد القلائد المختلفة والمكونة من سبع خرزات التي يمكن تكوينها إذا افترضنا أن كل خرزة تحمل واحداً من أربعة ألوان مختلفة وأن كل قلادة تحتوي تماماً على خزرة واحدة بلون واحد وخرزتين بلون واحد من الألوان الثلاثة المتبقية؟

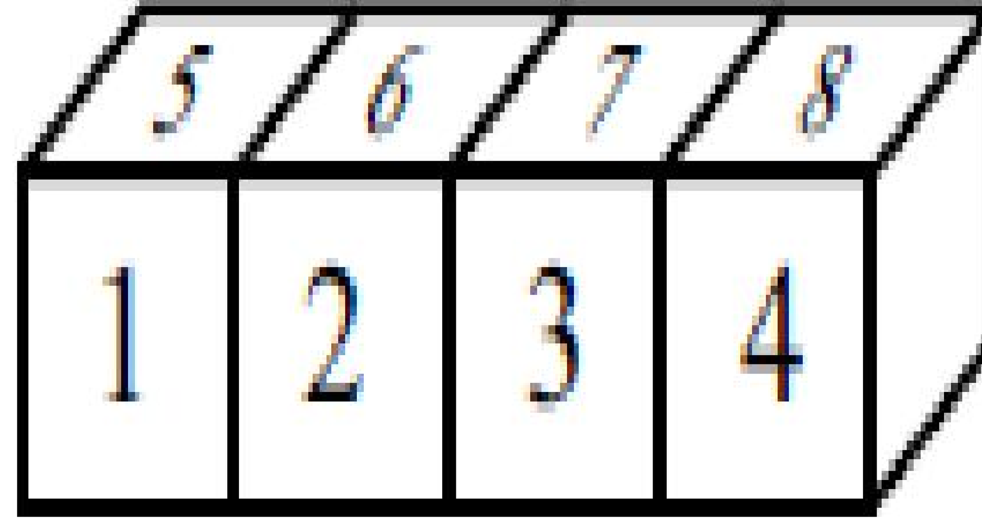
7) كم عدد القلائد المختلفة والمكونة من 20 خرزة والتي يمكن تكوينها إذا افترضنا أن كل خرزة تحمل لوناً من ثلاثة ألوان مختلفة؟ كم عدد تلك القلائد التي لديها ثلاث خرزات على الأقل من كل لون؟

8) كم عدد التلوينات المختلفة لستة أوجه في مكعب والتي يمكن تكوينها إذا افترضنا أن وجهين منها يجب أن يكونا بيضاوين، واثنين يجب أن يكونا سوداوين، واثنين يجب أن يكونا حمراوين؟ (مساعدة: استخدم الحل في التمرين 5 في القسم 4.5).

9) جد إجابة التمرين 7 في القسم 54. إذا افترضنا أن لديك قطعة حمراء واحدة فقط.

10) جد إجابة التمرين 8 في القسم 54. إذا افترضنا أن لديك كرة حمراء واحدة فقط.

11) يوضح الشكل التالي مجسماً أبعاده 4 إنش × 1 إنش × 1 إنش لديه أربعة مربعات على كل وجه من أوجهه المستطيلة. افترض أن المربعات المقابلة للمربعات من 1–4 مرقمة من 9–12، وأن المربعات المقابلة للمربعات من 5–8 مرقمة من 13– 16.



كل مربع مرقم يمكن أن يكون ملوناً باللون الأحمر أو الأزرق أو الأخضر.

(أ) جد دليل الدورة التسلسلي إذا افترضنا أن المجسم حر الحركة في الفضاء.

(ب) كم عدد التلوينات المختلفة للمكعب؟

(ج) كم عدد التلوينات المختلفة التي لديها مربع أخضر واحد على الأقل؟

(د) كم عدد التلوينات المختلفة التي لديها خمسة مربعات خضراء على وجه التحديد؟

12) لتكن A و C مجموعتين محدودتين ولتكن G زمرة التباديل من A ولتكن $\mathcal{O}$ مجموعة المدارات لـ C^A. استخدم مبرهنة كوتشي- فروبينيوس- بيرنسايد لإثبات أن $|\mathcal{O}| = Z_G(c, c, \ldots, c)$ حيث Z_G هو دليل الدورة التسلسي لـ G و $c = |C|$ (أي أن c هو عدد "الألوان").

ملاحظات سريعة

تدعى مبرهنة بوليا للتعداد أحياناً بمبرهنة بوليا - ريدفيلد (Pólya-Redfield) حيث لاحظ عدد من القراء احتواء ورقة ريدفيلد العلمية (1972) على أفكار مشابهة لم يدركها بوليا عندما قدم أعماله. وعلى أي حال، فلا أحد يجادل أن هنالك أي شخص غير بوليا الذي أثبت الفائدة واسعة النطاق للمبرهنة التي تحمل اسمه الآن.

إن الورقة العلمية الأصلية هي لبوليا (1937) وهي مكتوبة بالألمانية ويحتوي الكتاب **بوليا وريد**-(*Polya & Read*) (1987) على الترجمة الإنجليزية لورقة بوليا لعام 1937 والمكتوبة بالألمانية إلى جانب مادة إضافية.

الفصل السادس

التوافقيات في المخططات

في هذا الفصل سنقوم بدراسة جزء صغير من المسائل التي تنشأ عن التوافق للنظريات المتعلقة بالمخططات. يوجد تداخل كبير بين النظريات المتعلقة بالتوافق والنظريات المتعلقة بالمخططات، إضافة إلى ذلك يوجد في نظرية المخططات الكثير من القضايا المتعلقة بالعدّ والكينونة والبناء وإيجاد الحلول المثلى لها. علينا أن نركز على مشكلتين متعلقتين بالتوافق (شجرة التصنيف وشجرة البحث في العدّ الثنائي في القسم 2.6 والتلوين المناسب في القسم 3.6) وإحدى مسائل الكينونة الأساسية (نظرية رامزي في القسم 4.6). وبالرغم من أننا لن نعالج هنا هذه القضايا بشكل كامل، لكننا سننجز الكثير بما يتعلق باستمثال الحلول المتعلقة بالمخططات. وذلك لأن رسوم المخططات تقدم نماذج وحلولاً ممتازة للحاسوب وكذلك لأنظمة الاتصالات وشبكات النقل.

1.6 النظرية الأساسية للمخططات

في القسم الأول سوف نقوم بدراسة المفاهيم والمصطلحات الأساسية المتعلقة بنظرية المخططات (Graph Theory) والضرورية لمعالجة المسائل المتعلقة بالعدّ الواردة في هذا القسم. ويمكن للقارئ الذي سبق أن درس النظرية الأساسية مخططات أن يتخطى معظم هذا القسم مع الاهتمام بدراسة النتائج ومحاولة حل التمارين.

المصطلحات المتعلقة بالمخططات

يمكن تخيل المخطط بأنه يتكون من مجموعة نظرية من الأشياء أو بمعنى آخر شيء هندسي، وكل رسم يكون مفيداً في حالة مختلفة عن رسم آخر. لكن المعنى الحقيقي للمخطط هو مجموعة نظرية مترابطة.

التعريف 1.1A6. المخطط عبارة عن قائمتين (V وE) حيث V لها قيمة واحدة على الأقل وعدد محدد من القيم، وE هي مجموعة من مجموعتين فرعيتين من V. المجموعة V هي مجموعة القمة والمجموعة E هي مجموعة الحافة (Edge Set). تسمى عناصر V قمم (Vertices) وعناصر E تسمى حواف (Edges).

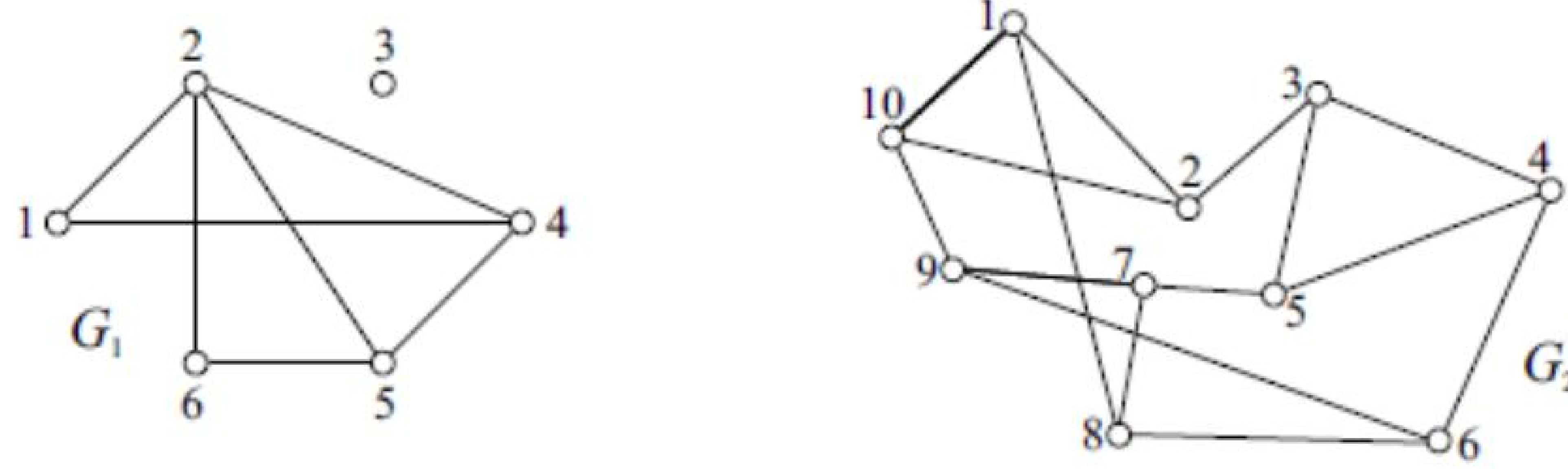
عادة يرمز للمخطط بحروف كبيرة مثل G, H. وعند كتابة G=(V,E) ذلك يعني أن G هو مخطط بمجموعة V من القمم ومجموعة E من الحواف. يمكن أن تكون

مجموعة الحواف لا تحتوي على أي قيمة. أحياناً نكتب V(G) وE(G) بدلاً من كتابة V وE فقط للتعبير أن اسم المخطط هو G.

على سبيل المثال،

$$G = \left(\underbrace{1,2,3,4,5,6}_{Vertex\ set\ V}, \underbrace{\{1,2\},\{1,4\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{4,5\},\{5,6\}}_{Edge\ set\ E} \right)$$

يمثل مخططاً. الصورة الموجودة على يسار الشكل 16. تظهر تمثيلاً مرئياً لهذا المخطط، تم تمثيل كل من القمم الست بدائرة وقيمتها بجانب الدائرة، وتم تمثيل كل حافة بخط يصل بين القمتين المرتبطتين بهذه الحافة.



الشكل 6.1: المخططين G_1 وG_2.

السؤال 215: اكتب مجموعتي القمم والحواف للمخطط G_2 الموجود على يمين الشكل 16..

تكون القمة والقاعدة مترابطتين، بحيث تنتمي القمة إلى الحافة (وفقاً لمفهوم المجموعة النظرية)، أو يعني أن القمة تلامس الحافة (وفقاً للمفهوم الهندسي). تعرف

درجة قمة ما بأنها عدد الحواف التي تتبع هذه القمة. يشير الرمز $d_G\ (v)$ إلى درجة القمة v في المخطط G ويمكن اختصار ذلك إلى $d(v)$.

عندما تكون قمتان متجاورتين؛ ذلك يعني أن هناك حافة واحدة تحتويهما (وفقاً لمفهوم المجموعة النظرية) أو يعني أن الحافة تصل بينهما (وفقاً للمفهوم الهندسي). يشير الرمز $u{\sim}v$ إلى أن القمتين vو u متجاورتان. ولأي حافة $\{u,v\}$ تكون القمتان v وu نهايتين للحافة.

السؤال 216: هل 6~5 محتواة في G_1؟ وهل 6~5 محتواة في G_2؟

إذا اعتبرنا أن التجاور (~) هو علاقة بين مجموعة القيم في المخطط، ذلك يعني أن التجاور هو علاقة غير انعكاسية (لا يوجد قمة مجاورة لنفسها) ومتماثلة (إذا كان $v{\sim}w$ ذلك يعني أن $w{\sim}v$). وفقاً لذلك، المخطط عبارة عن نوع محدد من العلاقة. انظر المناقشة في بداية القسم 1.3.

للمخطط G_1 من الشكل 16.، القمة 2 تابعة للحافة {2,6} لكنها لا تتبع الحافة {4,5}. وكذلك 6~2 لكن القمتين 1 و5 ليستا متجاورتين ($6 \nsim 2$). ولنفس الشكل يمكن كتابة:

$$d(1) = 2, d(2) = 4, d(3) = 0, d(4) = 3, d(5) = 3, d(6) = 2$$

درجة القمة 3 تساوي صفراً، لذلك تسمى قمة معزولة.

السؤال 217: هل من الممكن أن نرسم مخططاً بمجموعة من القمم [5] بحيث يكون

$d(1) = d(2) = d(3) = d(5) = 3$ و$d(4) = 2$؟ فسر إجابتك في الحالتين.

يكون المخطط منتظماً على k (k-Regular) يعني أن $d(v) = k$ لكل قمة v.

المخطط G_2 في الشكل 16.، منتظم على 3, لكن المخطط G_1 غير منتظم على أي قيمة من قيم k. المخطط المنتظم على أي قيمة من قيم k يُسمى مخططاً منتظماً.

موسطات االمخطط

لأي مخطط $G = (V, E)$ يمكن تعريف ما يلي:

$n(G)$ = عدد القمم في G

$e(G)$ = عدد الحواف في G

$\delta(G)$ = أقل درجة في G

$\Delta(G)$ = أعلى درجة في G

ذلك يعني أن $n(G) = |V(G)|$ و $E(G) = |E(G)|$. يستخدم الرمز n عموماً للإشارة إلى عدد القمم في المخطط. ويستخدم الرمز m أحياناً للإشارة إلى عدد الحواف.

يتضمن المخطط في الشكل 6.1:

$n(G_1) = 6 \qquad n(G_2) = 10$

$e(G_1) = 7 \qquad e(G_2) = 15$

$\delta(G_1) = 0 \qquad \delta(G_2) = 3$

$\Delta(G_1) = 4 \qquad \Delta(G_2) = 3$

بشكلٍ عامٍ، يكون المخطط G منتظماً على k (k-Regular) إذا، وفقط إذا، كان $\delta(G) = \Delta(G) = k$.

السؤال 218: ارسم مثالاً لمخطط له سبع قمم وقيم $\delta = 3$ و$\Delta = 4$.

سؤالان في العدّ

مسلمة المصافحة

تهتم الخاصية الأولى لدمج المخططات بما يحدث عند جمع جميع الدرجات في المخطط. وهذا يؤدي إلى عدّ كل حافة مرتين: يتم عدّ الحافة (v, w) مرة للقيمة $d(v)$ ومرة أخرى للقيمة $d(w)$. لذلك عند جمع جميع الدرجات نحصل على ضعف عدد الحواف. وهذا يثبت المبرهنة التالية والتي تسمى مسلمة المصافحة (Handshaking Lemma).

المبرهنة 6.1.2 (Handshaking) إذا كانت $G = (V, E)$ مخطط، عندها:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e(G)$$

المخطط G_1 في الشكل 16. له سبع حواف، لذلك يجب أن يكون مجموع الدرجات يساوي 14:

$$\sum_{v \in V(G_1)} d(v) = d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5) + d(6)$$

$$= 2 + 4 + 0 + 3 + 3 + 2 = 14$$

السؤال 219: إذا كان G مخططاً رباعياً منتظماً له عدد n من القمم، كم عدد الحواف للمخطط G؟

سوف نستخدم نتيجة المصافحة في إثبات نتيجة حول تساوي الدرجات في مخطط.

المبرهنة 6.1.3 إذا كان G مخطط، فإنه يوجد عدد زوجي من القمم التي لها درجات فردية.

الإثبات: افترض أن $G = (V, E)$ مخطط. قم بفصل مجموع نتيجة المصافحة إلى درجات زوجية ودرجات فردية:

$$2e(G) = \left(\sum_{v:d(v)\ even} d(v) \right) + \left(\sum_{v:d(v)\ odd} d(v) \right)$$

بما أن كلا $2e(G)$ والحد الأول هي أعداد زوجية، فإن الحد الثاني بالتالي يجب أن يكون أيضاً زوجياً، وبما أنه (الحد الثاني) هو حاصل جمع أعداد فردية، إذن يجب أن يكون مجموع هذه الأعداد زوجياً.

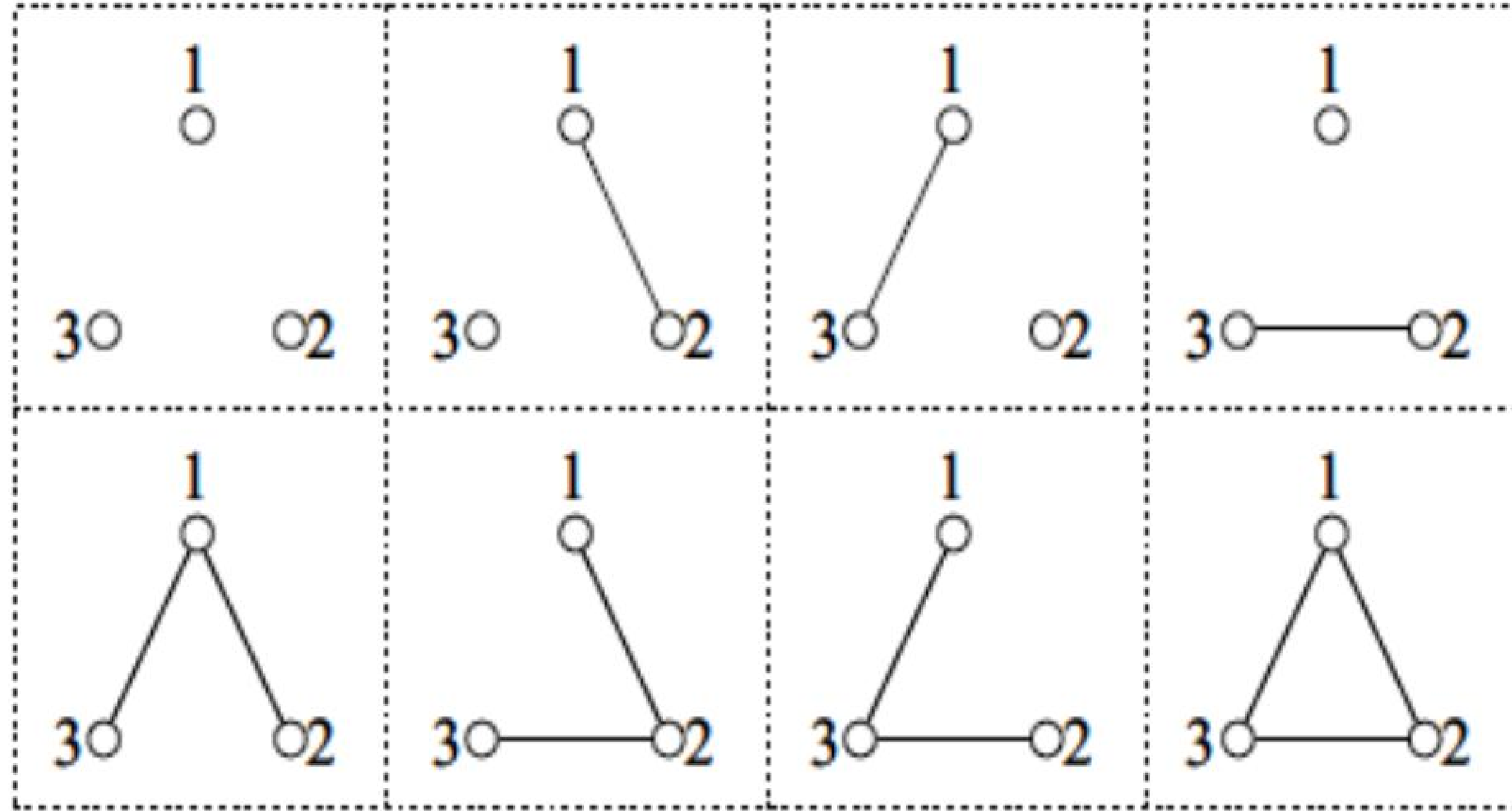
السؤال 220: هل من الممكن رسم مخطط ثلاثي منتظم على 11 قمة؟

كم عدد المخططات؟

أي مخطط له عدد n من القمم يكون العدد الأقصى لحوافه $\binom{n}{2}$، بما أنه يوجد مجموعتان جزئيتان محتملتان من المجموعة n. يمكن أن لا يكون لهذا المخطط أي حافة (جميع القمم معزولة)، لذلك ولأي مخطط G:

$$0 \leq e(G) \leq \binom{n}{2}$$

عندها يكون عدد المخططات الممكنة باستخدام عدد n من القمم يساوي $2^{\binom{n}{2}}$ لأن كل $\binom{n}{2}$ حافة ممكنة يمكن أن تكون داخل أو خارج المخطط. على سبيل المثال، يوجد $2^{\binom{3}{2}} = 8$ مخطط لها قمم تساوي [3]. الشكل 26. يوضح ذلك

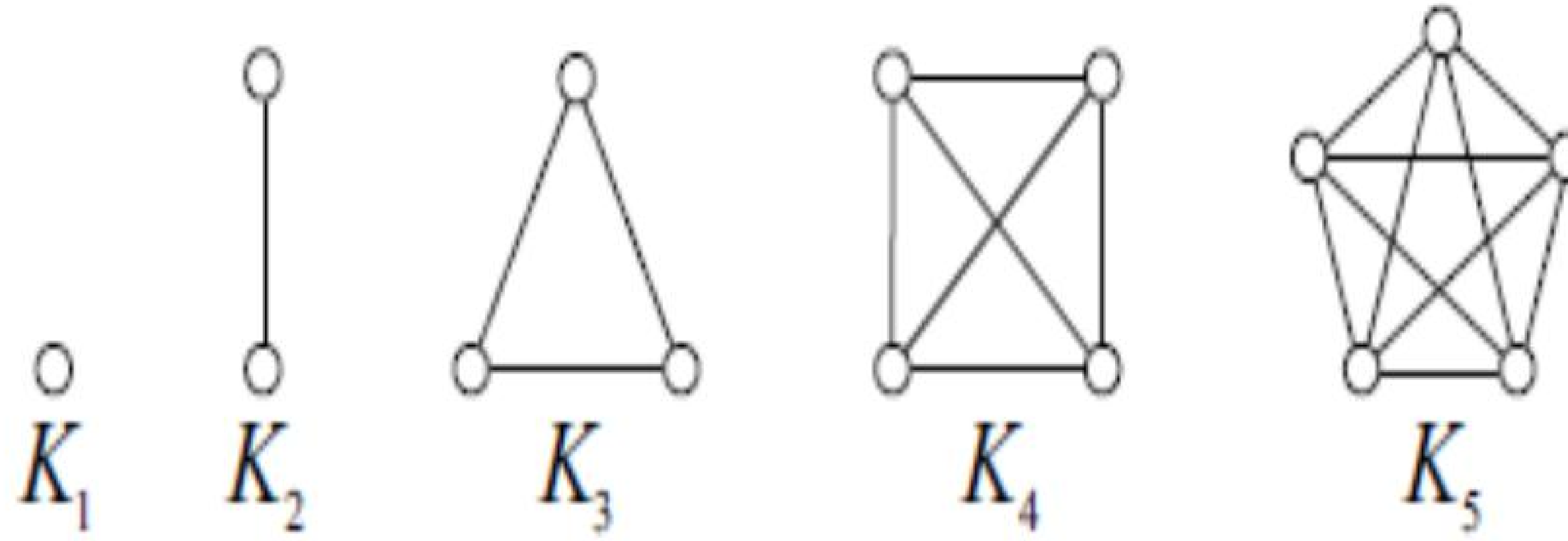


الشكل 26.: المخططات الثمانية المرقمة للقمم الثلاث.

أنواع خاصة من المخططات

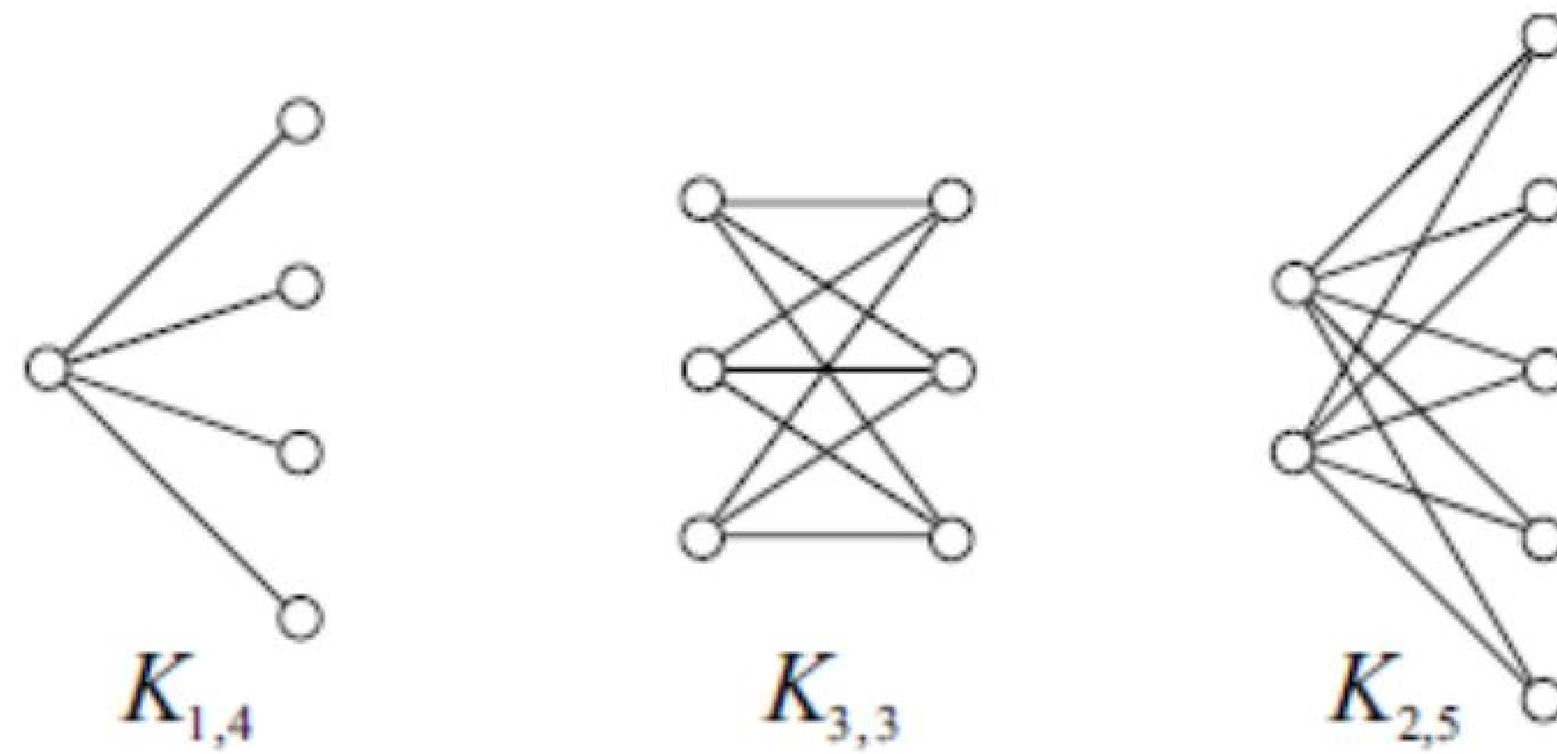
المخطط المكتمل، الحلقي، المساري

إذا كانت $n \geq 1$ فإن المخطط المكتمل (Complete Graph) لعدد من القمم n والذي يرمز له بالرمز K_n يكون كل زوج من القمم فيه متصلاً بحافة. هذه صورة لمخطط مكتمل K_n حيث $n = 1,2,3,4,5$



المخطط المكتمل K_n له عدد من الحواف يساوي $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$.

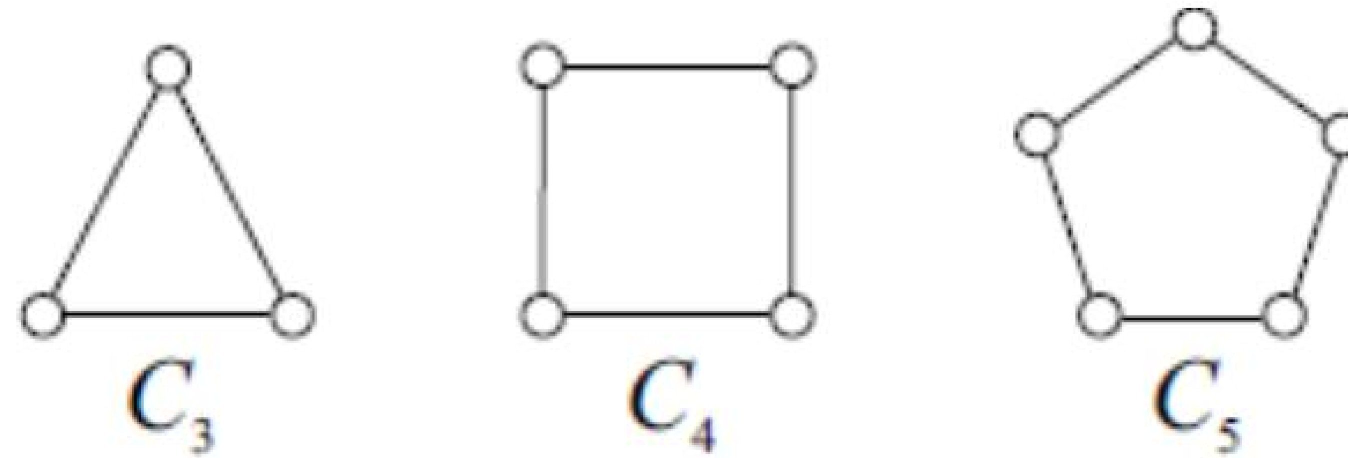
لكل $r, s \geq 1$ المخطط المكتمل ذو القسمين والمعرّف على القمم r, s والذي يرمز له بالرمز $K_{r,s}$ هو مخطط يمكن فيه فصل مجموعة القمم إلى قسمين، الأول حجمه r والثاني حجمه s، بحيث تحتوي مجموعة الحواف جميع الحواف الممكنة التي تصل قمتين في القسمين المختلفين. هذه صور لمخططات مكتملة ذات قسمين $K_{1,4}$، $K_{2,5}$و $K_{3,3}$:



سوف نقوم بتوضيح المزيد حول المخطط المكتمل ذي القسمين لاحقاً في هذا القسم. يسمى المخطط المكتمل ذو القسمين $K_{r,s}$ أحياناً بالنجمة (Star).

السؤال 221: كم عدد حواف $K_{r,s}$؟

إذا كانت $n \geq 3$ المخطط الدائري (Cycle Graph) لعدد من القمم n والذي يرمز له بالرمز C_n، له عدد من القمم n وعدد من الحواف n مرتبة بشكل حلقي. هذه صورة لمخطط حلقي C_n حيث $n = 1,2,3,4,5$

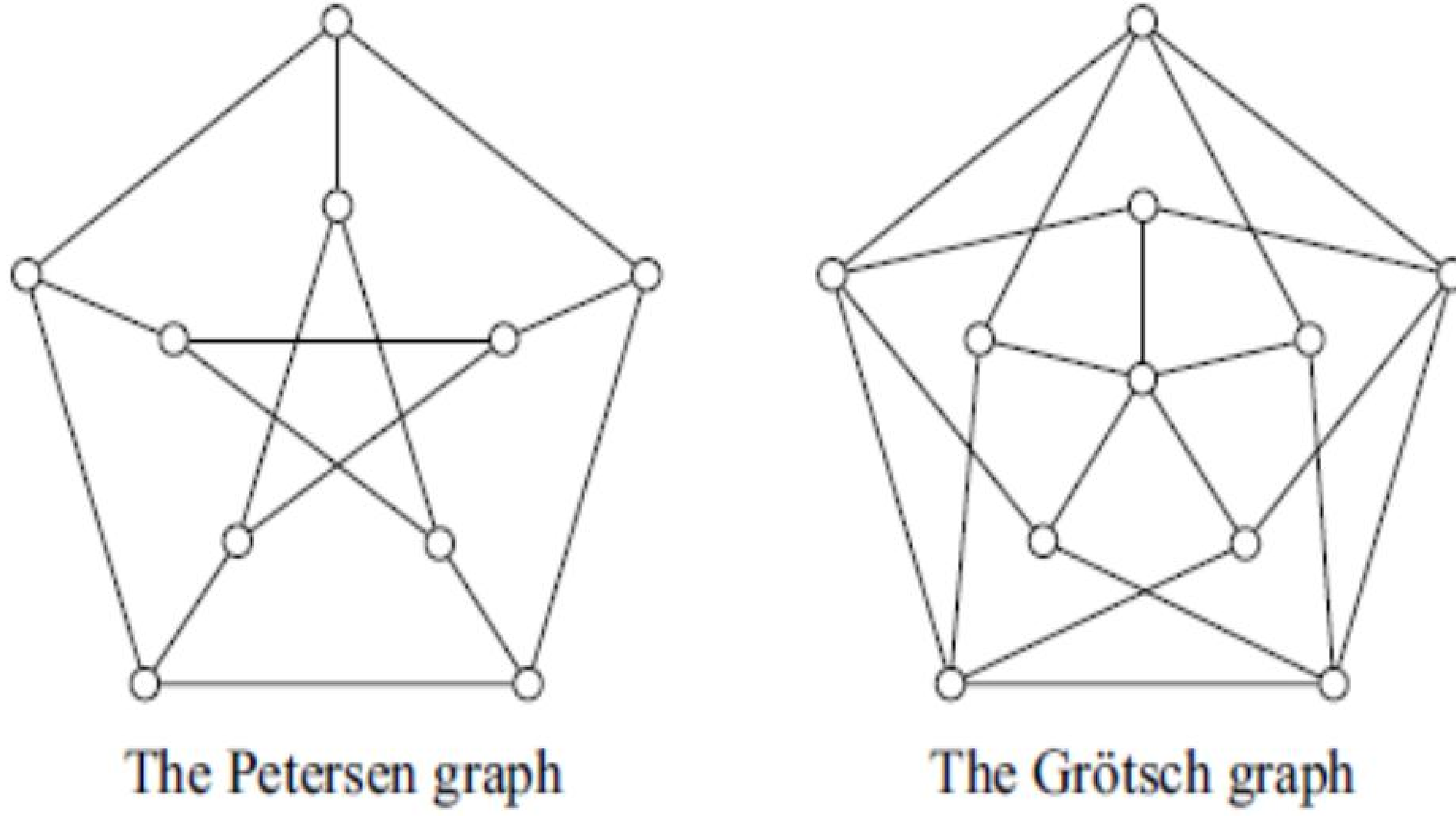


إذا كان $n \geq 1$ المخطط المساري (Path Graph) لعدد من القمم n والذي يرمز له بالرمز P_n، له عدد من القمم n وعدد من الحواف $n - 1$ مرتبة بشكل مساري. هذه صورة لمخطط مساري P_n حيث $n = 1,2,3,4$



مخططات غروتش وبيترسن

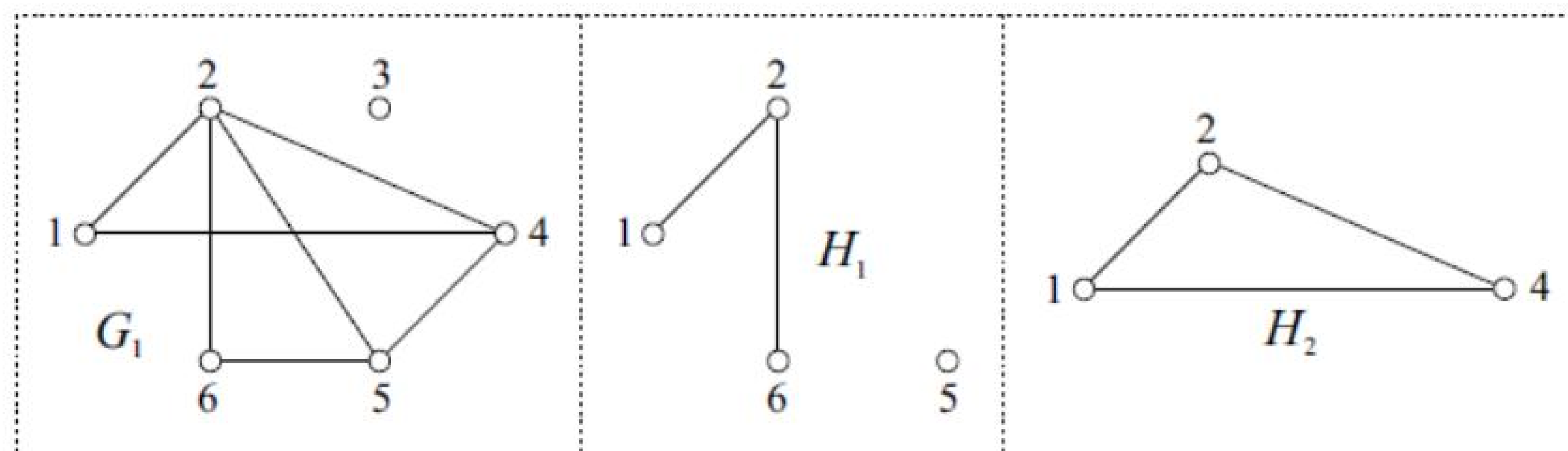
يبين الشكل 36. مخططات بيترسن (Petersen) وغروتش (Grötsch)، هي مخططات ثلاثية منتظمة مهمة لأنها تعتبر مثالاً مضاداً لاختبار صحة نظريات جديدة



الشكل 6.3: مخططات غروتش وبيترسن (Petersen) و (Grötsch).

المخططات الجزئية (الدنيا)

إذا كان $G = (V, E)$ مخطط، يكون المخطط H هو مخطط جزئي (Subgraph) أدنى للمخطط G، وتكتب $H \subseteq G$، ذلك يتضمن $V(H) \subseteq E(G)$. مرة أخرى الرسم يظهر المخطط G_1 الموجود في الشكل 16. بالإضافة إلى مخططين آخرين H_1 و H_2:



إذا كان H مخططاً جزئياً من G، عادةً يقال بأن G يحتوي H. على سبيل المثال، المخطط الجزئي H_2 من G_1 هو حلقي ثلاثي لذلك يمكن القول بأن G_1 تحتوي C_3.

السؤال 222: هل G_1 تحتوي C_4؟ ما هو أكبر حلقة التي تحتوي المخطط G_2 الموجود في الشكل 16.؟

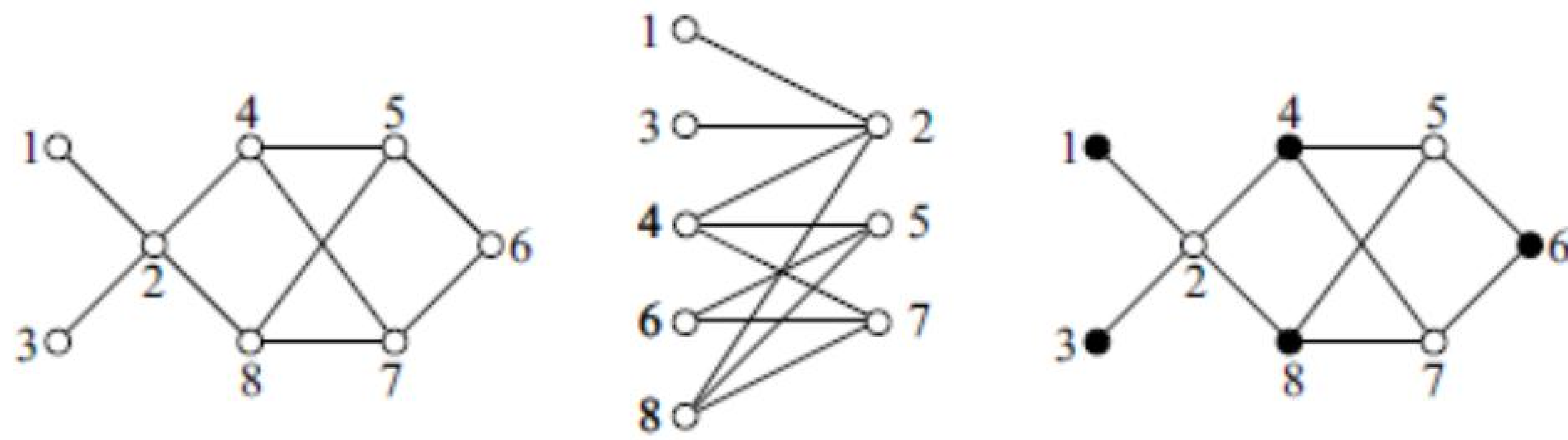
يمكن معرفة الكثير عن هيكلية المخطط عن طريق دراسة المخططات الفرعية التابعة له. بالتحديد، من المفيد معرفة إذا كان المخطط يحتوي على مخططات فرعية مكتملة أو دائرية.

المخطط ذو الجزئين

يكون المخطط ذا جزئين (Bipartite) إذا كان يمكن قسمة مجموعة قمم المخطط إلى كتلتين بحيث يكون لكل حافة في المخطط قمة واحدة في كل كتلة من الكتلتين. الكتلتان الناتجتان تعتبران من الكتل الجزئية.

يمكن رسم المخطط ذي الجزئين بطريقة تجعل هيكليته واضحة. إحدى الطرق للرسم تكون عن طريق وضع جميع القمم في إحدى الكتلتين على جهة معينة، ووضع القمم للكتلة الثانية في الجهة المقابلة، ومن ثم نقوم برسم الحواف، يجب أن يكون مرئياً

وأن تملأ الحواف الفراغ بين قمم الكتلتين؛ وثمة طريقة أخرى تتم بتلوين قمم إحدى الكتلتين بالأبيض وقمم الكتلة الثانية بالأسود، وكل حافة يجب أن تصل بين قمة بيضاء وقمة سوداء. يبين الرسم الطريقتين اللتين من خلالهما يمكن التحقق من المخطط ذي الجزئين.



في المخطط ذي الجزئين $G = (V, E)$، عادة ما نكتب $G = (V_1 \cup V_2, E)$ للتأكيد على تقسيم مجموعة القمم إلى قسمين. في المخطط السابق $V_1 = \{1,3,4,6,8\}$ و $V_2 = \{2,5,7\}$.

هل المخطط G_1 في الشكل 16. ذو جزئين؟ إذا كان ذلك صحيحا، يمكن أن نفترض من دون خسارة أن القمة 1 ملونة بالأسود والقمة 2 بالأبيض. لكن عندها، وبغض النظر عن لون القمة 4 أكان أبيضاً أم أسوداً، سوف ينتج حافة تكون نهايتها أبيضين أو أسودين، فيكون المخطط G_1 ليس ذا جزئين.

الحلقة الفردية (C_3) التي تظهر في المخطط G_1 تؤكد على أن المخطط ليس ذا جزئين. والحلقات الفردية هي الطريقة الوحيدة التي تجعل المخطط ذا الجزئين غير

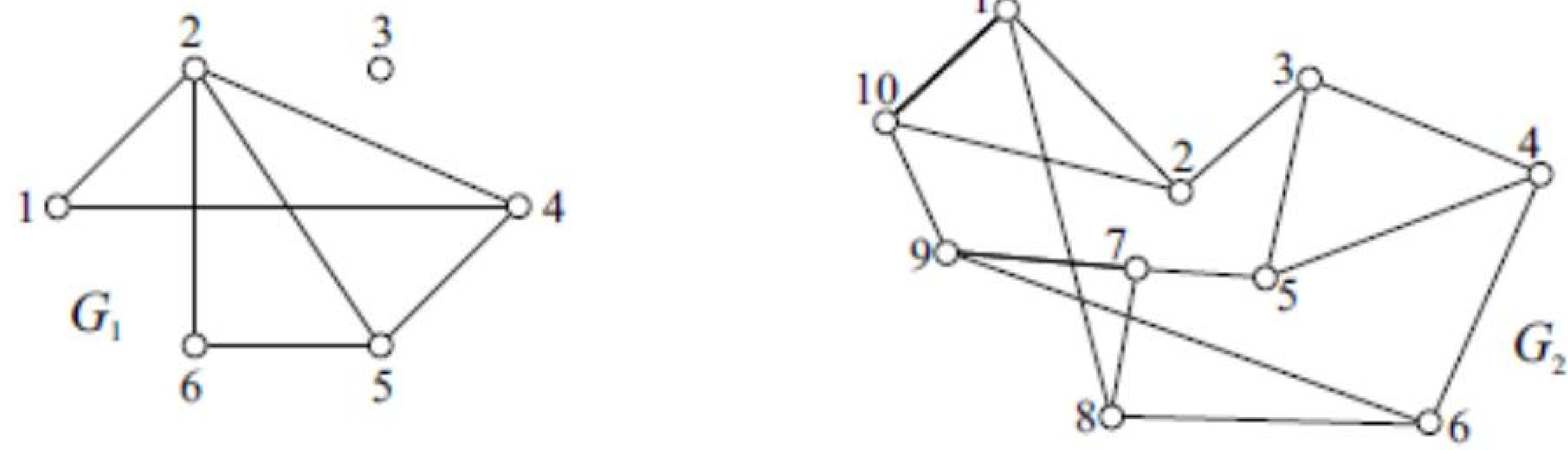
قابل للتحقق. برهان النتيجة التالية يمكن الحصول عليها في جميع كتب نظرية المخططات.

المبرهنة 1.46. المخطط يكون ذا جزئين إذا، وفقط إذا، كان لا يحتوي على أي حلقات فردية.

السؤال 223: هل مخطط بيترسن ذو جزئين، وهل مخطط غروتش كذلك؟ لأي قيم n في K_n يكون المخطط ذا جزئين، ولأي قمم من n في P_n؟

المسار، المسلك، الترابط

سوف نستعرض الآن طريقتين لتتبع المسار في مخطط. ففي المخططين G_2و G_1 في الشكل 16.



خاصية المسار (Walk) للمخطط هي عدد محدود من القمم بحيث تكون أي قمتين متجاورتين في القائمة متجاورتين أيضاً في المخطط. ومثال على المسار في المخطط G_1 هو (1 ,2 ,6 ,2 ,4 ,5 ,2) أو بكل بساطة 2542621، ومثال على المسار في G_2 هو (8 ,1 ,10 ,9 ,6 ,8 ,6 ,8 ,6 ,8). *في* G_1 *القائمة (2* ,6 ,2 ,1 ,5 ,2) ليست

مثالاً على المسار لأن 5 و1 ومتجاورتان في القائمة ولكن $1 \nsim 5$ في G_1. بشكل عام، إذا بدأ المسار بالقمة u وانتهى بالقمة v فهو بالتالي مسار $u - v$.

على الرغم من أننا بحاجة فقط لوضع القمم في قائمة لتحديد المسار، يجب أن نفكر بالمسار على أنه قائمة متلاحقة من القمم والحواف (قمة – حافة – قمة – حافة... وهكذا). طول المسار هو عدد الحواف المقطوعة، وهو أيضاً أقل بواحد من طول القائمة. طول المسار في (1, 2, 6, 2, 4, 5, 2) يساوي 6 وطوله في (8, 6, 8, 6, 8, 6, 9, 10, 1, 8) يساوي 10.

السؤال 224: لتكن v أي قمة من $K_{3,3}$. كم عدد الطرق الممكنة بحيث يكون طول المسار 6 إذا بدأنا وانتهينا في v؟

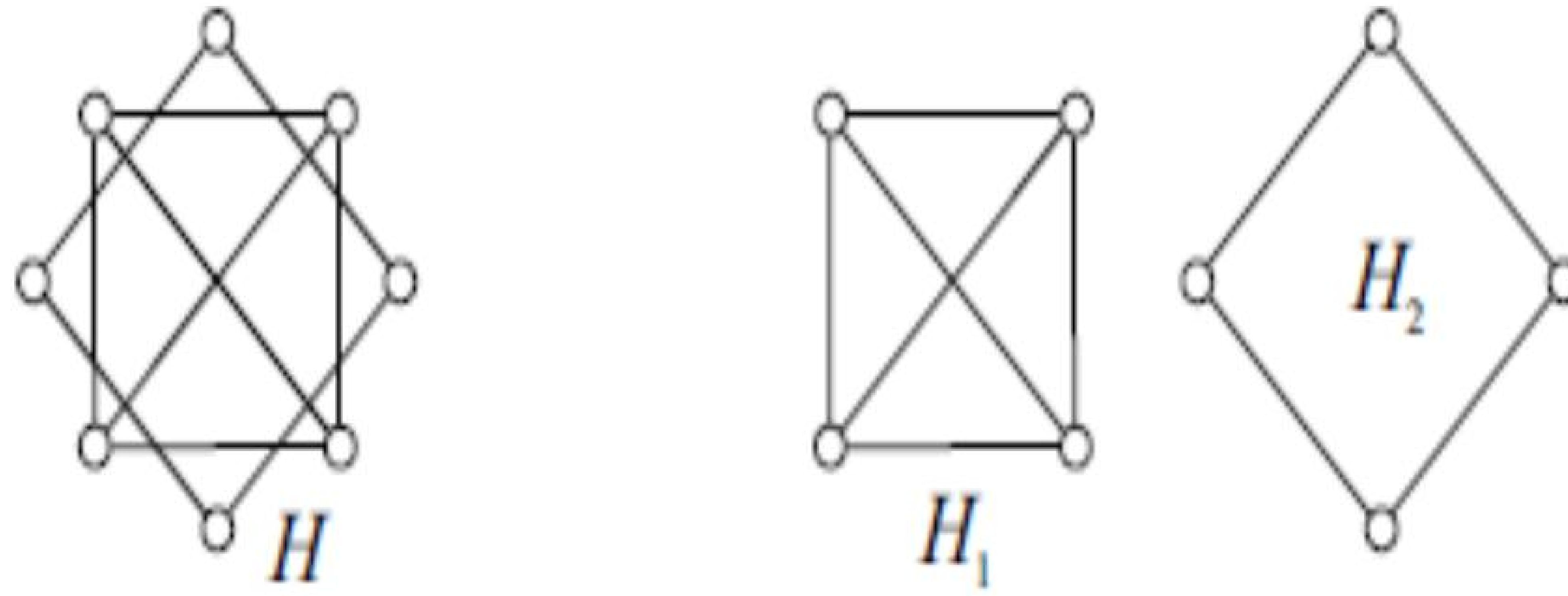
المسار في المخطط هو المسار بحيث لا يكون هناك تكرار لأي قمة. لا تحقق أي حالة مشي في الفقرة السابقة شروط المسار، لكن (4, 5, 6, 2) و(5, 2) هي مسارات في G_1.

السؤال 225: جد مسار 3-4 طوله 9 في G_1

يكون المخطط مترابطاً إذا كان هناك لكل زوج من القمم v و u مسار $u - v$، إذا لم يتحقق ذلك يكون المخطط غير مترابط، بشكل مبسط، يكون المخطط مترابطاً إذا استطعنا الانتقال من أي قمة إلى قمة أخرى عبر الحواف. المخطط G_1 غير مترابط لأنه

لا يوجد على سبيل المثال مسار بين 1 و3. لكن المخطط G_2 مترابط لأنه يوجد مسار يصل أي قمتين. ورغم وجود عدد من الأزواج يساوي $45 = \binom{10}{2}$، إلا أنه ليس بالضرورة تفقد المسار بين كل زوج. في السؤال 225، وجدت مساراً يحتوي جميع القمم العشر ونستنتج من ذلك أن G_2 مترابط.

قد يبدو المخطط مترابطاً ولكنه في الحقيقة غير مترابط، كما في المخطط H في الأسفل:



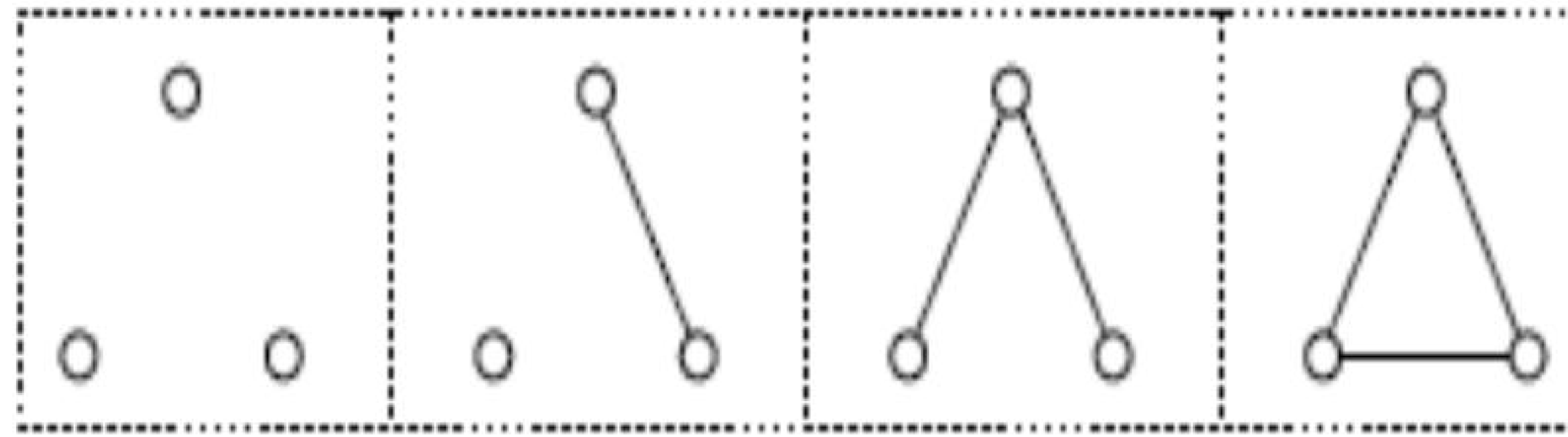
يمكن تجزئة المخطط H إلى مكونين. المكون المترابط (Connected Component) أو المخطط الفرعي المترابط لا يمكن جعله أكبر بإضافة قمم أو حواف. المكون H_1 هو مخطط مكتمل له 4 قمم والمكون H_2 هو حلقي رباعي. يمكن أن نكتب $H = H_1 \cup H_2$ لنشير إلى أن H غير مترابط وأن مكوناته هي H_2 و H_1. المخطط السابق G_1 له مكونان بينما G_2 مخطط مترابط وله مكون واحد فقط.

السؤال 226: ارسم المخطط $K_{2,3} \cup P_5 \cup K_4 \cup K_1$

المخططات المرمزة، المخططات غير المرمزة، التماثل

رمزنا بعض المخططات في هذا الفصل والبعض الآخر لم نرمزه. المخططات في الشكل 6.1 له قمم مرمزة أما المخططات التي أُعطيت كمثال على المخططات المكتملة والحلقية والمسار لها قمم غير مرمزة. يمكن عدم ترميز القمم عندما نهتم فقط بهيكلية علاقات التقارب في المخطط. على سبيل المثال، في الرسم K_5 الهيكلية المهمة هي أن كل زوج من القمم متقاربة. ليس من المهم أن نرمز بأرقام ـ 51-، أو الحروف *a-e*، أو أي بمجموعة من الأسماء مثل سو، راي، كاري وإيلي.

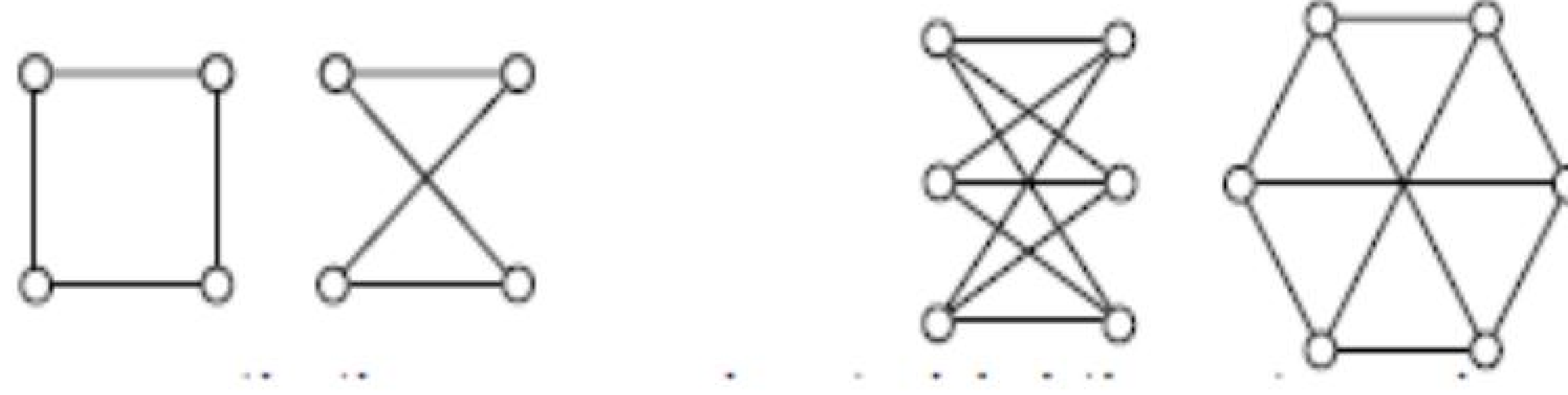
إن مشكلة عد المخططات غير المرمزة (Unlabeled Graphs) أصعب بكثير من عد المخططات المرمزة (Labeled Graphs). وجدنا أنه يوجد $2^{\binom{3}{2}} = 8$ مخططات مرمزة مختلفة لثلاث من القمم وتم تمثيل ذلك في الشكل 26.. لكن يوجد أربعة مخططات غير مرمزة للقمم الثلاث:



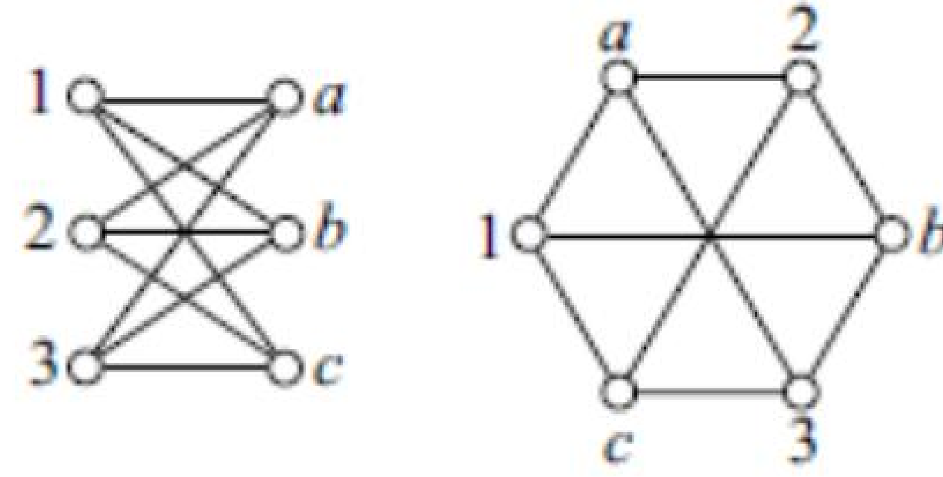
تم تمثيل كل مخطط غير مرمز باستخدام نوع مختلف من التكافؤ، واعتبرنا أن المخططين المرمزين متكافئين شرط أن يظهرا متماثلين في الشكل عند إزالة رموز القمم.

السؤال 227: كم عدد المخططات غير المرمزة المختلفة الممكنة لعدد من القمم يساوي 4 ولها ثلاث حواف فقط؟

يوجد عدم وضوح في قولنا "يظهر متشابهاً". بدلاً من ذلك يجب تطبيق مفهوم التماثل (Isomorphism). سوف نحاول توضيحه قبل وضع تعريف عام له. ليس من الصعب ملاحظة أن المخططين على اليسار يمثلان المخطط غير المرمز نفسه، وهو في هذه الحالة الدورة C_4. لكن ماذا بالنسبة إلى المخططين على اليمين؟



إحدى الطرق المستخدمة للتأكد من أنهما مخططان متطابقان تماماً هي وضع رموز على القمم لكل مخطط بنفس المجموعة من القمم، ومن ثم فحص إذا كانت مجموعة الحواف متطابقة، هذا مثال على ذلك:



كلا المخططين لهما المجموعة نفسها من الحواف، وهي

$\{1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 2c, 3a, 3b, 3c\}$ (هنا كتبنا $1a$ كاختصار لـ $\{1, a\}$)

وهكذا كلاهما يمثلان بالتـأكيد المخطط نفسه غير المرمز.

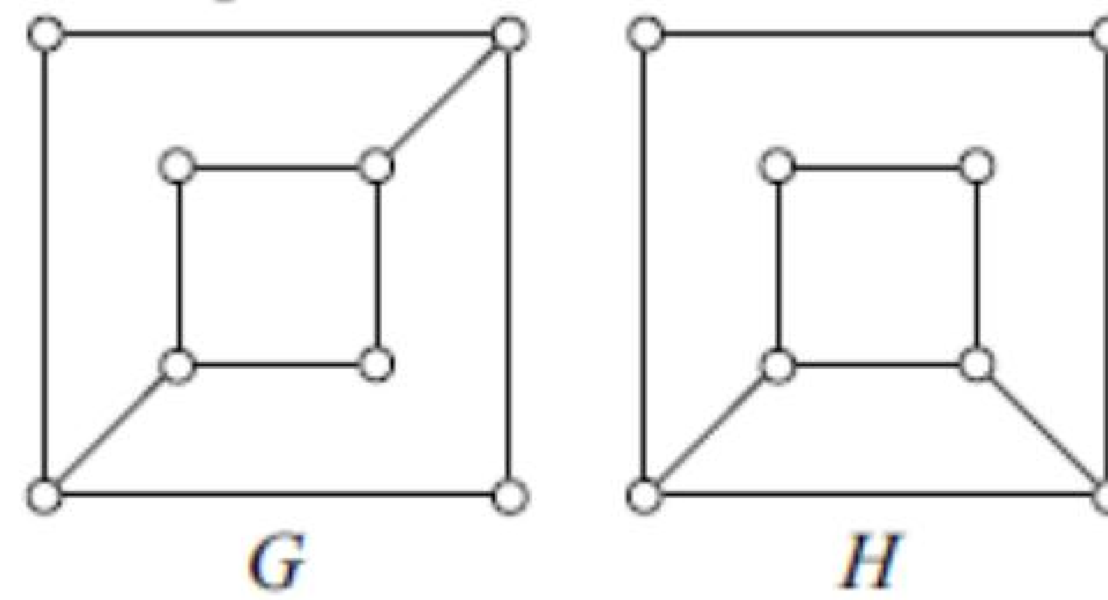
ليس من الضروري استخدام الترميز نفسه لكل مجموعة من القمم، طالما أننا نحافظ على علاقات التجاور بين القمم، يمكن توضيح ذلك بشكل دقيق عن طريق التعريف التالي:

التعريف 1.56.: إذا كان المخططان H وG متماثلين (Isomorphic) فإن ذلك يؤدي إلى وجود علاقة ثنائية $\emptyset: V(G) \to V(H)$ بحيث تحقق الخاصية التالية: لكل $u, v \in V(G)$ نحصل على $u \sim v$ في G إذا، وفقط إذا، $\emptyset(u) \sim \emptyset(v)$ في H. تسمى الدالة $\emptyset$ دالة التماثل (Isomorphism Function). إذا كان H و G متماثلين نكتب $G \cong H$.

إذا كان هناك مخططان متماثلان، عندها فإن جميع الموسطات والخصائص الهيكلية التي يمتلكها أحد المخططين يمتلكها المخطط الآخر- هذا عادة ما يستخدم (بشكل عكسي) لإثبات أن مخططين ليسا متماثلين عن طريق إيجاد خاصية يمتلكها أحد المخططين ولا يمتلكها المخطط الآخر.

مثال: تحديد إذا ما كان المخططان متماثلين

هل المخططان التاليان متماثلان؟



لا يمكن الاستنتاج ببساطة أنهما ليسا متماثلين عن طريق القول إن الرسمين "متقاربان في الشكل وكأنهما لا يظهران متطابقين تماماً". بما أن نفس المخطط غير المرمز يمكن رسمه بعدة طرق تبدو مختلفة، لا يمكن البحث في أي من خصائص الرسم. ما نحتاجه هو خاصية يمتلكها G ولا يمتلكها H، والعكس صحيح.

لاحظ أن كلا المخططين لهما نفس العدد من القمم والحواف، وأيضاً كلاهما له 4 قمم درجتها تساوي 2 و4 قمم درجتها تساوي 3. لكن لاحظ أنه في G كل حافة تصل قمة درجتها 3 مع قمة درجتها 2، وهذا غير صحيح في H، أي أن $G \ncong H$.

السؤال 228: ارسم مخططين منتظمين غير متماثلين لكل منهما 6 قمم

بعض الخصائص التوافقية

القمم التي لها نفس الدرجة

في أي مجموعة n من الناس، يجب أن يكون هناك شخصان يمتلكان العدد نفسه من المعارف في هذه المجموعة. إذا فرضنا أن مجموعة الناس هي مجموعة القمم، وإذا اعتبرنا أن هناك حافة بين شخصين متماثلين في المعرفة، عندها تصبح العبارة حول مجموعة الناس هي نفس العبارة التالية حول المخطط.

المبرهنة 6.1.6: في أي مخطط يجب أن يكون هناك قمتان لهما نفس الدرجة

الإثبات: افترض أن $G = (V, E)$ هو مخطط له عدد n من القمم. إذا كان G له قمة بدرجة تساوي $n - 1$، عندها تكون هذه القمة متجاورة مع جميع القمم الأخرى في المخطط. ذلك يعني أنه لا يوجد قمة درجتها صفر، بالتالي يمكن الكتابة $1 \leq d(v) \leq n - 1$ لجميع قيم v، بما أنه يوجد عدد n من القمم، ووفقاً لمبدأ برج الحمام يوجد قمتان لهما نفس الدرجة. إذا كان G ليس له قمة بدرجة تساوي $n - 1$، بالتالي يمكن الكتابة $0 \leq d(v) \leq n - 2$ لجميع قيم v. مرة أخرى بما أنه يوجد عدد n من القمم، وفقاً لمبدأ برج الحمام يوجد قمتان لهما نفس الدرجة.



المخطط المنتظم ذو الجزئين

تبين مبرهنة العدّ التالية أنه إذا كان المخطط ذو الجزئين منتظماً، يجب أن يكون نفس العدد لمجموعتي القمم.

المبرهنة 1.76.: إذا كان $G = (V_1 \cup V_2, E)$ مخططاً منتظماً على k حيث $k > 0$، عندها يكون $|V_1| = |V_2|$.

برهان توافقي: افترض أن $G = (V_1 \cup V_2, E)$ هو مخطط منتظم على k حيث $k > 0$، كم عدد الحواف التي يمتلكها G؟

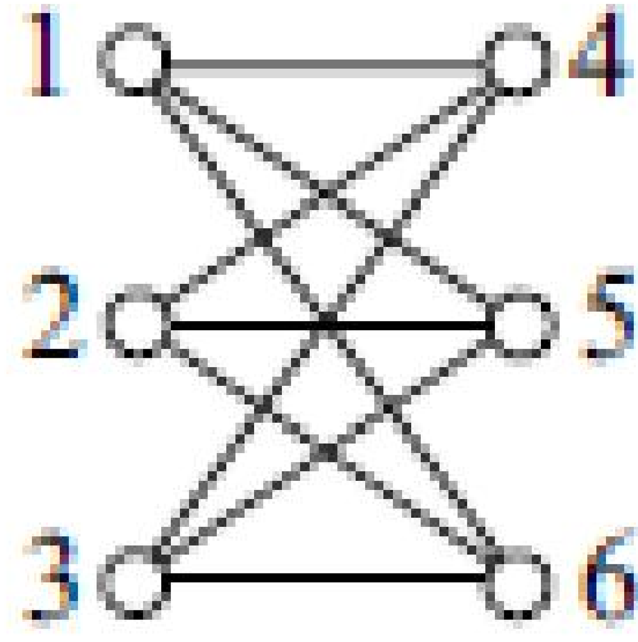
الجواب 1: بما أن G ذو جزئين، تلامس كل حافة قمة واحدة فقط في V_1، بما أن G منتظم على k، ذلك يعني أن له عدداً من الحواف يساوي $k|V_1|$.

الجواب 2: بما أن G ذو جزئين، تلامس كل حافة قمة واحدة فقط في V_2، بما أن G منتظم على k، ذلك يعني أن له عدداً من الحواف يساوي $k|V_2|$.

ذلك يثبت أن $k|V_1| = e(G) = k|V_2|$، ونستنتج من ذلك أن $|V_1| = |V_2|$ بما أن $k > 0$.

عدّ المسارات

كان طلب السؤال 224 هو إيجاد عدد محدد من المسارات السداسية في المخطط المكتمل ذي الجزئين $k_{3,3}$، ترميز القمم في هذا المخطط هو كما يلي:



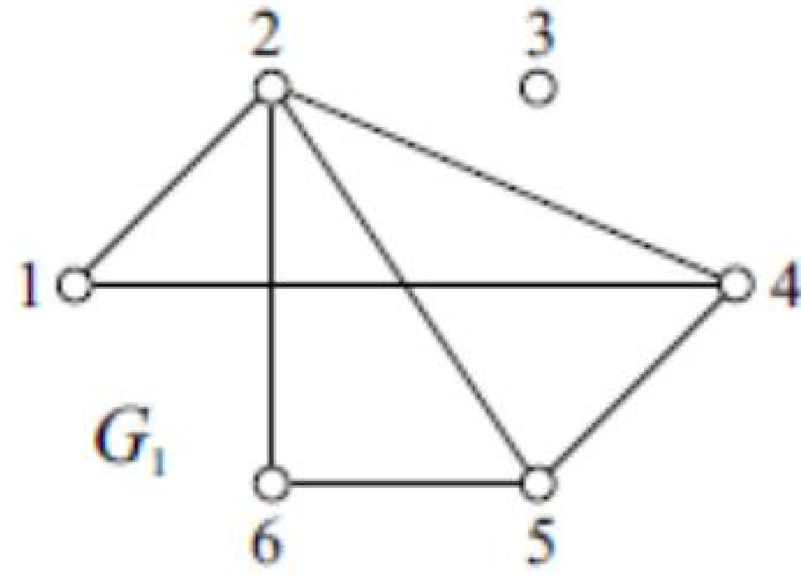
لإجراء العدّ، أو دعنا نقُل، المسار السداسي الذي يبدأ من 1 وينتهي في 3، نحتاج إلى أن نعد قائمة على الشكل $(1, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, 3)$ حيث الاختيار

$V_1 - V_5$ يحقق علاقة التجاور في المخطط. بما أن $k_{3,3}$ ثلاثية منتظمة وذات جزئين، من السهل القول: يوجد 3 اختيارات من القمم الخمس، لذلك يوجد عدد من المسارات يساوي $3^5 = 243$.

السؤال 229: افترض وجود $k_{3,5}$، وافترض أن v هي أي قمة في المجموعة الجزئية التي حجمها 3. كم عدد المسارات العشرية (10) بحيث تكون البداية والنهاية في v؟ وكم عددها إذا كانت المسارات تسعية (9).

إذا كان المخطط غير مبني بشكل جيد فمن الممكن أن لا يكون حساب المسار واضحاً. سوف نقدم طريقة ذكية لحساب ذلك باستخدام ضرب المصفوفات. إذا كان لدينا مخطط مرمز $G = (V, E)$ له عدد n من القمم، مصفوفة التقارب له هي $n \times n$ ورمزها A حيث $A_{ij} = 1$ عندما $i \sim j$ وبخلاف ذلك تكون $A_{ij} = 0$.

التالي هي مصفوفة التقارب B للمخطط G_1. الصفوف والأعمدة للمصفوفة B مرمزة مع مجموعة القمم $V(G_1)$.



$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array} = B.
$$

لاحظ أن هذه المصفوفة متماثلة ($B_{ij} = B_{ji}$ لجميع قيم j و i) ولها قيم صفرية على الأقطار.

الآن لو أردنا معرفة عدد المسارات خلال 4-1 والتي طولها 5، نجد بكل بساطة B^5 وننظر في العنصر داخل المصفوفة في الصف 1 والعمود 4. باستخدام برمجية MATLAB نجد أن:

$$B^5 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 24 & 45 & 0 & 38 & 33 & 27 \\ 45 & 64 & 0 & 58 & 58 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 38 & 58 & 0 & 44 & 52 & 33 \\ 33 & 58 & 0 & 52 & 44 & 38 \\ 27 & 45 & 0 & 33 & 38 & 24 \end{pmatrix} \end{array}$$

يذلك يكون الجواب 38، لأي قمة i أو j عدد المسارات لـ $i - j$ بطول 5 تحسب بسهولة لأنها تساوي قيمة العنصر (i,j) للمصفوفة B^5. على سبيل المثال، عدد المسارات لـ 6–2 بطول 5 تساوي 45.

السؤال 230: إذا افترضنا أن خاصية عد المسارات هي صحيحة، لماذا تكون عناصر الصف الثالث والعمود الثالث جميعها تساوي صفراً؟ وأيضاً لماذا المصفوفة B^5 متماثلة؟ وضح كلتا الإجابتين وفقاً لمفهوم عدّ المسارات على G_1.

لماذا حصلنا على نتائج بهذه الطريقة؟ سوف يتوضح ذلك لديك عند محاولة حل التمرين 13، لكن كفكرة عامة على ذلك؛ النتيجة التالية تمثل ما نريد أن نثبته:

المبرهنة 6.1.8 افترض أنه لدينا المخطط G وأن A هي مصفوفة التجاور. عندها لجميع قيم $k \geq 1$ تكوّن العناصر (i, j) في A^k مساوية لعدد من المسارات $i - k$ بطول k في G.

دعنا ننظر إلى المثال G_1 لنحلل المسألة إلى خطوات. افترض أنه يوجد عدد من المسارات في B^5 كما هو مبين في المبرهنة. بذلك ولجميع قيم j و i،

$B^5{}_{ij} =$ رقم $(i - j)$ لطول 5 في G^1

ويستند حقيقة ذلك على افتراض أن نرى لماذا $B_{1,4}^6$، مساوية إلى عدد مسارات 4-1 لطول 6. المهم أن نكتب $B^6 = BB^5$، ومن ثم نستخدم تعريف ضرب المصفوفة ونشتق الفرضية. إن تعريف ضرب المصفوفة يعطينا

$$B^6{}_{1,4} = \sum_{k=1}^{6} B_{1,k}\, B^5{}_{k,4}$$

$$= B_{1,1}B^5{}_{1,4} + B_{1,2}B^5{}_{2,4} + B_{1,3}B^5{}_{3,4} + B_{1,4}B^5{}_{4,4} + B_{1,5}B^5{}_{5,4} + B_{1,6}B^5{}_{6,4}$$

لكن $B_{1,2} = B_{1,4} = 1$ وباقي قيم $B_{k,4}$ تساوي صفراً، لذلك:

$$B^6{}_{1,4} = B^5{}_{2,4} + B^5{}_{4,4} = 58 + 44 = 102$$

بغض النظر عن التعقيد في المعادلات، يبدو هذا منطقياً: لتحديد طول المسار السداسي من 1 إلى 4، القمة التي نبدأ بها سوف تأخذنا إلى القمة 2 أو القمة 4.

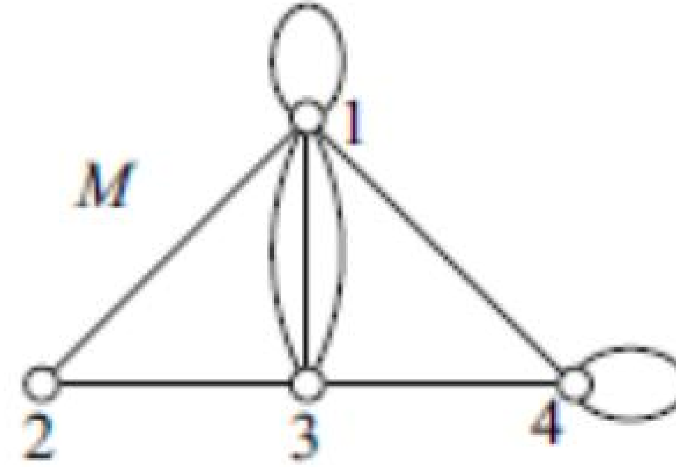
- إذا كان مسارنا {1,2}، ما تبقى من المسار هو مسار طوله 5 من 2 إلى 4، ذلك يساوي $B^5{}_{2,4} = 58$.

• إذا كان مسارنا $\{1,4\}$، ما تبقى من المسار هو مسار طوله 5 من 4 إلى 4، ذلك يساوي $B^5{}_{4,4} = 44$.

وفقاً لمبدأ الجمع $B^5{}_{2,4} + B^5{}_{4,4} = 58 + 44 = 102$، هذه فكرة أساسية من خلالها يمكن إثبات المبرهنة (انظر تمرين 13).

ملاحظة حول المخططات المتعددة

في بداية هذا القسم قمنا بتعريف المخطط ذي الجزئين $G = (V, E)$ حيث V مجموعة محدودة وE مجموعة من مجموعتين جزئيتين في V. هذا التعريف منع وجود نسختين من نفس الحافة في المخطط (لأن E هي مجموعة واحدة لا مجموعات عدة) ولم يسمح التعريف بأن تصل حافة بين قمة مع نفسها (لأن الحواف عبارة عن مجموعتين جزئيتين وليس مجموعات متعددة). إذا لم يتحقق أي من هذين الشرطين عندها يكون لدينا مخطط متعدد (Multigraph). الرسم مثال على ذلك:



للمخطط المتعدد $M = (V, E)$:

$V = \{1,2,3,4\}$
$E = \{\{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,3\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,4\}\}$

لاحظ أن كل حافة هي ذات مجموعتين متعددتين من V وأن E هي متعددة المجموعات أيضاً.

الحافة $\{1,1\}$ هي حلقة، والحواف $\{1,3\},\{1,3\},\{1,3\}$ هي حواف متعددة. الحلقة تساهم بدرجتين بالقمة الواقعة عليها. ومن نفس المخطط المتعدد نحصل على:

$$d(4) = 4 \quad d(3) = 5\,, \quad d(2) = 2, \quad d(1) = 7,$$

السؤال 231: هل مسلمة المصافحة صحيحة في المخططات المتعددة؟ أثبت ذلك أو أعطِ مثلاً معاكساً.

ملخص

في هذا القسم تم استعراض الكثير من المعلومات والمصطلحات حول المخططات. كما أثبتنا بعض النتائج الأساسية المتعلقة بالمخططات.

تمارين

1) كم عدد المخططات المرمزة الممكنة لعدد n من القمم والتي لها عدد m من الحواف فقط؟

2) لتكن G مخططاً تكون مجموعة القمم فيه مجموعتين جزئيتين من [5]، وتكون فيه قمتان متجاورتين إذا، وفقط إذا، كانت المجموعتان الجزئيتان اللتان تحويهما منفصلتين.

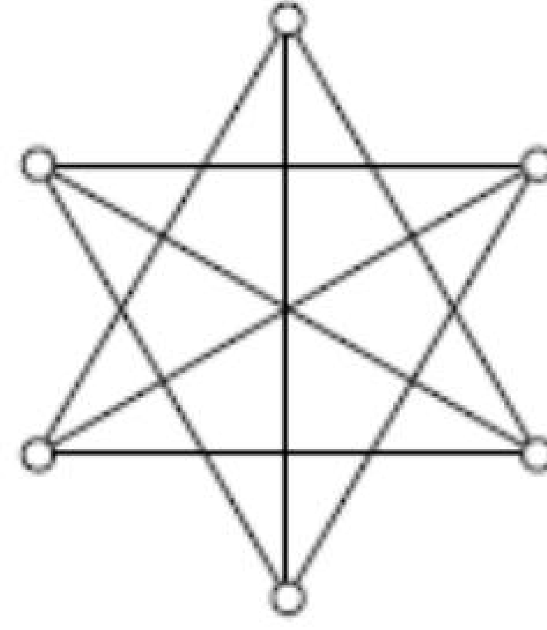
أ) ارسم G.

ب) جِد مخططاً تم ذكره في هذا القسم متماثلاً مع G، وأثبت ذلك.

3) أثبت أن: إذا كان G مخططاً متصلاً عدد القمم فيه n والحواف $n-1$ حيث $n \geq 2$، عندها يكون لـ G على الأقل قمتان درجتهما = 1.

4) يوجد عدد من المخططات المرمزة يساوي $2^{\binom{4}{2}} = 2^6 = 64$ لعدد من القمم يساوي 4. كم عدد المخططات غير المرمزة (غير المتماثلة) لعدد من القمم يساوي 4؟

5) حدد مع الإثبات إذا كان الرسم التالي متماثلاً في $K_{3,3}$.



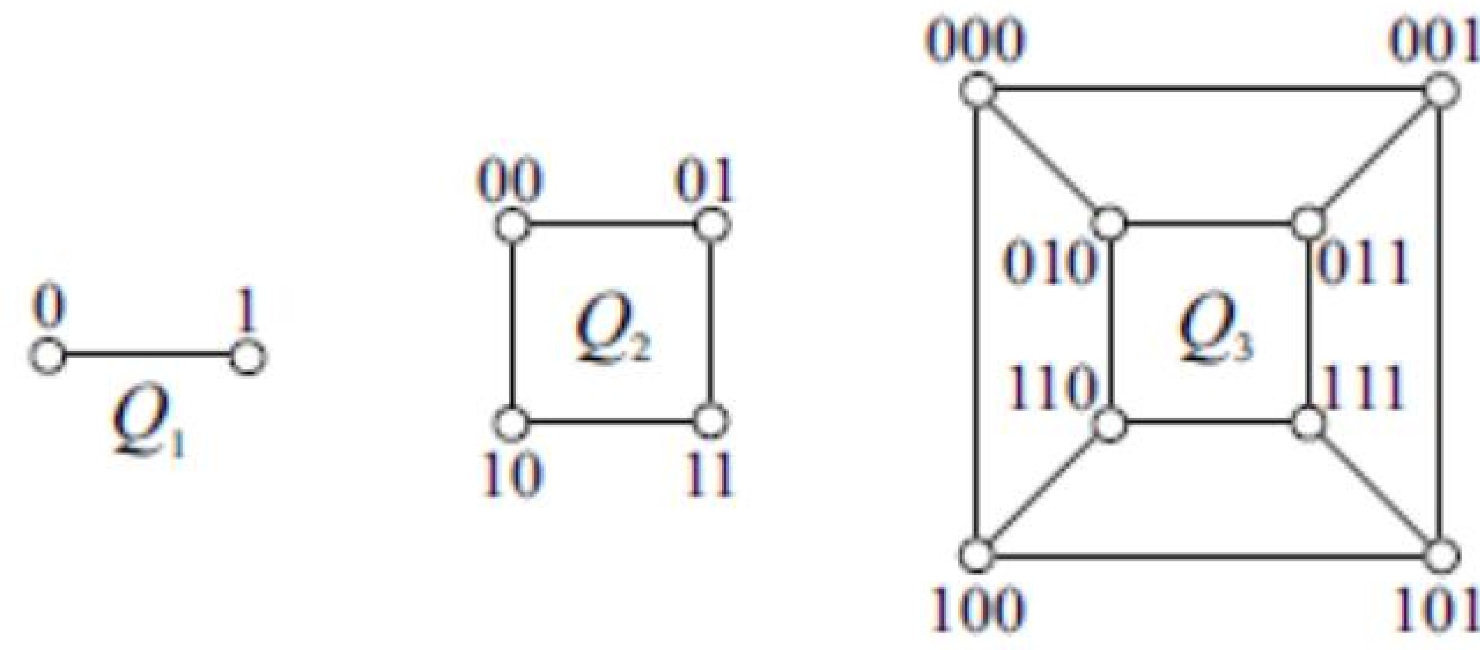
6) ليكن $G = (V, E)$ مخططاً. متممة G هو المخطط $\bar{G} = (V, E^c)$ حيث E^c هي متممة E على مجموعة الحواف $K_{n(G)}$. بمعني لجميع قيم $i, j \in V(G)$ يكون $\{i, j\} \in E^c$ إذا، وفقط إذا، كانت $\{i, j\} \notin E$.

أثبت أنه إذا كان $G \cong \bar{G}$، ينتج عن ذلك $n(G) \equiv 0$ أو $n(G) \equiv 1$.

7) أثبت أنه إذا كان $\delta(G) \geq k$، عندها ينضمن في طول مسار على الأقل k.

8) أثبت أن عدد المخططات المرمزة بحيث يكون لكل قمة درجة زوجية يساوي $2^{\binom{n-1}{2}}$.

9) إذا كان $k \geq 1$، يسمى المخطط Q_k مكعباً ذا أبعاد تساوي k. مجموعة القمم فيه هي الأعداد الثنائية التي عدد منازلها k، وتكون القمتان فيه متجاورتين إذا، وفقط إذا، كان رقميهما الثنائيين مختلفين في منزلة واحدة فقط. الرسم يبين Q_1, Q_2 وQ_3:



لاحظ أن $n(Q_k) = n^k$

أ) جد $e(Q_k)$.

ب) أثبت أن Q_k ذو جزئين لجميع قيم $k \geq 1$.

10) (اعتماداً على (2001) West) استخدم المخططات للحصول على إثباتات مدمجة للنتائج التالية.

أ) $\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-1) + \binom{n-k}{2}$

ب) افترض أن $n_1, n_2, \ldots, n_k$ هي أعداد صحيحة موجبة. إذا كان $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$، عندها:

$$\sum_{k=1}^{6} \binom{ni}{2} \leq \binom{n}{2}$$

ما هي شروط تحقق المتباينة؟

11) أثبت أنه إذا كان G مخططاً عدد القمم فيه يساوي n بحيث $\delta(n) \geq \lfloor n/2 \rfloor$، عندها أي قمتين يجب أن تكونا متجاورتين أو مجاورتين لقمة واحدة أخرى.

12) (جبر خطي) جد عدد:

أ) المسار 5-5 طوله 8 في المخطط G_1 في الشكل 6.1

ب) المسارات 000-001 بطول 8 في المخطط المكعب Q_3 (انظر التمرين 9)

ج) المسار $u - v$ بطول 8 في الحلقة C_5، حيث v و u أي قمتين متجاورتين.

13) (جبر خطي) أثبت النظرية 6.1.8 على k بطريقة الاستنتاج.

14) (جبر خطي) لتكن A هي مصفوفة التقارب لـ $K_{r,r}$، افترض أن A تكتب على الشكل:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}$$

حيث J هي المصفوفة $r \times r$ هي جميع العدد 1 والعدد 0 في المصفوفة الصفرية $r \times r$. جد مع البرهان صيغة A^k.

15) (جبر خطي) لتكن A هي المصفوفة $r \times r$ التي قيم عناصر أقطارها = صفر وباقي عناصر المصفوفة = 1. جد صيغة A^k عن طريق عد المسارات في مخطط ما.

ملاحظات سريعة

على الأرجح كان أول من بحث في نظرية المخطط هو ليونارد أويلر في عام 1730 عندما قام بحل مسألة جسر كونغزبارغ (Königsberg) الشهيرة. لم يحدث أي تقدم في هذا العلم تقريباً حتى نهايات 1800 عندما اهتمّ به مجدداً بعض علماء الرياضيات مثل آرثر كايلي (Arthur Cayley) وجيمس جوزيف سلفستر وحصلوا على بعض النتائج المهمة. في القرن العشرين تمت دراسة الموضوع بشكل موسع لما كان له من أثر كبير في تطور الكثير من العلوم التطبيقية وعلم الحاسوب أيضاً.

أطلق مصطلح "مخطط" من قبل سلفستر الذي عُيّن عام 1877 كأول أستاذ رياضيات في جامعة جون هوبكنز الجديدة. يستخدم بعض المؤلفين مصطلح مخطط بسيط (Simple Graph) بدلاً من "مخطط" للإشارة إلى المخططات من دون حلقات ومن دون حواف متعددة. ثمة مقدمة رائعة وشاملة حول المخططات في الكتابين West (2001) و(Chartrand & Zhang (2005)).

2.6 عدّ الأشجار

تعتبر مخططات الأشجار أهم المخططات المستخدمة في الكثير من التطبيقات، وعلى وجه الخصوص في علم الحاسوب. يبين الشكل 6.4 ثلاثة أمثلة عليها. الشجرة (Tree)هي مخطط متصل وغير حلقي. والغابة (Forest) هي مخطط غير دائري، كل

مكون متصل في الغابة يعتبر شجرة. في هذا القسم سوف نستعرض القليل من الخصائص الأساسية للأشجار، ومن ثم سنقوم باختبار مسألتين متعلقتين بالتعداد. الأولى هي إيجاد عدد الأشجار المرمزة لعدد من القمم يساوي n، وسوف نثبت ذلك باستخدام طريقتين مختلفتين من بين عدد من الإثباتات الممكنة. ومن ثم سوف ندرس تعداد طرق البحث الثنائية، والتي تعتبر هيكلية بيانات أساسية في علم الحاسوب.

السؤال 232: أعطِ تفسيراً سريعاً لكون الأشجار مخططات ذات جزئين.

خصائص مهمة للأشجار

أوراق الشجرة

ورقة الشجرة (A Leaf of a Tree) هي قمة درجتها 1، كل شجرة في الشكل 6.4 تمتلك على الأقل ورقتين، وهذا لم يكن مصادفة. أي شجرة لها قمتان يجب أن يكون لديها على الأقل ورقتان. لبرهنة ذلك نستخدم تقنية مهمة وهي تقنية الوصول إلى الحد الأقصى.

المبرهنة 6.2.1 إذا كانت T شجرة لها على الأقل قمتان، فلها على الأقل ورقتين.

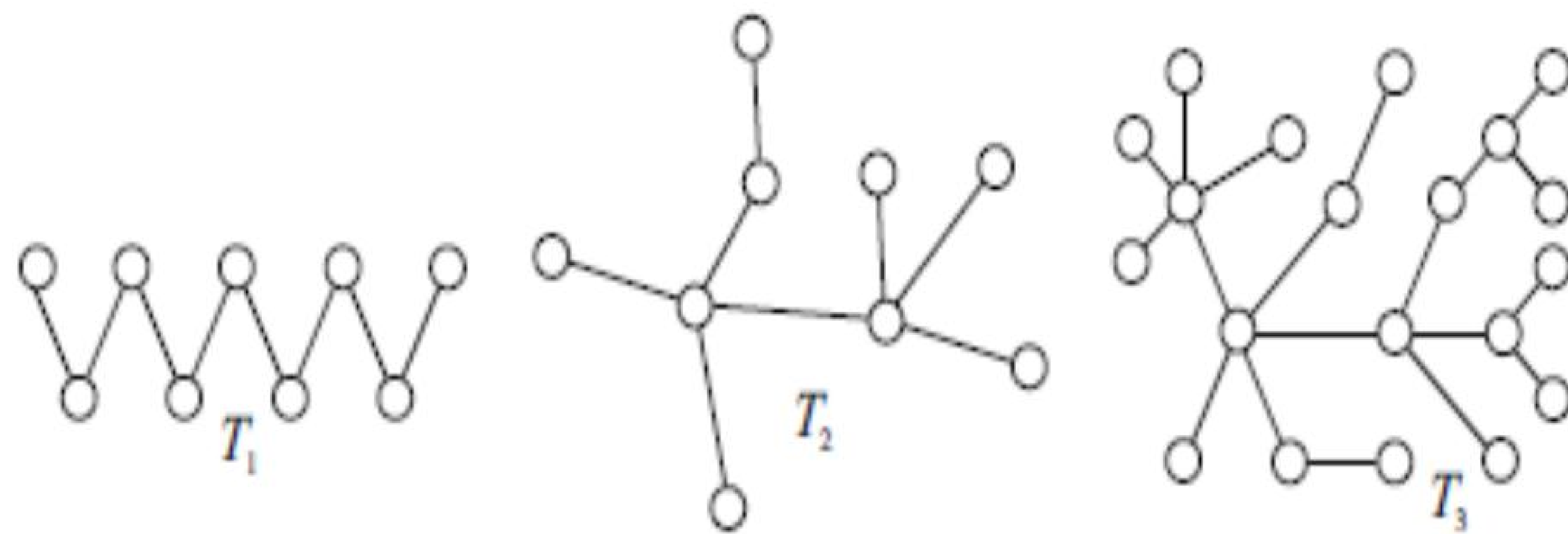
البرهان: لنفترض أن T هي شجرة لها n قمة حيث $n \geq 2$، لتكن P هي المسار الأكبر في T. لندعُ القمتين في طرفي المسار v_2و v_1، وهاتين يجب أن تكونا ورقتين في T، وتالياً تفسير ذلك:

افترض، وهذا يناقض المبرهنة، أن v_1 ليست ورقة في T. من المعلوم أن بعض الحافات مثل $\{v_1, w\}$ هي في المسار P، لا يمكن لهذه القمة أن تكون على المسار P، لأنها لو كانت كذلك لكان $P+ \{v_1, w\}$ مخططاً أدنا v_1 في T يحتوي على دائرة، وهذا مستحيل لأن T هي شجرة. كذلك لا يمكن أن تكون خارج المسار P، إذ عندها$P+ \{v_1, w\}$ سيكون مساراً أطول في T من P، وهذا أيضاً مستحيل لأن P هي المسار الأطول في الشجرة.

وبالتالي لا يمكن وجود قمة U، وعليه $V1$ هي ورقة في T. ونفس البرهان يظهر أن $v2$ هي ورقة في t. وبالتالي فالشجرة T تتضمن ورقتين على الأقل.

■

افترضنا أن v_1 ليست ورقة في T يعني أنه يوجد قمة أخرى u مجاورة للقمةv_1.



الشكل 6.4: ثلاثة أمثلة على أشجار.

إلغاء ورقة من شجرة

إلغاء أحد أوراق في شجرة يجعل الشجرة أصغر. تستفيد الكثير من الإثباتات المتعلقة بالأشجار من هذه الحقيقة، وعادة عن طريق الإثبات بالاستقراء الرياضي.

المبرهنة 6.2.2 إذا كانت T شجرة لها على الأقل قمتان، وكانت v ورقة في هذه الشجرة T، عندها تكون $T - v$ أيضاً شجرة.

البرهان: افترض أن T شجرة لها على الأقل قمتان وكانت v ورقة في الشجرة T. افترض وجود مخطط $T - v$، يجب أن نثبت أن $T - v$ متصل وغير دورية.

لا ينتج عن إلغاء القمة v دائرة، لذلك تبقي $T - v$ غير دورية. هل هي متصلة؟ لنأخذ أي قمتين w و u في $T - v$، هاتان القمتان موجودتان أيضاً في الشجرة T، ذلك يعني أنه يوجد مسار P_{uw} في T يصل بين wو u. لا يمكن أن يمر المسار في القمة v الموجودة في T لأنها هي نفسها ورقة، ذلك يعني أن إلغاء v والحافة المرتبطة بها سوف لن يؤثر على المسار P_{uw} في $T - v$. وبما أنه يوجد مسار بين أي قمتين في $T - v$، ذلك يعني أن $T - v$ متصلة، وبالتالي $T - v$ هي شجرة.

حساب عدد حواف شجرة ما

قد يكون للمخطط الذي له عدد n من القمم أي عدد من الحواف من صفر إلى $\binom{n}{2}$. لكن الشجرة التي لها عدد n من القمم يكون لها عدد محدد من الحواف. لاحظ

في الشكل 6.4 أن T_1 لها تسع قمم وثمان حواف. وكذلك T_2 لها تسع قمم وثمان حواف، أما T_3 لها 20 قمة و19 حافة.

المبرهنة 6.2.3 عدد الحواف في أي شجرة عدد القمم فيها n يساوي $n-1$.

الإثبات باستخدام الاستقراء على n: لتكن $n=1$. الشجرة الوحيدة الممكنة لقمة واحدة هي مخطط يحتوي على قمة واحدة ومن دون حواف. في هذه الحالة $n=1-1=0$، أي أن القاعدة الأساسية صحيحة.

افترض أن n عدد صحيح موجب، $n \geq 1$، وأنه أي شجرة من n قمة لها تماماً عدد من الحواف يساوي $n-1$. ولتكن T شجرة من $n+1$ قمة، بما أن $n \geq 1$، نعلم أن $n+1 \geq 2$ بالتالي تؤكد المبرهنة 6.2.1 أن T لها ورقة، ولتكن v. وتؤكد المبرهنة 6.2.2 أن $T-v$ هي شجرة بعدد n من القمم. ومن فرضية الاستقراء يمكننا أن نستنتج أن $T-v$ لها عدد من الحواف يساوي $n-1$. عند إعادة v إلى $T-v$ للحصول على T، نكون قد أضفنا حافة واحدة. ذلك يعني أن T عدد من الحواف يساوي $n = 1 + (n-1)$. وبما أن T لها عدداً من القمم يساوي $n+1$ وعدداً من الحواف يساوي $n = 1 - (n+1)$، بهذا يكتمل البرهان.

إعطاء خصائص للشجرة

يوجد طرق عدة لإعطاء خصائص لشجرة ما. لقد تجاهلنا إثبات المبرهنة التالية وتركنا بعضاً من التفاصيل في التمارين.

المبرهنة 6.2.4: إذا كانت T مخططاً عدد القمم فيه n، عندها تكون العبارات التالية متكافئة.

1) T متصلة ولها عدد من الحواف يساوي $n - 1$.

2) T غير دورية ولها عدد من الحواف يساوي $n - 1$.

3) T متصلة، لكن إلغاء أي من الحواف يجعلها غير متصل.

عد الأشجار المرمزة

في الفصل الماضي قمنا بسهولة بتعداد المخططات المرمزة التي لها n من القمم: عددها هو $2^{\binom{n}{2}}$. والقيام بتعداد الأشجار (Labeled Trees) المرمزة والتي لها n من القمم هي مسألة مختلفة تماماً. (1889) كايلي هو أول من أوجد صيغة المبرهنة التالية.

المبرهنة 6.2.5 كايلي لكل $n \geq 2$، عدد الأشجار التي لها n من القمم يساوي n^{n-2}.

سوف نقدم برهانين لهذه المبرهنة. الأول بأسلوب واحد لواحد والثاني بأسلوب تكرار العلاقات والاستقراء. ولا يمثل أي منهما الطريقة الأصلية التي استخدمها كايلي للإثبات.

السؤال 233: ارسم جميع الأشجار المرمزة والتي عددها 16 لأربع من القمم.

إثبات صيغة كايلي باستخدام أسلوب واحد لواحد

أثبت بروفير (Prüfer) (1918) صيغة كايلي، حيث تضمنت طريقته إيجاد علاقة واحد لواحد بين الأشجار المرمزة التي لها مجموعة من القمم $[n]$ والقائمة $(n-2)$ المأخوذة من $[n]$. وبما أنه يوجد عدد من القوائم n^{n-2}، هذا سوف يثبت صيغة كايلي ما إن يتم إنشاء علاقة واحد لواحد. تسمى القائمة $(n-2)$ المتعلقة بشجرة مرمزة سلسلة بروفير للشجرة.

لإنشاء سلسلة بروفير لشجرة مرمزة: افترض $L = (\quad)$، قائمة فارغة. جد الورقة التي لها الرمز الأصغر. قم بمسح هذه الورقة من الشجرة وألحق الرقم المجاور لها في نهاية L. كرر هذه العملية حتى لا يبقى للشجرة إلا قمتين.

يظهر في الزاوية اليسار من الشكل 56. كيفية إنشاء القائمة السباعية لشجرة سلسلة بروفير ذات الـ (تسع قمم). سلسلة بروفير لهذه الشجرة هي (2,6,1,2,9,1,6).

السؤال 234: ما هي سلسلة بروفير لمسار بطول n حيث تكون القمم مرمزة بترتيب متصاعد من اليسار إلى اليمين؟ ما هي سلسلة بروفير لمسار له عدد n من القمم والمبين في الأسفل.



سؤال آخر، ما هي الشجرة التي لها سلسلة بروفير $(3,3,3,3,3)$ ؟

من الواضح أن الدالة التي تربط كل شجرة عدد قممها n بسلسلة بروفير تم تعريفها، بشكل جيد، سلسلة بروفير هي بالتأكيد مجموعة من القوائم التي طولها $n-2$، والمأخوذة من مجموعة القمم المرمزة $[n]$. من الجدير ذكره أن هذه الدالة تطبق على قيم صغيرة من n.

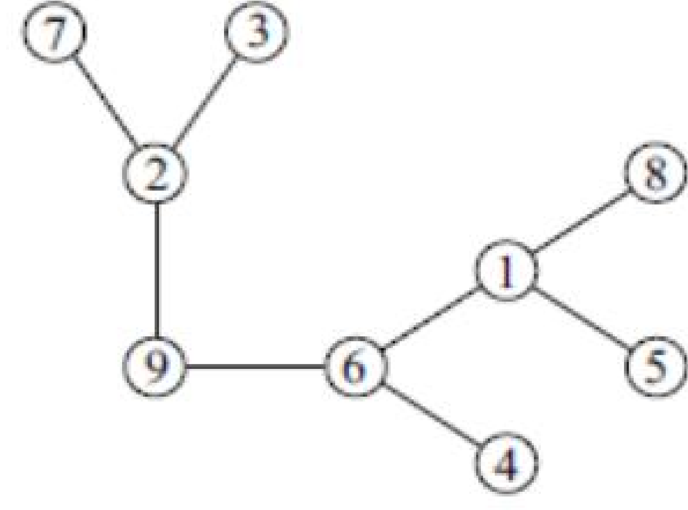
السؤال 235: جد سلسلة بروفير لكل من الأشجار المرمزة الـ 16 على 4 قمم ثم مثل جميع القوائم الثنائية المحتملة والمأخوذة من $[4]$.

سوف ندرس الآن القضية الصعبة وهي عكس هذا الإجراء. أي، إذا كان لدينا قائمة طولها $(n-2)$ مأخوذة من $[n]$ وأردنا تحديد الشجرة المرتبطة بها. في الإجراء التالي، تستمر القائمة U بتتبع القمم المطلوبة.

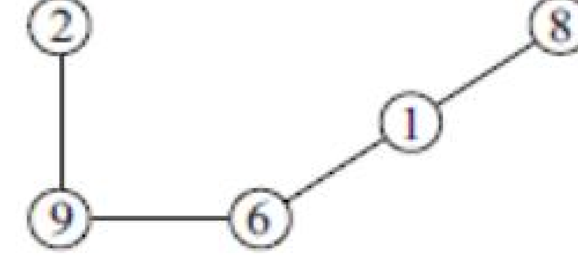
الإجراء العكسي لسلسلة بروفير: افترض L قائمة بطول $(n-2)$ مأخوذة من $[n]$ افترض $U = (\quad)$. كرر الإجراء التالي حتى تصبح L قائمة فارغة.

- ❖ افترض u هي القائمة الأصغر التي تظهر في أي من L أو U.
- ❖ افترض l هي أول قمة في L. أضف الحافة $\{l,\mathrm{u}\}$.
- ❖ قم بإلغاء l من L. أضف u في نهاية U.

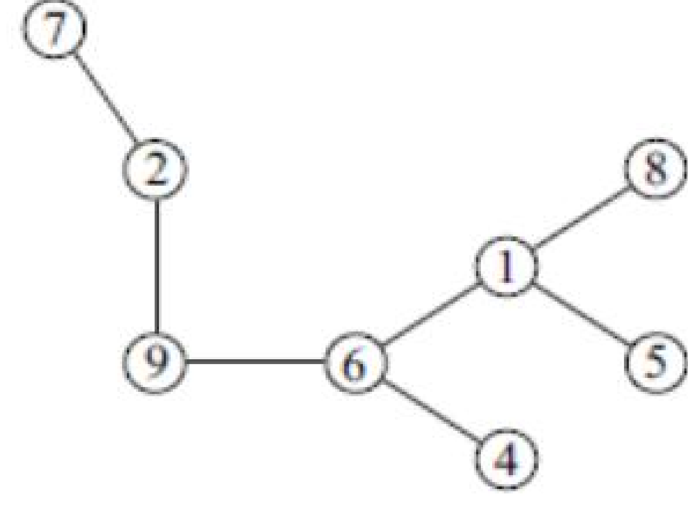
عندما تكون L هي القائمة الفارغة أضف الحافة التي تصل بين القمتين اللتين لا تظهران في U.



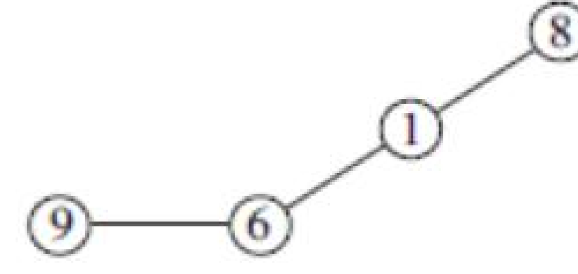
$L = ()$



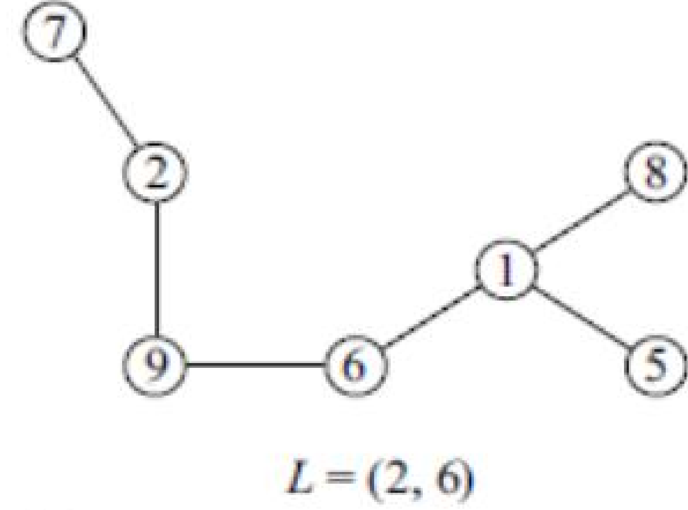
$L = (2, 6, 1, 2)$



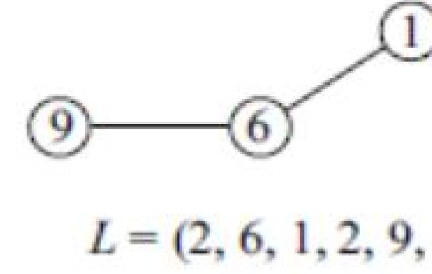
$L = (2)$



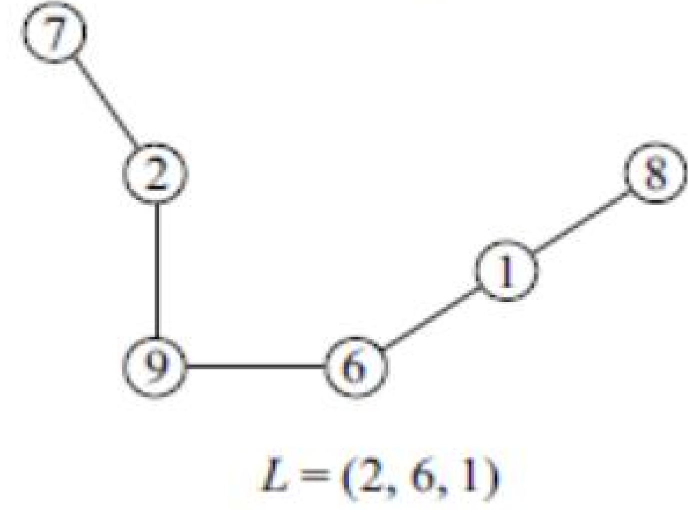
$L = (2, 6, 1, 2, 9)$



$L = (2, 6)$



$L = (2, 6, 1, 2, 9, 1)$



$L = (2, 6, 1)$



$L = (2, 6, 1, 2, 9, 1, 6)$

الشكل 6.5: انشاء سلسلة بروفير لشجرة ثمانية القمم.

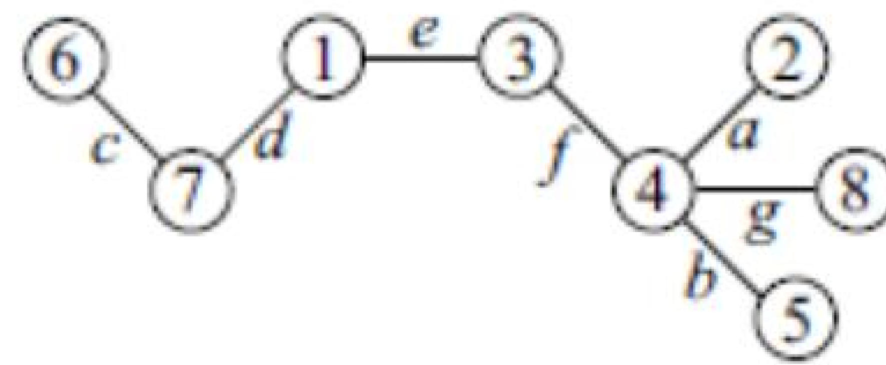
هل ينتج عن هذا الإجراء شجرة؟ لاحظ أنه ينتج من هذا الإجراء عدد القمم يساوي $n-1$ لأنه تم إضافة حافة واحدة لكل عنصر من العناصر التي عددها $n-2$ والموجودة في L، ومن ثم يتم إضافة حافة أخرى في النهاية. هذه بداية جيدة.

على سبيل المثال افترض $L = (4, 4, 7, 1, 3, 4)$. هذه قائمة سداسية أي أن الشجرة لها مجموعة من القمم [8]. يبين الشكل 6.6. ما يقوم به الإجراء بـ L. يتابع العمود الأيمن في الجدول ترتيب إضافة الحواف في الإجراء.

السؤال 236: أضف هذا الإجراء لـ $L = (2, 6, 1, 2, 9, 1,6)$ وتأكد أنه سينتج عنه الشجرة في الشكل 6.5 ..

حتى تتأكد أن مجموعة الحواف التي يضيفها الإجراء ينتج عنها شجرة قم بالإضافة بشكل عكسي.

List L	List U	Edge added
(4, 4, 7, 1, 3, 4)	()	$a = \{4, 2\}$
(4, 7, 1, 3, 4)	(2)	$b = \{4, 5\}$
(7, 1, 3, 4)	(2, 5)	$c = \{7, 6\}$
(1, 3, 4)	(2, 5, 6)	$d = \{1, 7\}$
(3, 4)	(2, 5, 6, 7)	$e = \{3, 1\}$
(4)	(2, 5, 6, 7, 1)	$f = \{4, 3\}$
()	(2, 5, 6, 7, 1, 3)	$g = \{8, 4\}$



الشكل 6.6 : خطوات عكسية في إجراء بروفير.

السؤال 237: ارسم القمم $8 - 1$ ومن ثم أضف الحواف g, f, e, d, b, c, a واحداً تلو الآخر وبنفس الترتيب. لاحظ أن نمو المخطط لا يؤثر على كونه متصلاً. كرر العملية على السلسلة

$L = (2, 6, 1, 2, 9, 1,6)$ الموجودة في السؤال السابق.

كلما أضفنا أحد الحواف الموجودة في الجدول، من الأسفل إلى الأعلى تصبح قمة جديدة متصلة في كل خطوة، في الحقيقة هذه القمم هي نفسها قمم U النهائية بترتيب عكسي. عند إضافة حافة جديدة (غير القمة الموجودة في أسفل الجدول) على الشكل $\{l, \mathrm{u}\}$ حيث l هي القمة الملغاة من L الحالية، يجب أن تظهر القمة l على الأقل مرة واحدة في الحافة التي أسفل $\{l, \mathrm{u}\}$ في الجدول. ذلك لأن جميع القمم في l يتم إلغاؤها بشكل متتال من L، عندها تكون l قمة صغرى لا تظهر في أي من L أو U. قد لا تصبح موجودة في U وإن لم يحدث سوف تصبح جزءاً من آخر حافة في الجدول. هذا يثبت أنه عند إضافة جميع الحواف سوف نحصل على مخطط متصل، عدد القمم فيه n وعدد الحواف $n - 1$. والمبرهنة 2.46. تظهر أن الناتج شجرة.

يمكن ملاحظة أن الإجراء الذي قمنا به للتراجع عن سلسلة بروفير هو الدالة العكسية الصحيحة. ولتفسير ذلك، لتكن $f: \mathcal{T} \to \mathcal{L}$ هي دالة لإيجاد سلسلة بروفير لشجرة ما، حيث $\mathcal{T}$ هو مجموعة الأشجار المرمزة التي لها n من القمم ولتكن $\mathcal{L}$ هي المجموعة التي عدد قوائمها $(n - 2)$ والمأخوذة من $[n]$. عندها تكون الدالة

$g: \mathcal{L} \to \mathcal{T}$ التي تنشأ عنها شجرة من القائمة $(n-2)$ بالتأكيد تحقق $g\big(f\ (T)\big) = T$ لجميع الأشجار المرمزة T. هذا يُنشأ f كعلاقة واحد لواحد ويثبت نظرية كايلي.

تأثيرات جانبية

المبرهنة *2.66*. إذا كانت T هي شجرة وكانت L هي سلسلة بروفير من T، *عندها تظهر القمة* v عدداً من المرات $d\ (v) - 1$ تماماً في L .

الإثبات: افترض أن $T\ = (V, E)$ هي شجرة وأن L هي سلسلة بروفير لها. في عملية حساب L نقوم بتقليم T بشكل متكرر حتى لا يبقى فيها إلا قمتين والحافة التي بينهما. ولتكن هاتان القمتانj و i.

افترض أن $v \in V$. إذا كانت v ليست i ولا j، عندها تكون v قد أُلغيت في مرحلة ما في أثناء حساب L. وقبل إلغائها، قمنا بإلغاء جميع جيرانها عدا واحدة (ذلك لأن v يجب أن تكون ورقة حتى يمكن إلغاؤها) وبالتالي تم تسجيل v عدداً من المرات $d\ (v) - 1$ في L.

إذا كانت v إما i أو j عندها نكون قد ألغينا جميع جيرانها عدا واحدة (إما j أو i) لذلك مرة أخرى تظهر v عدداً من المرات $d\ (v) - 1$ في L.

تخبرنا فكرة بروفير أن الأشجار المرمزة والتي لها مجموعة من القمم $[n]$ ذات علاقة واحد لواحد مع القوائم $(n-2)$ والمأخوذة من $[n]$. تظهر المبرهنة السابقة أن

سلسلة بروفير تسجل كل قمة $d\ (v) - 1$ مرة. لذلك تكون الأشجار المرمزة ذات مجموعة القمم $[n]$ بعلاقة واحد لواحد مع القوائم $(n-2)$ والمأخوذة من $[n]$ بحيث تظهر كل $i \in [n]$ $d\ (i) - 1$ مرة تماماً. يقوم المعامل كثير الحدود بعدّ المجموعة الأخيرة. (راجع االتعريف في القمم14 .)

النتيجة 2. 76 . إذا كانت $2 \geq$, عندها يوجد

$$\binom{n-2}{d_1 - 1, d_2 - 1, \dots, d_n - 1}$$

من الأشجار المرمزة التي لها مجموعة من القمم $[n]$ بحيث تكون درجة القمة i هي d_i، لكل $i \in [n]$.

السؤال 238: في المعامل كثير الحدود، يجب أن يكون مجموع الأرقام السفلية مساوياً لمجموع الأرقام العلوية. هل هذا صحيح؟ قم بإجراء حساب سريع.

إثبات آخر لصيغة كايلي

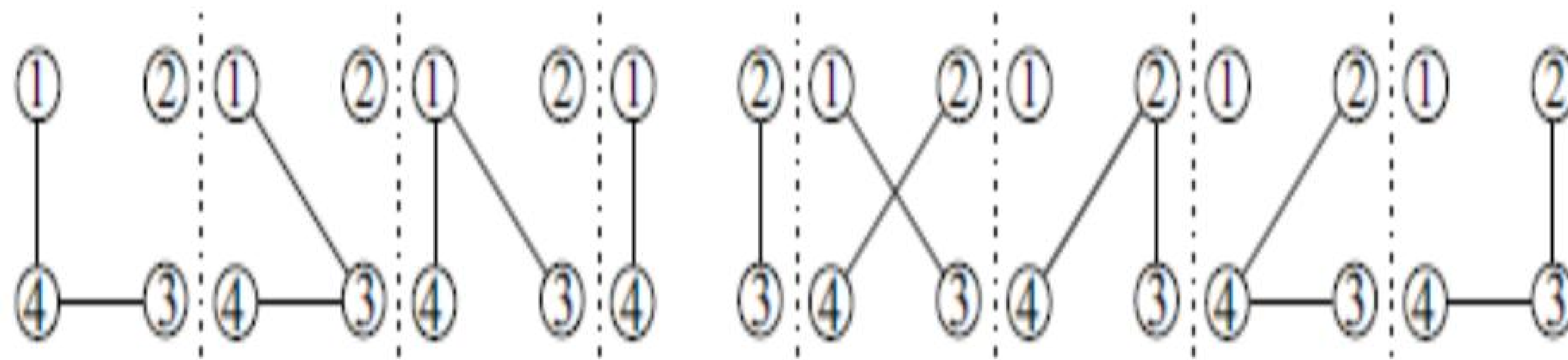
نقدم هنا إثباتاً بالمقارنة التكرارية لصيغة كايلي الذي وضعه العالمان رينه (Renyi) و ريوردان (Riordan) يبيّن تقنية مفيدة للحل: عند مواجهة سؤال صعب قم بحل سؤال أصعب. كانت طريقتهما هي عدّ الغابات لنوع معين ومن ثم تخصيص الحل للأشجار في النهاية[1].

(1) في الواقع "المسألة الأصعب" سوف تظهر فقط لأنه فرضت هيكلية إضافية. والهيكلية المضافة تجعل مسألة العد أسهل.

لتكن $T\ (n,k)$ عدد الغابات المرمزة بحيث

- تكون مجموعة القمم هي $[n]$,
- يوجد في الغابة عدد من الأشجار يساوي k,
- كل قمة في في $[k]$ موجودة في شجرة مختلفة.

على سبيل المثال، $T\ (4,2) = 8$ في الشكل التالي، يوضح السبب بأنه توجد غابة مرمزة بمجموعة القمم $[4]$ وتحتوي على شجرتين، حيث القمم فيه $[2] = \{1,2\}$ موجودة في أشجار مختلفة:

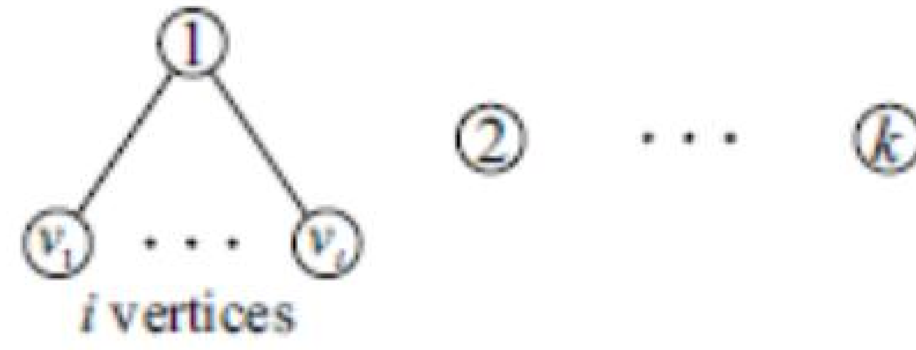


لاحظ أن $T\ (n,1)$ هي فقط عبارة عن عدد الأشجار المرمزة والتي لها عدد من قمم يساوي n.

في البداية دعنا نشتق المقارنة التكرارية الأصلية. كم عدد الغابات المرمزة لمجموعة من القمم $[n]$، وتحتوي عدد k من الأشجار، وكل قمة في $[k]$ موجودة في شجرة مختلفة؟ الجواب هو $T\ (n,k)$.

للحصول على إجابة أخرى سوف نجزىء المسألة وفقاً لدرجة القمة 1. يجب اختيار جيرانها من المجموعة $\{k+1, k+2, \dots, n\}$ لأن القمم $2,3 \dots, k$ ليست

في شجرة القمة 1 نفسها. إذا كان للقمة 1 عدد i من الجيران، حيث $0 \leq i \leq n -$ k، عندها يوجد عدد من الطرق يساوي $\binom{n-k}{i}$ لاختيارها عند هذه المرحلة تبدو غابتنا كما يلي:



وبالطبع، إذا كان للقمة 1 عدد من الجيران يساوي $i = 0$ عندها لا يوجد أي حافة. وفي كلتا الطريقتين لاختيار جيران القمة 1 يوجد عدد من الطرق يساوي $T\ (n-1, k-1+i)$ لإكمال الغابة المرمزة. ذلك لأنه إذا قمنا بتجاهل القمة 1 والحواف المرتبطة بها يجب أن يتكون باقي المخطط من غابة مرمزة لها عدد من القمم $n - 1$ بحيث تكون كل قمة $2, \dots, k$ و $v_1, \dots, v_i$ في أشجار مختلفة. يوجد عدد من القمم يحقق هذا ويساوي $k - 1 + i$. بإجراء الجمع على جميع قيم i نحصل على:

$$T(n,k) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} T(n-1, k-1+i) \quad 1 \leq k \leq n \text{ حيث} \quad (6.1)$$

حيث شروط الحدود هي $T\ (n, 0) = 0$ لجميع قيم $n \geq 1$، و $T\ (0, 0) = 1$.

الآن حيث إننا وضعنا عملية المقارنة التكرارية، تظهر بقية الإثبات أن الصيغة $T\ (n, k\ ) = kn^{n-k-1}$ صحيحة لجميع قيم k و n. سوف نقوم بوضع إثبات جيّد يمثل مثالاً جيداً لقضايا استقرائية أخرى أكثر تعقيداً.

المبرهنة 6.2.8: عدد الغابات المرمزة التي فيها مجموعة القمم هي $[n]$، وكل غابة فيها عدد الأشجار k وكل قمة في$[k]$ موجودة في شجرة مختلفة. بهذه الشروط عدد الغابات المرمزة يساوي $(n, k) = kn^{n-k-1}$. وفي هذه الحالة، عدد الأشجار المعلمة التي لها n من القمم يساوي $T(n, 1) = n^{n-2}$.

الإثبات: سوف نثبت بالاستقراء على n أن الصيغة $T(n, k) = kn^{n-k-1}$ صحيحة لجميع قيم k وتحقق الشرط $1 \le k \le n$. كحالة أولية افترض $n = 1$، يجب أن نثبت أن

$T(1, k) = k.1^{1-k-1}$ صحيحة لجميع قيم k وتحقق الشرط $1 \le k \le 1$.

قيمة k الوحيدة هي $k = 1$، وبما أن 1.1^{1-1-1} و $T(1,1) = 1$، عندها تكون الحالة الأساس صحيحة.

افترض الآن أن n عدد صحيح موجب $n \ge 1$، وأن العبارة صحيحة لجميع قيم n. ذلك يعني،

$T(n, k) = kn^{n-k-1}$ صحيحة لجميع قيم k وتحقق الشرط $1 \le i \le n$.

يجب أن نثبت أن$T(n + 1, k) = k(n + 1)^{n+1-k-1} = k(n + 1)^{n-k}$

لجميع قيم k وتحقق الشرط $1 \le k \le n + 1$

عن طريق المقارنة التكرارية (1.6) نحصل على

$$T(n+1,k)=\sum_{i=0}^{n+1-k}\binom{n+1-k}{i}T(n,k-1+i)$$

يمكن أن نطبق فرضية الاستقراء في المعادلة (26 .) على $T\,(n,k-1+i)$ طالما $1\le k-1+i\le n$. وهذا صحيح لجميع قيم k التي تحقق الشرط $2\le k\le n$، لذلك يجب أن نعنون الحالات $k=n+1$ و $k=1$ بشكل منفصل.

الحالة $k=n+1$ سهلة. لاحظ أن $T\,(n+1,n+1\,)=1$. وأيضاً، عندما تكون $k=n+1$ في الصيغة نحصل على:

$$(n+1)(n+1)^{n+1-(n+1)-1}=(n+1)(n+1)^{-1}=1$$

لذلك $T(n+1,k\,)=k(n+1)^{n+1-k-1}=k(n+1)^{n-k}$ عندما تكون قيمة $k=n+1$. وتركنا الحالة $k=1$ للسؤال 239 بعد الإثبات.

الحالة الأصعب عندما تحقق k الشرط $2\le k\le n$. باستخدام المعادلة (6.2) يمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned}T(n+1,k)&=\sum_{i=0}^{n+1-k}\binom{n+1-k}{i}T(n,k-1+i)\\&=\sum_{i=0}^{n+1-k}\binom{n+1-k}{i}(k-1+i)n^{n-(k-1+i)-1}\\&=\sum_{i=0}^{n+1-k}\binom{n+1-k}{i}(k-1+i)n^{n-k-i}\end{aligned}$$

وبتقسيم المجموع إلى جزئين:

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{n+1-k} \binom{n+1-k}{i} (k-1) n^{n-k-i}}_{\text{المجموع 1}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n+1-k} \binom{n+1-k}{i} \, i n^{n-k-i}}_{\text{المجموع 2}}$$

دعنا نعمل على المجموع (1) أولا. بإخراج $\frac{k-1}{n}$ ومن ثم استخدام المبرهنة ذات الحدين للحصول على:

$$\text{المجموع 1} \;=\; \frac{k-1}{n} \sum_{i=0}^{n+1-k} \binom{n+1-k}{i} n^{n+1-k-i}$$

$$= \frac{k-1}{n} (n+1)^{n+1-k}$$

سوف نعمل الآن على المجموع 2. أولاً نخرج العامل $n+1-k$ كتحضير لاستخدام الخاصية $\binom{m-1}{r-1} = \binom{m}{r}\frac{r}{m}$. وبعدها نعيد ترميز المجموع ونستخدم نظرية ذات الحدين:

$$\text{المجموع 2} \;=\; (n+1-k) \sum_{i=0}^{n+1-k} \binom{n+1-k}{i} \frac{i}{n+1-k} n^{n-k-i}$$

$$= (n+1-k) \sum_{i=0}^{n+1-k} \binom{n-k}{i-1} n^{n-k-i}$$

$$= (n+1-k) \sum_{j=0}^{n+1-k} \binom{n-k}{j} n^{n-k-j-1}$$

$$= \frac{(n+1-k)}{n} \sum_{j=0}^{n+1-k} \binom{n-k}{j} n^{n-k-j}$$

$$= \frac{(n+1-k)}{n} (n+1)^{n-k}$$

وبتجميع الحدود:

$T(n+1,k)$ = مجموع 1 + مجموع 2

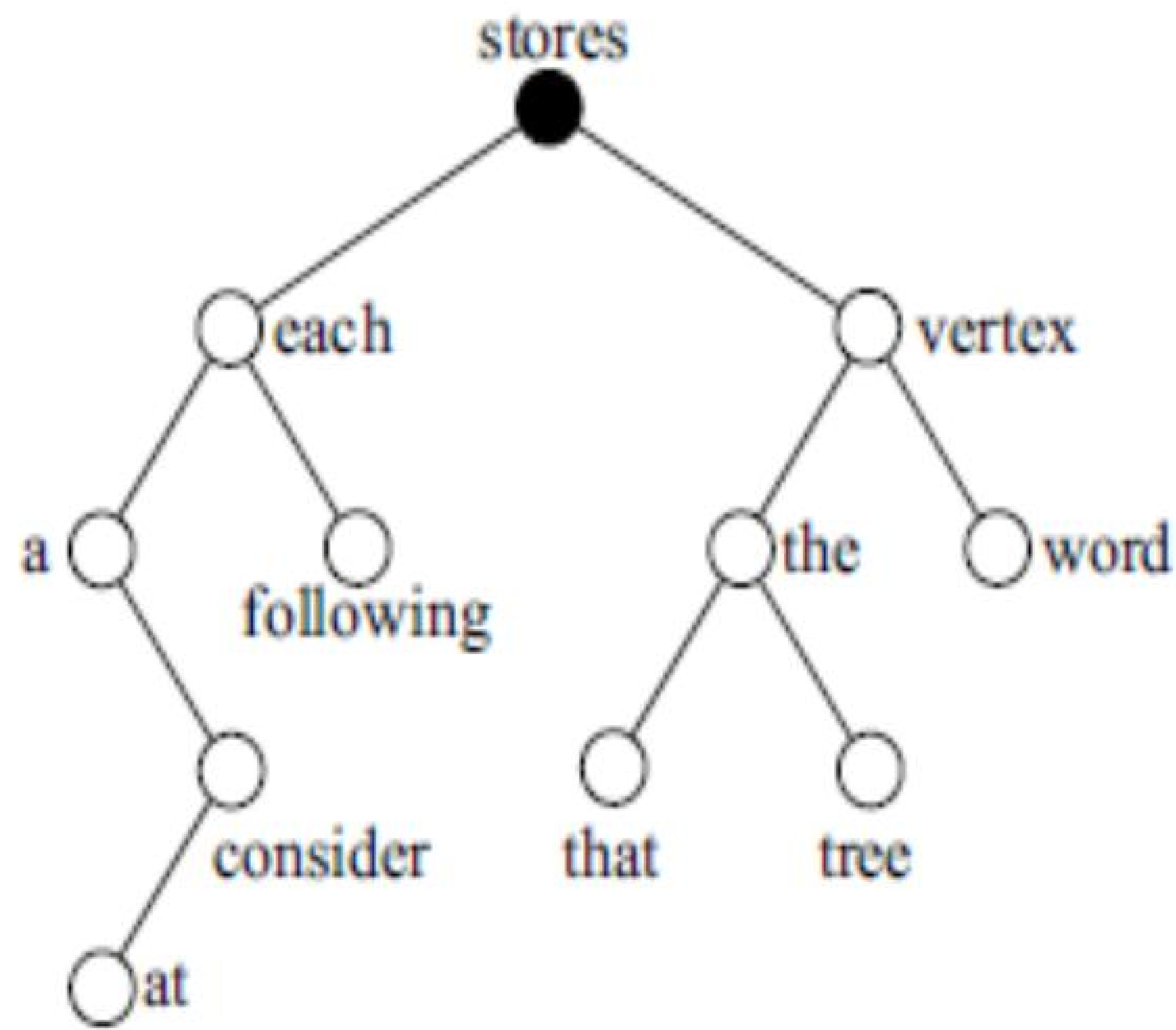
$$= \frac{k-1}{n}(n+1)^{n+1-k} + \frac{(n+1-k)}{n}(n+1)^{n-k}$$
$$= \frac{(n+1)^{n-k}}{n}\big((k-1)(n+1) + n + 1 - k\big)$$
$$= k(n+1)^{n-k}$$

هذا يكمل الإثبات.

السؤال 239: أثبت الجزء $k = 1$ في خطوات الإستقراء. أي استخدم فرضية الاستقراء لإثبات أن $T(n+1,1) = (n+1)^{n-1}$.

عدّ الأشجار الثنائية

سوف نهتم الآن بشجرة من نوع مختلف. افترض الشجرة التالية والتي تخزن كلمة في كل قمة.



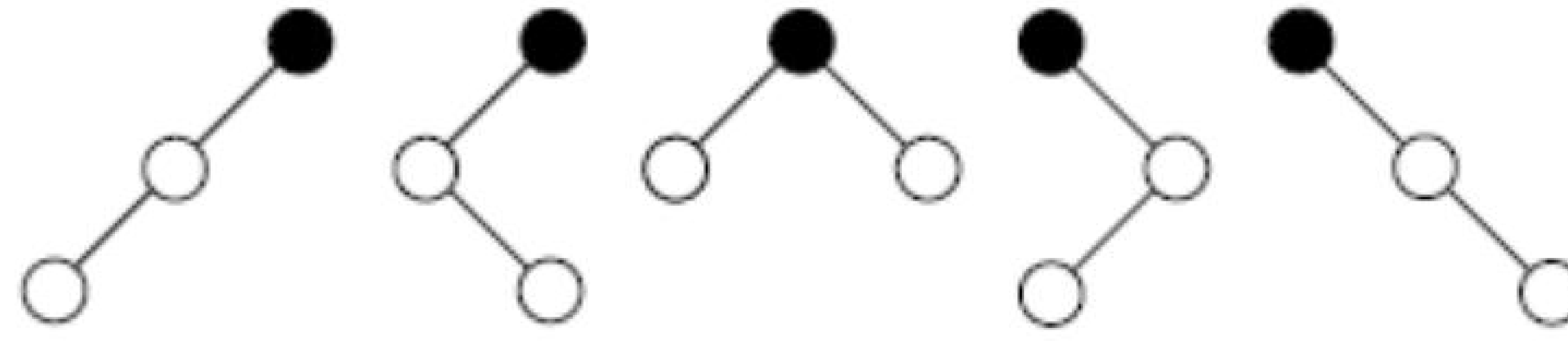
يتم تفسير هذه الشجرة بطريقة مختلفة عن الأشجار الأخرى. أي أن الطريقة التي تُرسم فيها على الورقة تختلف عن سابقاتها في التعبير. القمة السوداء في الأعلى تسمى جذر (Root). وتسمى كل قمة في الأسفل بـ ابن (Child) للجذر. القمة المرمزة بكلمة "Each" هي الابن الأيسر (Left Child) للجذر والقمة المرمزة بكلمة "Vertex" هي الابن الأيمن (Right Child) للجذر. والقمة المرمزة بـ"Consider" لها ابن أيسر وليس لها ابن أيمن. هذا مثال على شجرة ثنائية (Rooted Binary Tree) ذات جذر أو يمكن تسميتها شجرة ثنائية (Binary Tree) فقط.

لكل قمة في الشجرة الثنائية شجرة فرعية يسرى (Left Subtree) وشجرة فرعية يمنى (Subtree Right). الشجرة الفرعية اليسرى للقمة v هي شجرة ثنائية جذرها في الابن الأيسر للقمة v وتحتوي فقط على جزء من الشجرة الأصلية في v أو أسفلها. الشجرة الفرعية اليمنى تعرّف بنفس الطريقة. يمكن أن تكون الشجرة الفرعية فارغة، كما في الشجرة الفرعية اليمنى للقمة المرمزة بـ "Consider". وممكن أيضاً أن تحتوي على قمة واحدة فقط، كما في الشجرة الفرعية اليسرى للقمة المرمزة بـ "Consider".

في الحقيقة الشجرة الثنائية المبينة بالرسم في الأعلى يتم استخدامها كشجرة ثنائية للبحث. حيث تقوم بتخزين الكلمات التي عددها v والموجودة في الجملة في الشجرة وفقاً للقوانين التالية:

لكل قمة v، يتم تخزين الكلمة فيها بشكل مرتب: (1) هجائياً بعد كل كلمة في الشجرة الفرعية التي على يسار v، وأيضاً (2) هجائياً قبل كل كلمة في الشجرة الفرعية التي على يمين v. أشجار البحث الثنائية مهمة في هيكلة البيانات في علم الحاسوب. فهي تجعل من التخزين والترتيب والبحث عن البيانات أكثر فاعلية.

هدفنا هو أن نحدد عدد الأشجار الثنائية الممكنة لـ n من القمم. ولنفترض أن هذا العدد هو β_n، من الواضح أن $\beta_1 = 1$ وأيضاً $\beta_2 = 1$. الرسم التالي يبين الأشجار الثنائية لثلاث قمم.



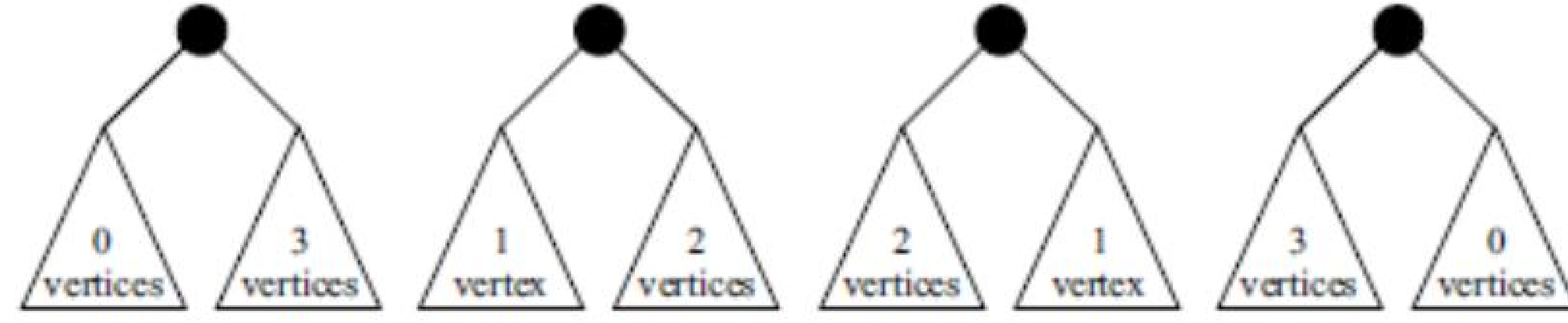
وبالتالي $\beta_3 = 5$. سوف يكون من المفيد أن نعرف $\beta_0 := 1$. حتى الآن لدينا جدول

n	0	1	2	3	4
β	1	1	2	5	؟

السؤال 240: حدد قيمة β_4 عن طريق كتابة جميع الأشجار الثنائية لأربع قمم.

الأشجار الثنائية بطبيعتها تكرارية: تكون الأشجار الفرعية اليمنى واليسرى للجذر أشجاراً ثنائية أيضاً. لذلك، من أجل تحديد β_n نقوم باشتقاق العلاقة

التكرارية، ومن ثم حلها باستخدام الدوال المولّدة. نبدأ برسم جذر في القمة. يوجد قرارين يجب أن نتخذهما: بكم طريقة يمكن أن نحدد الأشجار الفرعية اليمنى واليسرى للجذر؟ على سبيل المثال، حتى نحدد β_4 نضع أولاً الجذر ومن ثم نضع بعين الاعتبار الحالات الأربع التالية اعتماداً على عدد القمم الموجودة في الشجرة الفرعية اليسرى للجذر:



لاحظ أنه، إذا كان، على سبيل المثال، للشجرة الفرعية اليسرى صفر من القمم عندها تكون فارغة – لا يوجد حافة يسرى من الجذر. يتم توضيح ذلك عن طريق $\beta_0 = 1$، وذلك عن طريق حساب الحالات الأربع وجمع ناتجها نحصل على:

$$\begin{aligned} \beta_4 &= \beta_0\beta_3 + \beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_1 + \beta_3\beta_0 \\ &= (1)(5) + (1)(2) + (2)(1) + (5)(1) \\ &= 14 \end{aligned}$$

أي أنه يوجد 14 شجرة ثنائية لأربع من القمم.

السؤال 241: حدد β_5 باستخدام هذه الطريقة.

بشكل عام العلاقة التكرارية هي:

$$\beta_0 = 1$$

$$\beta_n = \sum_{i=0}^{n-1-} \beta_i\beta_{n-1-i} \quad for \quad n \geq 1$$

هذه علاقة تكرارية غير خطية، لكننا قمنا بحلها قبل ذلك. في القسم 4.1، قمنا بتحديد عدد الطرق لجعل شكل مضلع عدد أضلاعه n ذا ثلاثة أضلاع، حيث $n \geq 3$. عدد الطرق يساوي

$$T_n = \frac{1}{n-2}\binom{2n-4}{n-1}$$

التكرار وقيم البدايات لـ T_nولـ β_n نفسها، لكننا يجب أن نضبط العناصر. الضبط الصحيح هو

$\beta_n = T_n + 2$، لذلك نحصل على:

$$B_n = \frac{1}{(n+2)-2}\binom{2(n+2)-4}{(n+2)-1} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

وبالتالي نحصل على المبرهنة التالية:

المبرهنة 2.96.: **إذا** كانت $n \geq 1$، يكون عدد الأشجار الثنائية التي لها عدد من القمم n يساوي

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

العدد $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ هو العدد الكتالوني (Catalan) الشمهور من n بلد تظهر الأعداد الكتالونية في المسائل التوافقية كما يظهر عادة عدد فيبوناتشي.

سؤال 242: بناء على العمل الذي قمنا به في القسم 14. أثبت أن $B_n = T_{n+2}$ هي بالتأكيد الرابط الصحيح بين السلسلتين $\{T_k\}k \geq 3$ و$\{B_k\}k \geq 1$.

ملخص

الشجرة هي مخطط متصل غير دوري. بعد أن قمنا باشتقاق بعض الخصائص الأساسية للأشجار أخذنا بالاعتبار مسألتين صعبتين تتعلقان بعدّهما. في المسألة الأولى حددنا أن عدد الأشجار المرمزة لعدد من القمم n يساوي n^{n-2}، ويسمى هذا صيغة كايلي وفي المسألة الثانية حددنا أن عدد الأشجار الثنائية لعدد من القمم n يساوي الرقم الكتالوني بعدد n من البنود. قمنا باستخدام عدة تقنيات لذلك، منها الإثبات باستخدام علاقة واحد لواحد والعلاقات التكرارية والتسلسل في الدوال المولّدة.

تمارين

1) أثبت أن: عدد حواف الغابة التي لها n قمة وk مكون تساوي $n - k$. ثم بين كيف يمكن أن يعمم ذلك على المبرهنة 2.36..

2) قم بتطوير المبرهنة 6.12. عن طريق إثبات أن أي شجرة لها على الأقل Δ ورقة، حيث Δ هي أقصى درجة في المخطط.

3) أثبت المبرهنة 6.2.4.

4) لتكن G مخطط مرمز ولتكن e أي حافة. إن الشجرة الممتدة في G هي شجرة فرعية في G وتعتبر شجرة مستقلة تحتوي جميع القمم الموجودة في G. قم بتعريف $\tau(G)$ أنه عدد الأشجار الممتدة في G. أثبت الحالة التوافقية: $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G.e)$. (هنا $G.e$ وتُقرأ "G تقلص e"، هي المخطط (المتعدد) الذي حصلنا عليه من G عن طريق حذف الحافة e ومن ثم دمج نهايات e في قمه واحدة. انظر وصف هذه العملية في القسم 3.6).

5) استخدم التكرار في التمرين السابق لإيجاد الأشجار الممتدة للمخططات المرمزة التالية:

أ) C_5

ب) K_4

جـ) $K_n - e$ حيث e هي أي حافة في K_n

6) (جبر خطي) تعرف النتيجة التالية بمبرهنة المصفوفة الشجرية. لتكن G مخطط مرمز متصل له مصفوفة مجاورة هي A. لتكن $M := D - A$ حيث D هو المصفوفة القطرية التي تظهر فيها درجات قمم G في القطر. عندها يكون عدد

الأشجار الممتدة في G يساوي العامل المساعد لأي عنصر في M. استخدم ذلك لإيجاد عدد الأشجار الممتدة لـ C_5, K_4, K_5 و $K_{3,3}$.

7) أثبت أن $T(n, n-1) = n-1$ و $T(n, n-2) = (n-2)n$ عن طريق عدّ الأشجار ذات العلاقة ومن دون استخدام الصيغة $T(n,k)$.

(العامل المساعد للعنصر في الموقع (i,j) من M هو عدد من المرات تساوي $(-1)^{i+j}$ مضروباً في محدد المصفوفة التي حصلنا عليها عن طريق حذف الصفوف والأعمدة التي يظهر فيها العنصر من المصفوفة M).

8) إليك طريقة أخرى لإثبات صيغة كايلي. افترض أن $L(n,k)$. تعبر عن عدد الأشجار المرمزة التي لها مجموعة من القمم $[n]$ بحيث تكون القمة n تساوي k.

أ) استخدم خصائص المعاملات متعددة الحدود (انظر القسم 4.1 والنتيجة 6.2.7 في هذا القسم لإثبات أن $L(n,k) = \binom{n-2}{k-n}(n-1)^{n-k-1}$

ب) اشتق صيغة كايلي عن طريق جمع $L(n,k)$ لقيم مناسبة من k.

9) لتكن τ_n تساوي عدد الأشجار الثلاثية التي لها عدد من القمم n، لكل $n \geq 0$ الشجرة الثلاثية مشابهة للشجرة الثنائية لكن كل قمة فيها يمكن أن يكون لها ابن أيمن وابن أوسط وابن أيسر. اجعل $\tau_0 := 1$.

أ) أثبت أن $\tau_1 = 1$، $\tau_2 = 3$، و$\tau_3 = 12$ عن طريق رسم أشجار الممكنة.

ب) جد قيمة τ_4 باستخدام العلاقة التكرارية ثم اشتق العلاقة التكرارية τ_n.

ج) لتكن $T(x)$. دالة تكرارياً طبيعياً على $\{\tau_n\}n \geq 0$.أثبت أن

$T\,(x) = x(T(x))^3 + 1$. اكتب تعليقاً حول احتمالية إيجاد صيغة لـ τ_n مثل تلك التي في المبرهنة 6.2.9.

ملاحظات سريعة

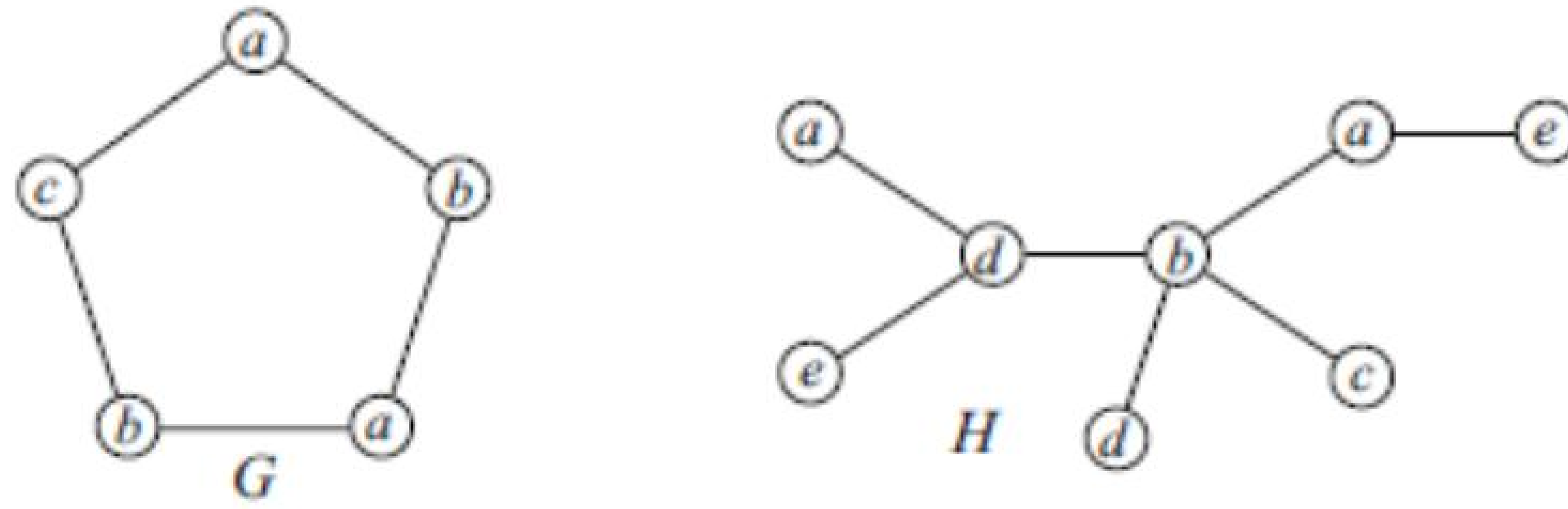
عرّف كايلي (1821-1895) بشكل أفضل عن طريق عمله في الجبر. تمت مناقشة الكثير من الإثباتات المعروفة لـ كايلي في Moon (1967)، ولكن الكثير من الإثباتات تم اكتشافها بعد ذلك.

يعتبر التكرار نظرية أساسية في علم الحاسوب لذلك من الطبيعي أن البناء التكراري لمثل الأشجار الثنائية يمكن أن يحسب باستخدام العلاقات التكرارية. ولّد مجال البيانات البنائية (DATA Structures) – وبالذات دراسة التعامل مع تخزين وتوزيع البيانات في الحاسوب – عدة مسائل توافقية على المخططات. أفضل المراجع في مواضيع الخوارزميات وهيكلة البيانات هو كتاب للمؤلفين ليسرسون، وكورمن ريفست ((Leiserson, Cormen and Rivest (1990).

3.6 التلوين وكثير الحدود متدرج الألوان

سوف نهتم الآن في مسألة تلوين القمم في المخطط والتي، على الأقل في البداية كما يبدو، ليس لها علاقة بالعدّ. إذا أعطينا مخططاً، يكون هدف التلوين هو تحديد أقل عدد من الألوان بحيث يكون لون كل قمة في المخطط مختلفاً عن لون القمة المجاورة لها.

يظهر الشكل 6.7 مخططين غير مرمزين وملونين. الألوان هي a, b, c في المخطط G الذي على اليسار والمخطط H الذي على اليمين ألوانه هي a, b, c, d, e. في المخطط G لا يمكن استخدام عدد أقل من الألوان، لو أننا استخدمنا لونين فقط سوف نجبَر على تلوين قمتين متجاورتين بنفس اللون.



الشكل 6.7: التلوين المناسب لبعض المخططات.

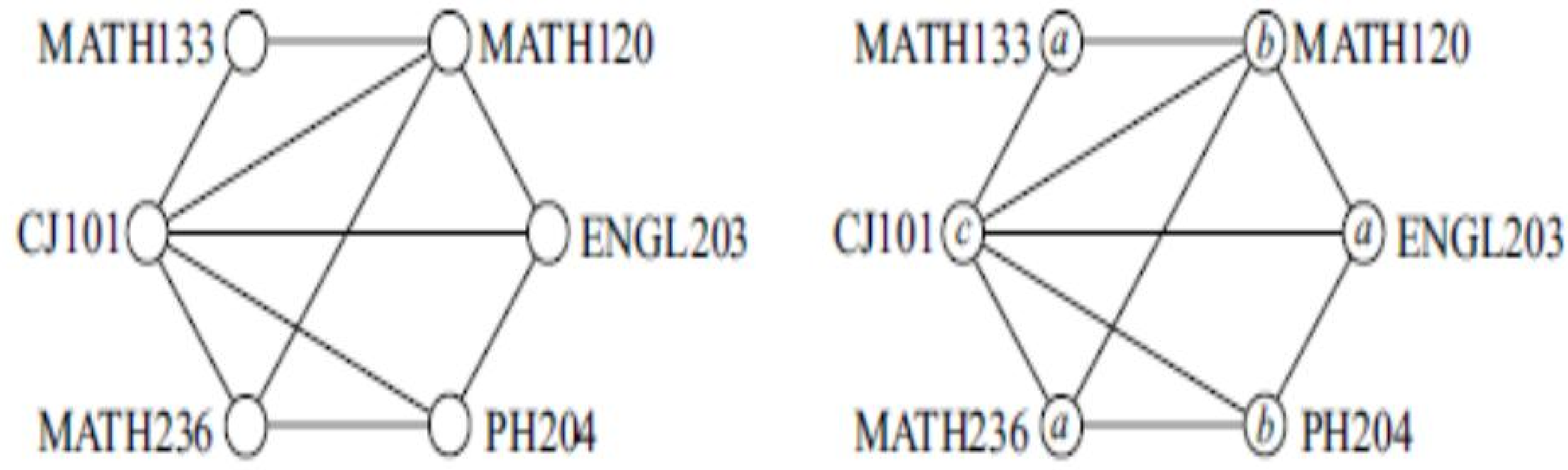
السؤال 243: هل يمكن تلوين المخطط H بعدد أقل من الألوان؟ جد أقل عدد ممكن من الألوان وبيّن كيف يمكن تلوين المخطط بها.

تطبيقات على التلوين

قد يبدو التلوين سخيفاً، لكن له الكثير من التطبيقات، وهذان اثنان منها.

الجدولة الزمنية

يجب أن تجدول الجامعة الاختبارات النهائية زمنياً بحيث لا يكون لأي طالب اختباران معاً. في الجهة اليسرى من الشكل في الأسفل يوجد مخطط يمثل جزءاً صغيراً من الجدولة. يحصل كل مقرر على قمة، ويتم وصل المقررين بحافة إذا كان هناك على الأقل طالب واحد يدرس كليهما. هذا مثال على ما يسمى أحياناً "مخطط التضارب" (Conflict Graph).



على الجهة اليمنى من الشكل يظهر تلوين القمم (المقررات) باستخدام ثلاثة ألوان a, b, c. لا يتم تلوين أي قمتين متجاورتين بنفس اللون. في مسألة جدولة الاختبارت تمثل الألوان وقت تقديم الاختبار. ذلك يعني أننا يمكن أن نجدول اختبارات، على سبيل المثال، المواد MATH133 وENGL203 وMATH236 خلال الفترة من 10:15 صباحاً حتى 12:15 مساءً. والمقرر PH204 خلال الفترة من 10:15 صباحاً حتى 12:15 مساءً والمقرر CJ101 خلال الفترة 1-3 مساءً وبذلك لا يكون هناك تضارب في اختبارات أي طالب زمنياً.

السؤال 244: هل من الممكن جدولة الاختبارات باستخدام فترتين زمنيتين فقط؟ فسر ذلك؟

من السهل حل مسألة كالتي في الأعلى، لكنها تصبح أكثر صعوبة عند وجود مئات من الألوان.

تلوين الخرائط

احصل على خريطة للولايات الـ 48 السفلية في الولايات المتحدة الأميركية وقم بتلوين كل ولاية بحيث لا تتشارك الولايات التي على حدود بعضها بنفس اللون (الولايات مثل أريزونا وكولورادو تلتقي بزاوية لكن لا تشترك في الحدود). كم من الألوان تحتاج؟ الجواب هو أربعة. بالإضافة لذلك نحتاج فقط، كحد أقصى، إلى أربعة ألوان لأي خريطة للدول، الولايات، القارات... إلخ، مهما كانت متداخلة. هذه المسألة، والتي تسمى مسألة الألوان الأربعة، تشكلت كمسألة رياضية في أواخر العام 1800. بعد عدة محاولات فاشلة للإثبات (واحدة منها كان الاعتقاد أنها صحيحة لمدة 10 سنوات) تم إثباتها أخيراً عام 1976 عن طريق أبل وهاكين (Appel & Haken) وعرفت باسم مبرهنة الألوان الأربعة (Four-Color Theorem).

التلوين، التلوين المناسب، عدد تدرجات الألوان

في البداية قمنا بتوضيح بعض المصطلحات حول التلوين. بكل بساطة التلوين هو تحديد لون كل قمة في المخطط، أي لون واحد لكل قمة. في عملية التلوين ليست

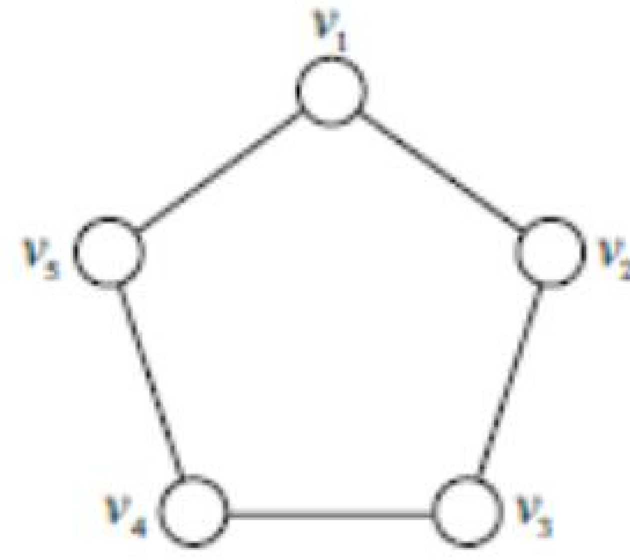
هناك ضرورة أن تكون ألوان القمم المتجاورة مختلفة. التلوين الذي يستخدم عدداً من الألوان k يسمى التلوين على k.

التلوين المناسب هو تلوين بحيث يكون لكل قمتين متجاورتين لون مختلف. أي أن في التلوين المناسب لا يكون هناك أي حافة لنهايتيها نفس اللون. تلوين k المناسب هو تلوين مناسب يستخدم عدد k من الألوان المختلفة. إذا كان هناك مخطط له تلوين k عندها نقول إن المخطط قابل للتلوين على k. يجب ملاحظة الفرق بين التلوين k وقابلية التلوين على k. فقابلية التلوين على K تعني تلويناً مناسباً أما التلوين K فليس بالضرورة أن يكون مناسباً.

إن الحالتين من التلوين الظاهرتين بالشكل 6.7 هما تلوين مناسب. تم تلوين G تلويناً مناسباً باستخدام تلوين 3 أما H فتلوين 5. بكلمات أخرى يظهر التلوين أن G هو قابل للتلوين على 3 وH قابل للتلوين على 5. سوف نهتم في هذا القسم بأقل قيمة لـ k بحيث يكون المخطط قابلاً للتلوين على k.

التعريف 6.3.1: لأي مخطط G يكون عدد الألوان المتدرجة لـ G، ويرمز له بالرمز $\chi(G)$, هو أقل عدد صحيح موجب k بحيث يكون G قابلاً للتلوين على k. أي أن $\chi(G)$ هو أصغر عدد صحيح موجب k من الألوان بحيث يكون ممكناً تلوين قمم G بها بطريقة لا تكون نهايتي أي حافة بنفس اللون.

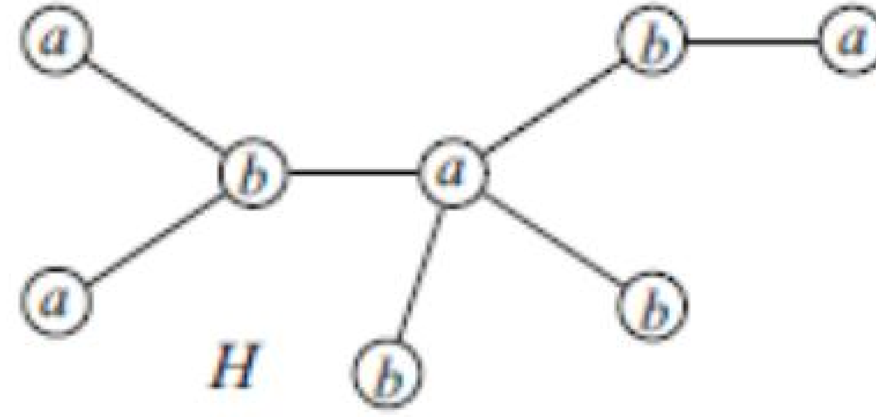
يجب أن يتضمن أي إثبات لـ $\chi\ (G) = k$ أمرين، (1) تلوين على k مناسب لـ G و(2) إثبات أن تلوين $(k-1)$ يكون غير مناسب لـ G. بيّنا سابقاً بشكل غير رسمي أن المخطط الدوري الخماسي له ثلاث درجات من الألوان، بعد أن ناقشنا المخطط G في الشكل 6.7. سوف نقدم هنا إثباتاً أن $\chi\ (C_5) = 3$. نلاحظ أن التلوين في الشكل 6.7 هو تلوين على 3 مناسب، لذلك C_5 هو قابل للتلوين على 3. بعد الآن نبحث عن تعارض بحيث يكون C_5 قابلاً للتلوين على 2. عندها يجب أن يكون هناك تلوين على 2 مناسب لـ C_5. يظهر الشكل في الأسفل الترميز للقمم.



افترض أنه تم تلوين v_1 باللون الأزرق. عندها يجب أن نلون v_2 بالأحمر، ونلون v_3 بالأزرق، ونلون v_4 بالأحمر، وأخيراً نلوّن v_5 بالأزرق. ينتج عن ذلك وجود القمتين المتجاورتين v_5و v_1 باللون الأزرق وهذا تعارض. هذا يثبت أنه لا يوجد تلوين على 2 مناسب لـ C_5 وبالتالي $\chi\ (C_5) = 3$.

السؤال 245: جد عدد درجات الألوان للمخطط غير المتصل الذي يحتوي على خمس دورات والمخطط الذي يحتوي على أربع دورات. بشكل عام، إذا كان G غير متصل، عندها ما العلاقة بين $\chi(G)$ وعدد درجات ألوان مكوناته؟

الآن سوف نثبت أن لـ $\chi\ (H) = 2$، حيث H الشجرة في الشكل 6.7، بنفس الطريقة. الرسم التالي يبين التلوين الثنائي المناسب لـ H.



يظهر ذلك أن H هو قابل للتلوين على 2. هل H قابل للتلوين على 1؟ لا، لأن أي مخطط له على الأقل قمة واحدة لا يمكن أن يكون ملوناً على 1 بشكل مناسب. وبالتالي $\chi\ (H) = 2$.

الخصائص الأساسية لعدد درجات الألوان

قبل أن ندرس أمثلة أكثر تعقيداً سوف نقوم بعد خصائص $\chi(G)$.

الفرضية 6.3.2: تحقق عدد درجات الألوان الخصائص التالية. لتكن G أي مخطط.

1) $\chi\ (G) = 1$ إذا، وفقط إذا، كان لا يوجد لـ G أي حافة، وبالتالي $\chi\ (G) \geq 2$ إذا، وفقط إذا، لـ G على الأقل حافة واحدة.

2) $\chi\ (G) = 2$ إذا، وفقط إذا، كان لـ G على الأقل حافة واحدة وكان ثنائياً.

3) $\chi\ (k_n) = n$.

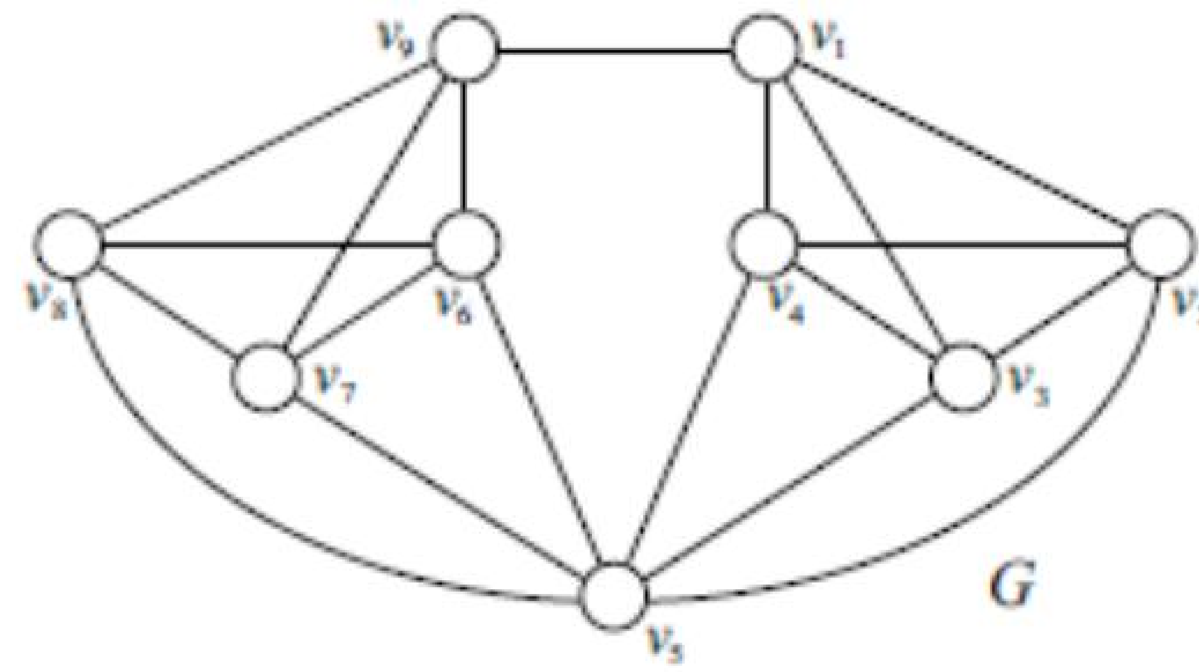
4) إذا كان$n \ge 3$ وعندها $\chi(C_n) = \begin{cases} 2 \; if \; n \; is \; even \\ 3 \; if \; n \; is \; odd \end{cases}$

5) إذا كان H مخططاً جزئياً من G, عندها $\chi(G) \ge \chi(H)$.

نتجت معظم هذه الخصائص بشكل مباشر من رقم درجات الألوان. الخاصية رقم (2) صحيحة لأننا نستطيع تلوين القمم التي في جهة معينة باللون الأحمر والجهة الأخرى باللون الأزرق. الخاصية (3) صحيحة لأن كل زوج من القمم تكون متجاورة في k_n، لذلك لا يمكن الحصول على قمتين بنفس اللون. أما بالنسبة إلى خاصية (4) تنتج عن كون n عدداً زوجياً في الخاصية (2). أما إذا كانت n فردية كنتيجة عن الصيغة التي تم إثباتها $\chi(C_5) = 3$ سابقاً. الخاصية (5) هي أكثر خاصية مفيدة في جميع الخصائص.

السؤال 246: أثبت الخاصية (5).

مثال آخر: جد عدد درجات الألوان للمخطط G والمبين في الشكل 6.8



الشكل 6.8: ما عدد درجات الألوان للمخطط؟

دعنا في البداية نلاحظ أن k_4 هو مخطط جزئي في G، لذلك ومن الخاصيتين (3) و(5) ينتج $\chi(G) \geq 4$. هل هذا المخطط قابل للتلوين على (4)؟

دعنا نفترض أنه يوجد قابلية للتلوين على (4) ودعنا نحاول أن نجدها.

• بما أن v_1, v_2, v_3, v_4 موجودة في المخطط الجزئي k_4، يجب أن يكون لها ألوان مختلفة. افترض أن ألوانها هي a, b, c, d على التوالي، من دون خسارة للتعميم.

• v_5 مجاورة لـ v_2, v_3, v_4، لذلك يجب تلوين v_5 باللون a.

• لا يمكن تلوين أي من v_6, v_7, v_8 باللون a لأنها مجاورة لـ v_5 التي هي ملونة باللون a. بالإضافة إلى ذلك، هذه القمم الثلاث هي نفسها، متجاورة، لذلك يجب أن يكون لكل واحدة منها لون مختلف، ذلك يعني أنه بين القمم v_6, v_7, v_8 سوف يتم استخدام الألوان الثلاثة b, c, d.

• لم يتبق لنا إلا v_9 حتى نلونها، لكن تم تلوين جيرانها بالألوان a, b, c, d. لا يوجد لون متبقٍ لـ v_9.

لذلك G غير قابل للتلوين على (4).

ذلك يعني، G قابلة للتلوين على (5) لأن الإثبات أظهر أنه إذا وجد لون خامس عندها يمكن تلوين v_9 به والحصول على تلوين على (5) مناسب لـ G. وبالتالي $\chi(G) = 5$.

كثير الحدود لتدرج الألوان

الطريقة التي استخدمناها لإيجاد عدد درجات الألوان لمخطط ما تصلح لحالات عرضية. هل يمكن إيجاد عدد درجات الألوان بطريقة أكثر منهجية؟

نعم ولا، نعم لأنه توجد طريقة مبرمجة في الحاسوب، ولا لأنه حتى الحاسوب سوف يحتاج وقتاً طويلاً في المخططات الكبيرة. هدفنا هو إيجاد حل للمسائل بشكل شامل، وليس فقط إيجاد عدد درجات اللون، وبالتحديد إيجاد عدد التلوين على k المناسب للمخطط. إذا كان لدينا مخطط G

سوف نعرّف:

$P\ (G, k\ )$ = عدد التلوين على k المناسب للمخطط G.

يسمى هذا كثير الحدود لتدرج الألوان (Chromatic Polynomial) للمخطط G. ليس من الواضح إطلاقاً أن هذا كثير الحدود، ربما يجب أن ندعوه "دالة تدرج الألوان". على كل حال، سوف نثبت لاحقاً أنه كثير الحدود. بما أن $P\ (G, k\ )$ تقوم بعد التلوين على k المناسب لـ G، يمكننا أن نستنتج أن $\chi\ (G)$ هي أقل قيمة لـ k بحيث $P\ (G, k) \neq 0$. ذلك لأنه إذا كانت G ليست قابلة للتلوين على k، عندها $P\ (G, k) = 0$.

السؤال 247: جد $\chi\ (G)$ للمخطط G الذي له $P\ (G, k\ )\ = (k-1)^7 - k + 1$

مثال: كثير الحدود لتدرج الألوان لـ P_5

افترض وجود P_5، المسار لخمس من القمم:



حتى نلون P_5 تلويناً مناسباً على k، يمكن أن نلون v_1 بأي لون من الألوان k. وبالتالي يوجد عدد من الطرق يساوي $k-1$ لتلوين v_2، وبما أن v_2 يمكن أن تأخذ أي لون باستثناء اللون الذي أخذته v_1. ومهما كانت احتمالات ألوان v_2 و v_1 يوجد عدد من الألوان يساوي $k-1$، لتلوين v_3، بما أنه يمكن تلوين v_3 بأي لون باستثناء اللون الذي أخذته v_2. بنفس الطريقة، يوجد عدد من الألوان يساوي $k-1$ لتلوين v_5و v_4. ووفقاً لمبدأ عدد الاحتمالات فإنه يوجد $k(k-1)^4$ تلوين مناسب على k للمسار P_5. وبالتالي،

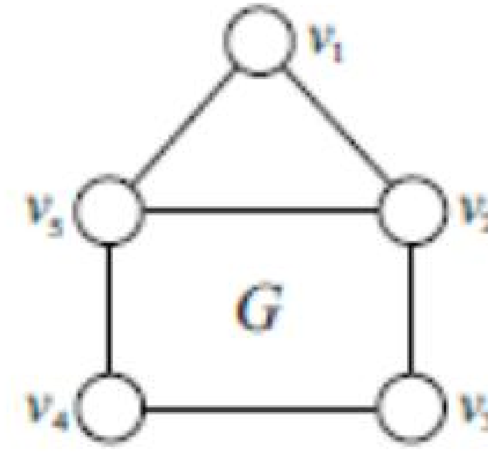
$P\ (P_5, k\ ) = k(k-1)^4$ أو $P\ (P_5, k\ ) = k^5 - 4k^4 + 6k^3 - 4k^2 + k$

يمكن استخدام كلتا الطريقتين لكتابة كثير الحدود لتدرّج الألوان (بالشكل الموسع أو على طريقة العوامل)، ولكل طريقة ميزاتها. توضح طريقة العوامل أن $\chi\ (P_5) = 2$ لأن $p(P_5, 1) = 0$ بينما $p(P_5, 2) > 0$. أما الشكل الموسّع يعرض معلومات معينة حول المخطط، سنناقشها لاحقاً في هذا الفصل.

السؤال 248: امتداداً للسؤال 245، جد كثير الحدود لتدرّج الألوان للمخطط غير المتصل $P_4 \cup P_5$. بشكل عام، إذا كانت G غير متصلة، عندها ما هي العلاقة بين $P\ (G, k\ )$ ومكونات كثير الحدود لتدرج الألوان.

مثال: كثير الحدود لتدرج الألوان لمخطط آخر

جد كثير الحدود لتدرج الألوان للمخطط G.



لاحظ أن القمم v_1, v_2, v_5 يجب أن تحصل على ألوان مختلفة لأنها تشكل المخطط الجزئي k_3. يوجد عدد من الطرق k لتلوينv_1، وبالتالي $k-1$ طريقة لتلوين v_2 وبالتالي $k-2$ طريقة لتلوين v_5. لتحديد عدد الطرق الممكنة لتلوين v_4 و v_3 نقسم التلوين المناسب إلى حالتين.

• **الحالة (1)**: v_5و v_3 لهما نفس اللون. لأن لون v_5 (وبالتالي v_3) تم تحديده مسبقاً، نحتاج إلى تحديد لون v_4. جيرانها v_5 و v_3 لهما نفس اللون، وبالتالي يوجد عدد من الطرق يساوي $k-1$ لتلوين v_4. وفي هذه الحالة يوجد عدد من التلوين على k المناسب لتلوين G يساوي $= k\ (k\ -1\ )\ (k\ -2\ )(k\ -1\ )$ $k\ (k\ -1\ )^2\ (k\ -2\ )$

• **الحالة (2)**: v_5 و v_3 لهما لونان مختلفان، عندها يوجد عدد من الطرق $k-2$ لتحديد لون v_3 لأنها يجب أن تأخذ لوناً مختلفاً عن v_5و v_2. يوجد عدد من الطرق $k-2$ لتحديد لون v_4، والنتيجة أن عدد التلوين على k المناسب في هذه الحالة يساوي

$$k\,(k-1)\,(k-2)(k-2)(k-2) = k\,(k-1)\,(k-2)^3$$

باستخدام مبدأ التجميع، كثير الحدود لتدرج الألوان يساوي:

$$P\,(G,k) = k(k-1)^2(k-2) + k(k-1)(k-2)^3.$$

وبالتالي $\chi\,(G) = 3$ لأن $P\,(G,2) = 0$ و $P\,(G,1) = 0$ بينما $P\,(G,3) = 18$.

السؤال 249: أعطِ الحالات الـ 18 كاملة للتلوين المناسب على 3 للمخطط G.

كثيرات الحدود لتدرج الألوان للمسارات وللمخططات الكاملة

من السهل إيجاد كثيرات الحدود ذات تدرج الألون للمسار P_n وللمخطط الكامل k_n لأن بنيتها تجعل من السهل إيجاد عدد التلوين المناسب على k. وكما هو متوقع، بناءً على اشتقاقنا لـ $P\,(P_5,k)$، كثير الحدود لتدرج الألوان لـ P_n هو $k(k-1)^{n-1}$.

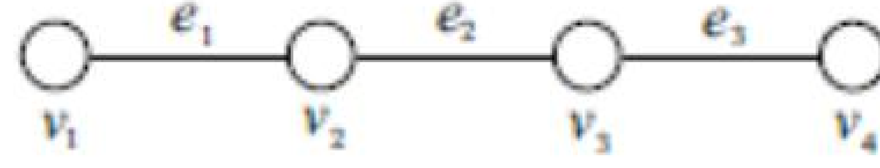
السؤال 250: جد $P\,(k_n,k)$.

التضمين – الحذف (Inclusion-Exclusion)

سوف نختبر الآن بعض الطرق لإيجاد كثير الحدود لتدرج الألوان، غير الطريقة المباشرة، عن طريق العدّ كما في المثالين السابقين. سوف نختبر أولاً التضمين – الحذف. من الطبيعي اختيار هذه الطريقة لأن إيجاد تلوين مناسب هو فعلياً مسألة تتعلق بالابتعاد عن إشكالية النمطية [التكرار]: نحتاج إلى تجنب وجود أي حافة نهايتها بنفس اللون.

مثال: كثير الحدود لتدرج الألوان عن طريق التضمين– الحذف

افترض P_4 بحيث تكون كل من قممها وحوافها مرمزة



من أجل استخدام طريقة التضمين – الحذف لعد التلوين المناسب على k لـ P_4، دعنا نعرّف المتغير العام $\mathcal{U}$ ليكوّن مجموعة قيم التلوين على k لـ P_4، يجب أن نلاحظ نقطة مهمة هنا، وهي أن ليس جميع هذه الاحتمالات للتلوين هي بالضرورة تلوين مناسب، لنقم بتعريف الخصائص التالية:

$\varepsilon_1 :=$ "للحافة e_1 نهايتان بنفس اللون"

$\varepsilon_2 :=$ "للحافة e_2 نهايتان بنفس اللون"

$\varepsilon_3 :=$ "للحافة e_3 نهايتان بنفس اللون"

عندها $P\,(P_4, k\,) = N = (\emptyset)$ تكون التلوين المناسب على k لـ P_4 لأن الأخير يساوي عدد التلوين على k بحيث لا تكون هناك حافة لها نهايتان بنفس اللون.

هذه هي قيم الدالة $N_{\geq}$:

$$N_{\geq}(\emptyset) = k^4 \qquad N_{\geq}(\varepsilon_1\varepsilon_2) = k^2$$
$$N_{\geq}(\varepsilon_1) = k^3 \qquad N_{\geq}(\varepsilon_1\varepsilon_3) = k^2$$
$$N_{\geq}(\varepsilon_2) = k^3 \qquad N_{\geq}(\varepsilon_2\varepsilon_3) = k^2$$
$$N_{\geq}(\varepsilon_3) = k^4 \qquad N_{\geq}(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3) = k$$

على سبيل المثال، $N_{\geq}(\emptyset) = k^4$ ، لأنه يمكن تلوين كل قمة من القمم الأربع بأي لون من الألوان الأربعة.

السؤال 251: برر القيم الأخرى.

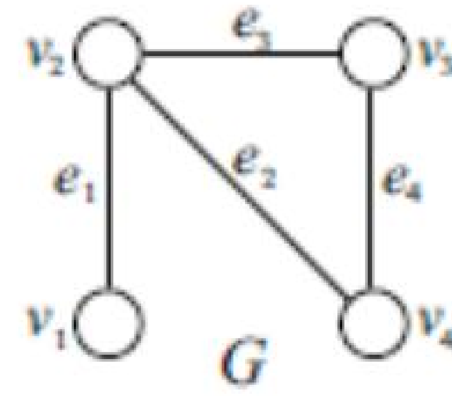
عن طريق صيغة التضمين والحذف:

$$p(P_4, k) = k^4 - (k^3 + k^3 + k^3) + (k^2 + k^2 + k^2) - k$$
$$= k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k$$

يمكن كتابة ذلك بصورة أخرى $p(P_4, k) = k(k-1)^3$

مثال: متعدد الحدود مقابل تدرج ألوان آخر عن طريق التضمين والحذف

في البداية افترض المخطط في الرسم التالي.



قم بتعريف $\mathcal{U}$ لتكون مجموعة التلوين على k (ليس بالضرورة المناسب) للمخطط G، قم بتعريف الخصائص:

$$N_{\geq}(\emptyset) = k^4 \qquad N_{\geq}(\varepsilon_1\varepsilon_2) = k^2 \qquad N_{\geq}(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3) = k$$
$$N_{\geq}(\varepsilon_1) = k^3 \qquad N_{\geq}(\varepsilon_1\varepsilon_3) = k^2 \qquad N_{\geq}(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4) = k$$

$$N_{\geq}(\varepsilon_2) = k^3 \quad N_{\geq}(\varepsilon_1\varepsilon_4) = k^2 \quad N_{\geq}(\varepsilon_1\varepsilon_3\varepsilon_4) = k$$
$$N_{\geq}(\varepsilon_3) = k^3 \quad N_{\geq}(\varepsilon_2\varepsilon_3) = k^2 \quad N_{\geq}(\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4) = k^2$$
$$N_{\geq}(\varepsilon_4) = k^3 \quad N_{\geq}(\varepsilon_2\varepsilon_4) = k^2 \quad N_{\geq}(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4) = k$$
$$N_{\geq}(\varepsilon_3\varepsilon_4) = k^2$$

لاحظ أن $N_{\geq}(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3) = k$ ولأنه إذا كان لجميع e_1, e_2, e_3 نفس لون النهايات، عندها يجب تلوين جميع القمم في G بنفس اللون. بينما $N_{\geq}(\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4) = k^2$ لأنه إذا كان لجميع e_2, e_3, e_4 نفس لون النهايات، عندها يجب تلوين القمم v_2, v_3, v_4 في G بنفس اللون. يوجد عدد من الطرق k لتحديد لون v_1.

وعلى كل حال، عن طريق صيغة التضمين والحذف يكون كثير الحدود لتدرج الألوان للمخطط G هو:

$$p(G,k) = k^4 - 4k^2 + 6k^2 - 3k - k^2 + k = k^4 - 4k^2 + 5k^2 - 2k$$

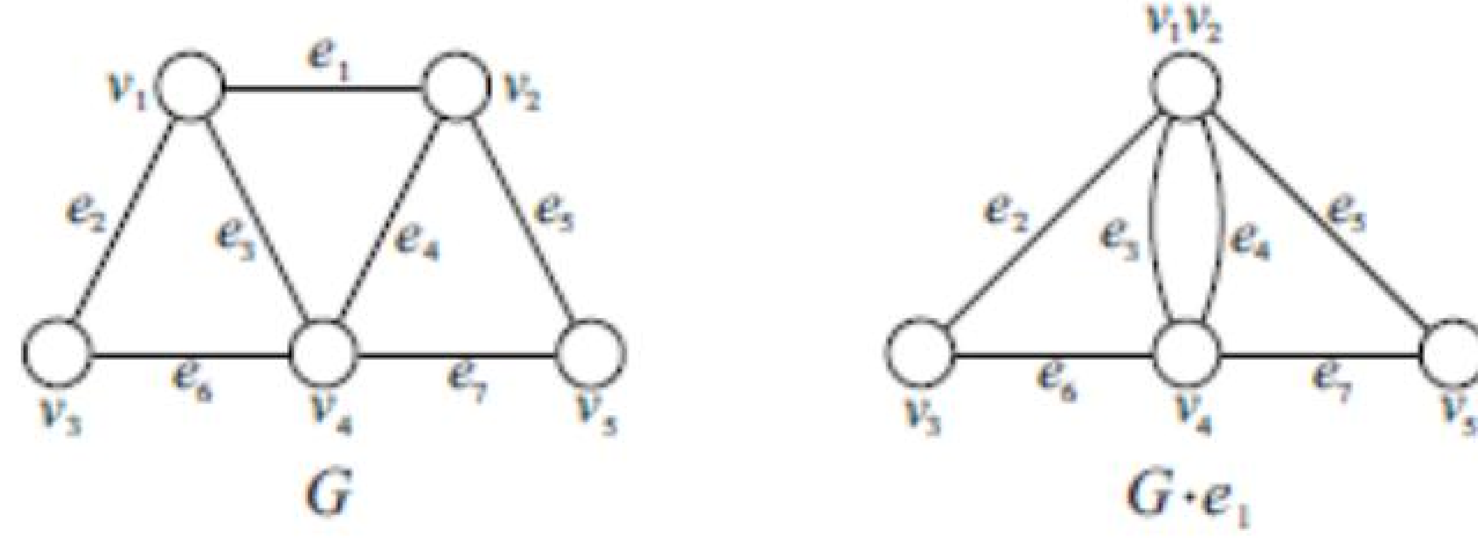
السؤال 252: جد $p(C_4, k)$ باستخدام هذه الطريقة.

التكرار في كثير الحدود لتدرج الألوان

الحل بطريقة التضمين – الحذف يتطلب خاصية واحدة وكل حافة وبالتالي إيجاد قيم $2^{e(G)}$ للدالة $N_{\geq}$. وبالرغم أنه من السهل حساب $N_{\geq}$، ولكن لا يمكن إيجاد ذلك لمخطط الذي له 50 قمة، حتى باستخدام الحاسوب، لأن قيمته تساوي $2^{50} \approx 1.1 \times 10^{15}$. طريقتنا التالية هي التكرار.

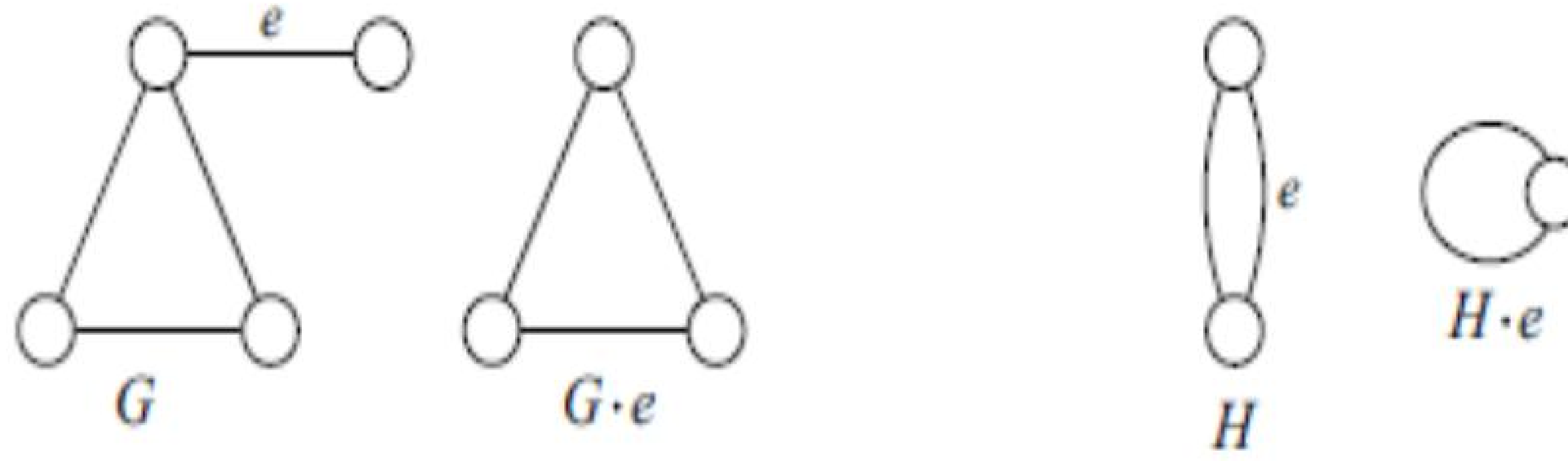
تقليص حافة

عملية المخطط الذي نريد أن نشتق له علاقة التكرار هي حذف حافة منه. انظر إلى الصورة:



المخطط الأصلي G موجود على اليسار والمخطط $G.e_1$، الذي يُقرأ " G محذوف منها e_1"، موجود على اليمين. من أجل إنشاء المخطط $G.e_1$، نقوم بإلغاء e_1 ومن ثم دمج نهايتي e_1 في قمة واحدة، وهذا سيؤثر على كل حواف متعلقة بنهايتيه. لاحظ أن $G.e_1$ ليس مخططاً بسيطاً بسبب وجود الحواف المتعددة.

الرسم التالي يبين مثالاً آخر لمخططات غير مرمزة.



لاحظ أنه عند إلغاء حافة من مجموعة حواف ينتج عنه حلقة.

السؤال 253: إذا كانت e حافة في C_9، ما هو $C_9.e$؟ وما هو $k_6.e$ ؟

التكرار

التكرار الكثير الحدود لتدرج الألوان يتضمن تدرج الحدود لتدرج الألوان للمخطط الأصلي ولجميع المخططات التي نتجت عن إلغاء أي حافة.

المبرهنة 6.3.3: إذا كان G مخطط وكان e أي حافة في G، عندها:

$$p(G,k\ ) = P(G - e,k\ ) - p(G.e,k)$$

الإثبات: افترض أن G هو مخطط و e هو حافة في G. سوف نثبت ما يكافئه بدلاً منه وهو:

$$p(G - e,k\ ) = P(G\ ,k\ ) + p(G.e,k).$$

لتكن u وv هي نهايتي الحافة e في G. كم عدد التلوين المناسب على k لـ $G - e$؟

الجواب 1: لها عدد من التلوين المناسب على k يساوي $p(G - e,k\ )$.

الجواب 2: قم بتجزئة التلوين المناسب على k لـ $G - e$ إلى نوعين: الأول حيث تأخذ u وv لونين مختلفين والثاني حيث تأخذ v و u نفس اللون.

إذا أخذنا تلويناً مناسباً على k لـ G وقمنا بحذف الحافة e، سوف ينتج عن ذلك تلويناً على k مناسباً لـ $G - e$ بحيث تأخذ كل من u وv لوناً مختلفاً (بما أن $u \sim e$ في G ذلك يتطلب أن تأخذ u لوناً مختلفاً عن v). وبالتالي يكون التلوين في هذه الحالة علاقة واحد لواحد بالنسبة إلى التلوين على k المناسب لـ G بحيث يكون هناك $p(G,k\ )$.

في أي تلوين مناسب على k لـ $G-e$ حيث تأخذ v و u نفس اللون، يكون هذا التلوين على k مناسباً لـ $G.e$، والعكس صحيح. وبالتالي يكون التلوين في هذه الحالة علاقة واحد لواحد بالنسبة إلى التلوين على k المناسب لـ $G.e$، بحيث يكون هناك $p(G.e,k)$.

ذلك يعني أنه يوجد $p(G,k)+P(G.e,k)$ تلويناً مناسباً على k لـ $G-e$.

■

عند استخدام التكرار لحساب كثير الحدود لتدرج الألوان، إذا قمنا في أي لحظة بإنشاء مخطط يوجد به عملية تقليص بحيث تكون هناك حوافّ متعددة بين زوج من القمم، عندها يمكن أن نقوم بإلغاء جميع القمم عدا واحدة بشكل آمن.

السؤال 254: فسر لماذا إذا قمنا بإلغاء عدة حواف في كل مرحلة، عندها لن تنتج عن عملية التقليص أبداً. ولكن إذا لم نقم بإلغاء حواف عدة وظهرت حلقة في مرحلة ما من التكرار، عندها نجعل $p(G,k)=0$. وذلك لأن القمة الموجودة في التكرار مجاورة لنفسها وبالتالي لا يمكن تلوين المخطط بشكل مناسب بأي عدد من الألوان.

مثال: كثير الحدود لتدرج الألوان لـ C_4.

للحصول على كثير الحدود لتدرج الألوان لـ C_4، نقوم باختيار أي حافة ومن ثم نجد

$$p(C_4,k)=P(C_4-e,k)-p(C_4.e,k).$$

لاحظ أنه $C_4 - e = P_4$ هو المسار لأربع قمم، و$C_4 . e = C_3$. نلاحظ أن $p(C_3, k) = k(k-1)\ (k-2)$ وبالتالي:

$$\begin{aligned} p(C_4, k) &= p(P_4, k) - p(C_3, k) \\ &= k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) \end{aligned}$$

السؤال 255: جد $p(C_5, k)$ و $p(C_6, k)$ باستخدام هذه الطريقة.

مثال: كثير الحدود لتدرج الألوان لـ C_n

يمكن تكرار نفس النمط في السؤال السابق والاستمرار به للحصول على $p(C_n, k)$، ولكن سوف نجد اشتقاقاً آخر باستخدام المبرهنة 6.3.3 والاستقراء.

سوف نبدأ كما يلي:

$$p(C_n, k) = (k-1)^n + (-1)^n (k-1) \quad for\ n \geq 3$$

افترض الحالة الأساس $n = 3$. نعرف أن $p(C_3, k) = k(k-1)(k-2)$.

الحد الأيمن يساوي:

$$\begin{aligned} (k-1)^3 + (-1)^3 (k-1) &= k^3 - 3k^2 + 3k - 1 - k + 1 \\ &= k^3 - 3k^2 + 3k + 2k \\ &= k(k-1)(k-2) \end{aligned}$$

أي أن الحالة صحيحة عندما $n = 3$.

دعنا نفترض الآن أن $n \geq 4$ وأن هذه المطابقة صحيحة عندما C_{n-1}.

باستخدام المبرهنة 6.3.3 يمكن كتابة

$$p(C_n, k) = p(C_n - e, k) - p(C_n . e, k)$$

وبما أن $C_n.e = C_{n-1}$ و$C_n - e = P_n$، يمكن استخدام كثير الحدود لتدرج الألوان لـ P_n والفرضية الاستقرائية لكتابة:

$$\begin{aligned} p(C_n, k) &= k(k-1)^{n-1} - \left((k-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(k-1)\right) \\ &= k(k-1)^{n-1} - k(k-1)^{n-1} + (-1)^n (k-1) \\ &= k(k-1)^n + (-1)^n (k-1) \end{aligned}$$

أي أن المطابقة صحيحة لكل C_n

المبرهنة 6.3.4: **إذا** كانت $n \geq 3$، فإن $p(C_n, k) = (k-1)^n + (-1)^n (k-1)$

خصائص كثير الحدود لتدرج الألوان

التكرار الذي قمنا باشتقاقه، وبالرغم من أنه يصعب استخدامه للمخططات العشوائية، جيد في إيجاد كثير الحدود لتدرج الألوان للمخططات ذات الهيكلة المنظمة. ومن الجيد أيضاً إثبات الخصائص العامة لكثير الحدود لتدرج الألوان باستخدام الاستقراء الرياضي.

المبرهنة 6.3.5: **إذا** كان G مخطط، عندها يحقق الدالة $p(G, k)$ الخصائص التالية:

$CP1$: $p(G, k)$ هو متعدد حدود درجته $n(G)$ حيث قيمة معامل الحد ذي الدرجة الأكبر فيه 1 ومعامل الثابت 0.

$CP2$: معامل k^{n-1} في $p(G, k)$ يساوي $-e(G)$.

$CP3$: معاملات $p(G,k)$ بحيث تكون قيمتها إما موجبة أو صفراً ولا تكون سالبة.

$CP4$: إذا كانت $e(G) \geq 1$، عندها يكون مجموع معاملات $p(G,k)$ يساوي صفر.

الإثبات: افترض المخطط G، سوف نثبت أولاً الخصائص من $CP1$ إلى $CP3$ عن طريق الاستقراء على $e(G)$. عدد الحواف للمخطط G:

الحالة الأساس هي عندما $e(G) = 0$، للمخطط صفر من الحواف ويحتوي $n(G)$ قمة معزولة. وبالتالي يكون كثير الحدود لتدرج الألوان في هذه الحالة $p(G,k) = k^{n(G)}$. الخصائص من $CP1$ إلى $CP3$ صحيحة في هذه الحالة.

دعنا نفترض الآن أن للمخطط G عدداً من القمم $e(G)$ حيث $e(G) \geq 1$ ونفترض أن الخصائص $CP1$ إلى $CP3$ صحيحة لأي مخطط عدد حوافه $e(G) - 1$. لتكن e أي حافة للمخطط G. باستخدام المبرهنة 6.3.3:

$$p(G,k) = p(G-e,k) - p(G.e,k)$$

بما أن كلاً من G و $G-e$ هما مخططان لهما عدد من الحواف $e(G) - 1$ سوف نطبق فرضية الاستقراء لكثير الحدود لتدرج الألوان الخاص بهما. لتكن $n{:}\,n(G)$ بحيث $n(G-e) = n$ وبحيث $n(G.e) = n-1$. يمكن كتابة كثير الحدود لتدرج الألوان كما يلي:

$$p(G-e,k)=k^n-(e(G)-1)k^{n-1}+\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^{n-i}\,a_ik^i$$

حيث $a_i \geq 0$ لجميع قيم $i \in [n-2]$، وأيضاً

$$p(G.e,k)=k^{n-1}-(e(G)-1)k^{n-2}+\sum_{i=1}^{n-3}(-1)^{n-1-j}\,b_jk^j$$

حيث $b_j \geq 0$ لجميع قيم $j \in [n-3]$. عندها:

$$\begin{aligned}p(G,k)&=p(G-e,k)-p(G.e,k)\\&=k^n-e(G)k^{n-1}+(a_{n-2}+e(G)-1)k^{n-2}\\&+\sum_{i=1}^{n-3}(-1)^{n-i}\,(a_i+b_i)k^i\end{aligned}$$

هذا متعدد حدود، درجته $n=n(G)$، ومعامل أعلى درجة فيه يساوي 1، ومعامل الثابت فيه يساوي 0 إن معامل الحد k^{n-1} هو $-e(G)$. كذلك، إن معاملاته تتذبذب ما بين الموجب والسالب. ومعامل الحد k^n يساوي 1 ومعامل الحد k^{n-1} يساوي$-e(G) \leq 0$. ومعامل الحد k^{n-2} يساوي

$a_{n-2}+e(G)-1$، وهذا حد موجب لأن $-e(G) \geq 0$ و $a_{n-2} \geq 0$.

معاملات باقي الحدود على الشكل $(-1)^{n-i}\,(a_i+b_i)$، وبملاحظة أن $a_i+b_i \geq 0$ ووجود المعامل $(-1)^{n-i}$ يظهر أن باقي الحدود تتذبذب أيضاً. لذلك تحقق $p(G.k)$ الخصائص من $CP1$ إلى $CP3$.

لإثبات الخاصية $CP4$ افترض أن للمخطط G حافة واحدة على الأقل. عندها يكون $p(G.1) = 0$ لأن G غير قابل للتلوين على 1. وبحساب دالة كثير الحدود للقيمة 1 نجد مجموع المعاملات وبذلك مجموع المعاملات لـ $p(G, k)$ يساوي 0.

السؤال 256: هل يمكن أن تكون $k^5 - 6k^4 + 3k^3 - 10k^2 + k - 3$ هي كثير الحدود لتدرج الألوان لمخطط ما؟ وهل يمكن أن تكون $k^4 - 4k^3 + 3k^2 - k$

انظر التمرين 14 لنسخة أقوى من الخاصية $CP3$.

الملخص

إن عدد تدرج الألوان $\chi\,(G)$ للمخطط G يساوي أقل عدد من الألوان يلزم لتلوين القمم بشكل مناسب، والذي يعني تلوينها بحيث يكون لكل قمتين متجاورتين لون مختلف. في أي إثبات لقيمة $\chi\,(G)$ يتطلب إثبات التلوين على k المناسب للمخطط G وأيضاً إثبات أنه لا يوجد عدد من الألوان $(k - 1)$ يمكن تلوين بها المخطط بشكل مناسب.

إن التلوين هو مسألة استمثال. لقد قمنا بتحويل التلوين لمسألة عد باستخدام كثير الحدود لتدرج الألوان (بشكل عام كما وضح ذلك جهدنا في هذا القسم). من الصعب حساب عدد تدرجات الألوان. كلتا طريقتي التضمين - الحذف وعلاقة

التكرار صعبتان جداً في التطبيق حتى للمخططات غير الكبيرة جداً إلا إذا كان المخطط ذا هيكلية عالية التنظيم مثل، C_n،k_n، أو p_n.

تمارين

1) قم بطباعة خارطة للولايات الـ 48 السفلية [في الولايات المتحدة] وقم بتلوينها باستخدام أربعة ألوان. وأثبت أيضاً لماذا أربعة الألوان ضرورية لتلوين هذه الخريطة.

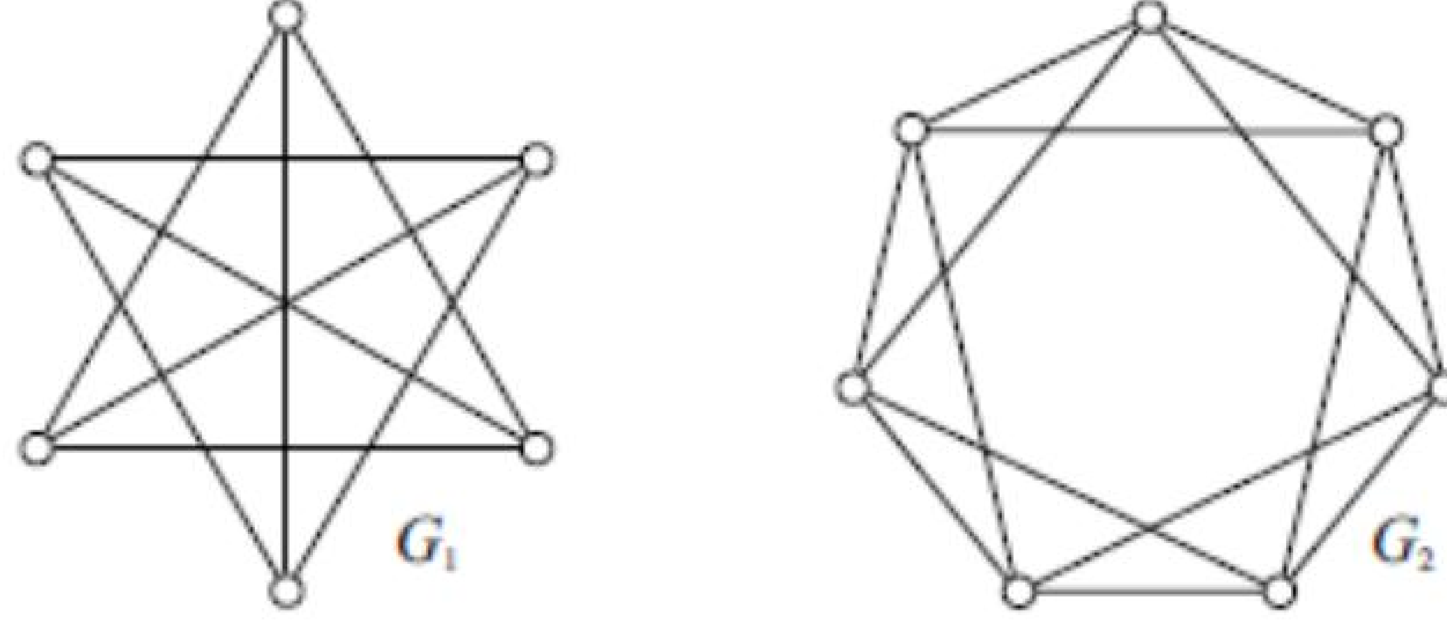
2) إذا كانت T شجرة، ما هي قيمة $\chi(T)$؟

3) أثبت أن $\chi\,(G) \leq \Delta\,(G) + 1$، حيث $\Delta\,(G)$ هو أقصى درجة للمخطط G.

4) حدد مع الإثبات $\chi(W_n)$؟. حيث المخطط W_n هو "العجلة" الذي يحتوي على دورة C_n ويحتوي كذلك على قمة إضافية متجاورة مع كل قمة في الدورة (أي أن W_n لها عدد من القمم $n + 1$).

5) حدد مع الإثبات عدد تدرجات الألوان لمخطط بيترسن (Petersen) ولمخطط غروتش (Grötsch)، التي هي مبينة في الشكل 6.3.

6) حدد مع الإثبات عدد تدرجات الألوان للمخططين في الأسفل؟



7) جد $\chi(G)$ إذا علمت أن

$p(G,k) = k^6 - 9k^5 + 31k^4 - 51k^3 + 40k^2 - 12k$ وأيضاً ما

عدد القمم والحواف للمخطط G؟

8) قم بتعريف $\omega(G)$، التي تدعى رقم الزمرة (Clique Number) لـ

G، لتكون أكبر عدد صحيح موجب r بحيث تحتوي G المخطط الجزئي k_r.

أ) جد المعادلة أو المتباينة التي تربط بين $\chi(G)$ و $\omega(G)$.

ب) أعط مثالاً على مخطط G بحيث $\chi(G) = 3$ و $\omega(G) = 2$.

ج) أعط مثالاً على مخطط G بحيث $\chi(G) = 4$ و $\omega(G) = 2$

9) حدد كثير الحدود لتدرج الألوان لكل من المخططات التالية:

أ) النجمة $k_{1,n}$.

ب) $k_{2,n}$.

ج) $C_3 \cup P_4 \cup K_5$.

10) جد كثير الحدود لتدرج الألوان للمخطط الذي يتكون منC_5 بالإضافة إلى قمة واحدة فقط مجاورة لأحد قمم C_5.

11) جد $p(K_n - e, k)$ حيث e هي أي حافة في K_n.

12) ما هو أقل عدد من الجذور التي يمتلكها $p(G, k)$؟

13) جد علاقة بين معاملات $p(K_n, k)$ وبين مجموعة من الأرقام تمت دراستها في مكان ما في هذا الكتاب.

14) معاملات كثير الحدود لتدرج الألوان للمخطط G تبدأ بـ $1, -e(G)$. أثبت أن المعاملات تستمر بالتذبذب بين الموجب والسالب إلى أن تصبح صفراً في مرحلة ما وتبقى قيمتها صفراً. بكلمات أخرى، أي متعدد حدود ذي تدرج الألوان يمكن كتابته على الشكل $p(G,k) = \sum_{i=m}^{n} (-1)^{n-i} a_i k^i$ حيث m هي عدد صحيح موجب يحقق الشرط $a_i > 0$ و $1 \leq m \leq n$ لجميع قيم i التي تحقق الشرط $m \leq i \leq n$.

15) في كثير الحدود لتدرج الألوان للمخطط G، أثبت أنه إذا كان k^m هو أصغر أس لـ k الذي ليس له أي معاملات صفرية ثم أثبت أن G له المكونات m.

16) هذا التمرين يهتم بوصف كثير الحدود لتدرج الألوان الخاص بشجرة.

أ) أثبت بالاستقراء: إذا كانت T شجرة لها عدد من القمم n، عندها

$$p(T, k) = k(k-1)^{n-1}$$

ب) أثبت إذا كان G مخططاً وكانت $p(G,k)=k(k-1)^{n-1}$، عندها يكون G شجرة.

ج) كم عدد المخططات المرمزة التي لها كثير الحدود لتدرج الألوان يساوي $k(k-1)^{50}$؟

ملاحظات سريعة

استخدم كلاً من كينيث أبل (Kenneth Appel) وولفغانغ هاكين (Wolfgang Haken) حاسوباً فائقاً لإثبات مبرهنة الألوان الأربعة لعدد كبير من الحالات، لذلك كان الإثبات ذا طبيعة محددة العدد وليس عاماً. حلّت النتائج التي حصلا عليها عام 1967 مسألة استمرت قائمة لأكثر من مئة عام، لكن واجهها بعض الشك من قبل بعض علماء الرياضيات الذين لم يعجبهم استخدام الحاسوب في الإثبات. كان طول البحث الذي أصدراه عام (1977) 139 صفحة؛ حديثاً قام كل من روبرتسون (Robertson)، ساندرز (Sanders)، سايمر (Seymour)، وتوماس (Thomas) عام 1996 بنشر إثبات جديد لمبرهنة الألوان الأربعة اعتماداً على الأفكار العامة نفسها لأبل وهاكين ولكن مع بعض التعديلات على الأمور التقنية التي واجهتهما.

تم تقديم كثيرة الحدود لتدرج الألوان من قبل بيرخوف (Birkhoff) عام 1912 كطريقة ممكنة لإثبات مبرهنة الألوان الأربعة، ولم يوفّق في ذلك. ولكن

أجريت دراسات أخرى عام 1946 من قبل بيرخوف ولويس (Birkhoff & Lewis) 1946.

4.6 نظرية رامزي

لنرَ كيف يرى أناس ليسوا في مجال علم الرياضيات عمل علماء الرياضيات، انظر إلى هذه الرسالة الموجهة لـآن لاندرز (Ann Landers) والتي ظهرت في جريدة **واشنطن بوست** في 22/ 6/ 1993.

عزيزتي لاندرز: أنا متأكدة أن الكثير من أعضاء الكونغرس يقرؤون مقالتك. أتمنى أن يروا ذلك لأنها الطريقة المثلى للفت انتباههم.

لقد أرفقت مقالاً من مجلة **روتشيستر دمقراط وكرونكل** (*Rochester Democrat & Chronicle*) لتتأكدي من أنني لا أختلق ذلك. يوجد أستاذان، أحدهما من روتشيستر والآخر من أستراليا عملا لمدة 3 سنوات، واستخدما 110 حاسوباً وقاما بالتواصل بـ 10000 ميل من البريد الإلكتروني، وأخيراً تعلما الإجابة على السؤال الذي حير العلماء لمدة 63 عاماً. السؤال هو: إذا كان لديك حفلة وأردت دعوة أربعة أشخاص على الأقل يعرفون بعضهم وخمسة آخرين لا يعرفون بعضهم، كم عدد الأشخاص الذين يجب أن تدعوهم؟ الجواب هو 25. وقام العلماء من شتى أنحاء العالم بتهنئتهما على هذه النتيجة.

لا أريد التقليل من شأن نتائجهما، ولكن يبدو لي أنه كان من الأفضل استغلال الوقت الكثير والمال الذي استهلك في هذه التجربة لتوفير الغذاء لملايين الأطفال في مناطق الحروب حول العالم. B.V.B., Rochester, N.Y.

لسوء الحظ، قام كاتب الرسالة بصياغة السؤال في الفقرة الثالثة بشكل خاطىء. الصياغة الصحيحة هي: إذا كان لديك حفلة وأردت أن *تضمن* أنه بغضّ النظر عمن قمت بدعوتهم سوف يكون هناك أربعة أشخاص جميعاً يعرفون بعضهم أو خمسة أشخاص كلهم لا يعرفون بعضهم، عندها ما هو أقل عدد الأشخاص الذين يجب دعوتهم؟

ولكن السؤال الأكبر الذي وجهه الكاتب بشيء من التهكم، هل هذا مهم؟ إليك سببان لنقول نعم، وكلاهما له علاقة بعالم الرياضيات في القرن السابع عشر بيار دو فيرما (Pierre de Fermat). **أولاً**: لن نجد التطبيقات المفيدة لأي نظرية إلا بعد مرور وقت طويل على اكتشافها. البرهان الأول لدعم هذا القول هو مبرهنة فيرما الصغيرة التي وضعها. في العام 1640، قام بتوظيفها بشكل مشهور كل من أدلمن (Adelman) وسمير (Samir) وريفيست (Rivest)، وعام 1978 لحماية الاتصالات الرقمية والتي تدعى اليوم تشفير RSA. لم يتوقع فيرما أن نظريته سوف تستخدم في هذا التطبيق.

ثانياً: المراحل التي نمر فيها في حل أي مسألة في الرياضيات عادة ما تكون أهم من النتيجة نفسها. وهنا البرهان الثاني من مبرهنة فيرما الأخيرة، والتي لم ينتج عنها إلى اليوم أي أمور عظيمة. ولكن المراحل التي مرت بها المبرهنة من صيغه ميرما وخلال 350 عاماً من تطورها لتصل إلى الإثبات النهائي عن طريق أندرو وايلز (Andrew Wiles) في العام 1995 أحدثت الكثير من الأمور العميقة المتعلقة بالرياضيات القوية والقابلة للتطبيق أهم من المبرهنة نفسها.

في هذا المقطع سوف نقوم بدراسة النوع من المسائل الذي أشارت إليه كاتبة الرسالة للصحفية آن لاندرز. هذا المجال في دراسة المخططات هو حقل نظرية رامزي، ومن المعروف عنه أنه حقل صعب، حيث من السهل وضع السؤال ولكن من الصعب الإجابة عليه.

مسائل الحفلات وتلوين الحواف ومسائل رامزي.

السؤال التالي حول الناس في حفلة يعرف كما يلي:

(3.3) مسألة الحفلة: ما هو أقل عدد من الناس يمكن أن تدعوهم إلى حفلة بحيث تضمن أنه يوجد إما ثلاثة يعرفون بعضهم أو ثلاثة لا يعرفون بعضهم؟

"ثلاثة يعرفون بعضهم" تعني أن أي شخصين من مجموعة ثلاثة أشخاص قد التقوا من قبل، أما "ثلاثة لا يعرفون بعضهم" تعني أنه لا يوجد أي شخصين في المجموعة من ثلاثة قد التقوا من قبل.

الآن إليك السؤال حول تلوين الحواف.

(3,3) مسألة رامزي: ما هي أقل قيمة لـ n بحيث يحتوي كل تلوين بالأحمر أو بالأزرق للحواف في K_n إما المخططات الفرعية K_3 وكلها حمراء أو جميع المخططات الفرعية K_3 وكلها زرقاء؟

"التلوين بالأحمر أو بالأزرق للحواف" يعني أن كل حافة يتم تلوينها إما بالأحمر أو الأزرق.

هاتان المسألتان تعبران عن الشيء نفسه: قم بتحديد قمم K_n على أنها أسماء المدعوين ومن ثم قم بتوصيل كل زوج من المدعوين إما بحافة حمراء إذا كانوا يعرفون بعضهم وحافة زرقاء إذا كانوا لا يعرفون بعضهم. سوف نقوم بدراسة تلوين الحواف من الآن فصاعداً، وأيضاً سوف نستخدم الاختصارات "تلوين أحمر وأزرق لـ K_n" و "K_3 أحمر" بحيث يُفهم منه أنه يشير إلى تلوين الحواف.

المسألة التي تحدثنا عنها في بداية هذ القسم هي:

(4,5) مسألة رامزي: ما هي أقل قيمة لـ n بحيث يحتوي كل تلوين أحمر وأزرق لـ K_n إما أحمر K_4 أو أزرق K_5.

كما ذكرنا في الرسالة، الجواب لهذه المسألة هو 25. ذلك يعني أمران: **1)** كل تلوين أحمر وأزرق محتمل لحواف K_{25} سوف ينتج عنه إما جميعها أحمر K_4 أو جميعها

أزرق K_5 أو ربما كلاهما، **2)** يوجد مثال على التلوين بالأحمر والأزرق لحواف K_{24} لا تكون جميعها أحمر K_4 ولا جميعها أزرق K_5.

تدعى مسألة تلوين الحواف في مخطط بمسألة رامزي لأنها تتبع لنظرية أشمل تم إثباتها من قبل فرانك رامزي (Frank Ramsey) عام 1930. وكانت مبرهنة رامزي تنص على:

- في الهيكلية الكبيرة

(في مسألة رامزي (4.5) هذه الهيكلة هي K_{25})

- المبنية بشكل عشوائي

(يتم تلوين كل حافة في K_{25} بالأحمر أو الأزرق بأي طريقة)

- هنالك هياكل دنيا غير العشوائية

(جميعها أحمر K_4 أو جميعها أزرق K_5)

عادة ما نستخدم لوصف نظرية رامزي المقولة الشهيرة لـ ت. س. موتزكين (T. S. Motzkin) "من المستحيل الحصول على فوضى مطلقة".

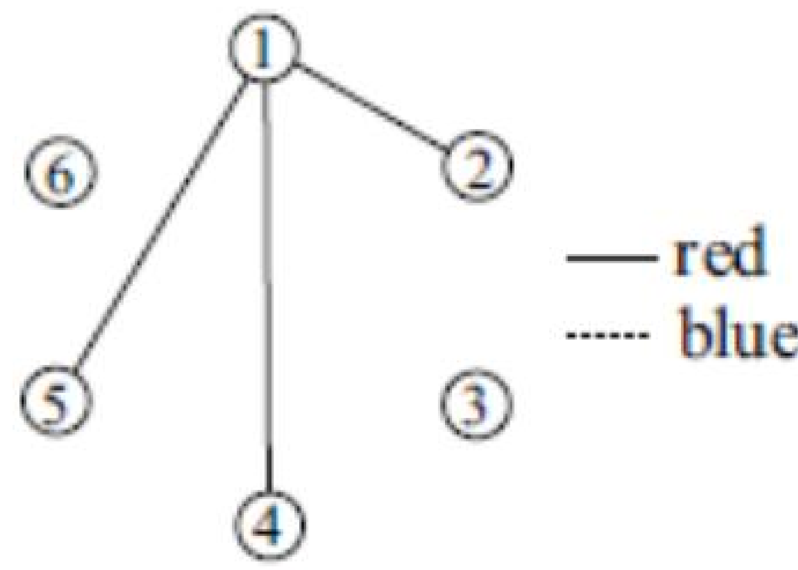
مسألة رامزي الأسهل

المطلوب في مسألة رامزي (3,3) أقل قيمة لـ n بحيث تضمن تلوين أحمر وأزرق لـ K_n بحيث يحتوي على أحمر K_3 أو أزرق K_3. الجواب هو ستة. هذا يتطلب توضيح أمرين:

1) كل تلوين أحمر وأزرق لـ K_6 يحتوي على أحمر K_3 أو أزرق K_3.

2) وجود مثال على تلوين أحمر وأزرق لـ K_5 بحيث لا يحتوي على أحمر K_3 ولا أزرق K_3.

من أجل إثبات النقطة 1، افترض أن مجموعة من القمم هي [6]. الخطوة الأولى هي في الإثبات هي الأكثر أهمية. يجب أن توجد ثلاث حواف بنفس اللون من الحواف الخمس المرتبطة بالقمة 1. ومن دون خسارة النظرة العامة دعنا نفترض أن لون الحواف 12، 14، و15 هو أحمر:



الآن اختر الحواف التي ما بين 2، 4، و5 إذا كان أي منها أحمر، عندها نكون قد وجدنا K_3. على سبيل المثال إذا كانت الحافة 25 حمراء عندها تشكل الحواف 12، 15، و25 تشكل K_3 أحمر. وبخلاف ذلك تكون ثلاثتها أزرق بالتالي تشكل الحواف 24، 25، و45 K_3 أزرق. وهذا يعالج كل الحالات ويكمل الإثبات.

لإثبات النقطة 2 نحتاج إلى اختبار تلوين أحمر وأزرق لـ K_5 بحيث لا يكون له K_3 أحمر ولا K_3 أزرق.

السؤال 257: أعطِ مثالاً على تلوين مشابه لـ K_5 .

ترميز سهم رامزي

لتكن $R(a, b)$ تعبر عن الجواب لما يلي:

(a, b) مسألة رامزي: ما هي أقل قيمة لـ n بحيث يحتوي كل تلوين أحمر وأزرق لـ K_n إما على K_a أحمر أو K_b أزرق؟

لقد بينا للتو أن $R(3\ ,3) = 6$.

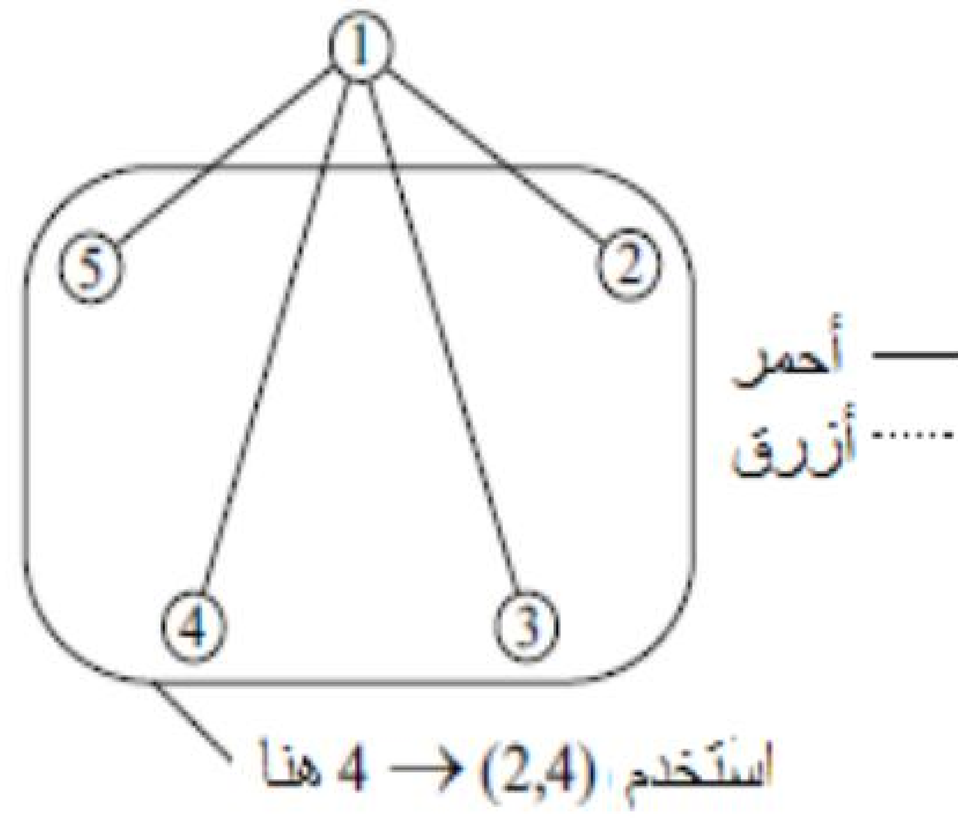
السؤال 258: وضّح لماذا دائماً $R(a, b) = R(b, a)$.

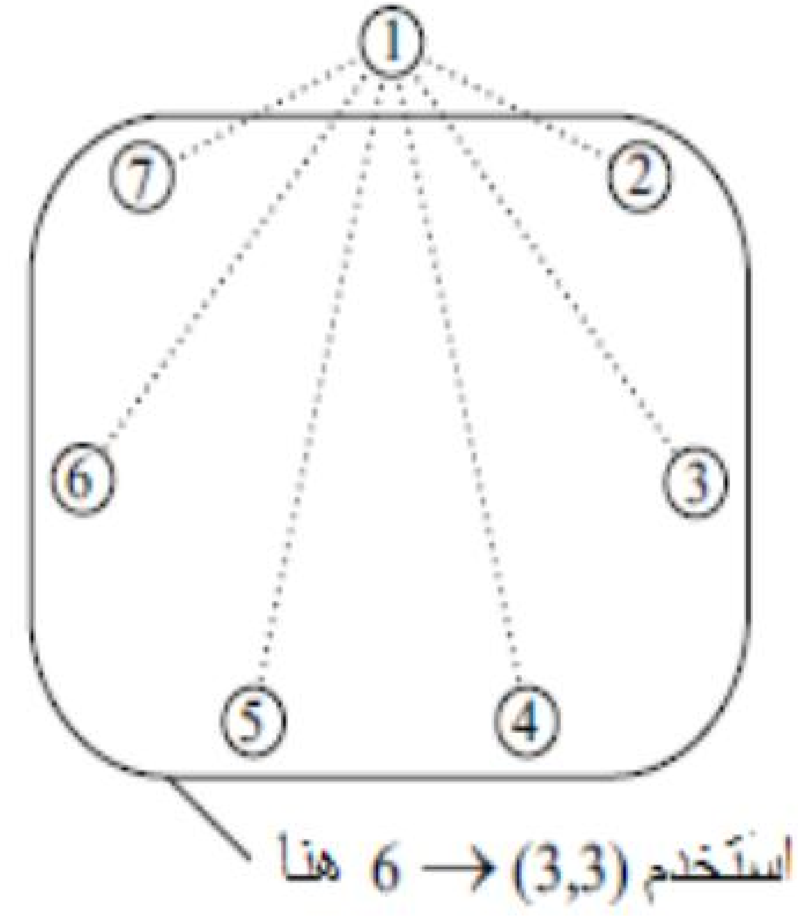
تمت دراسة الأعداد $R(a, b)$ بشكل مكثف من الكثيرين، ولكن قليل منها معروف. تظهر مبرهنة رامزي فقط أن الأرقام $R(a, b)$ معرفة بشكل جيد، ولم تعطِ أي فكرة حول كيفية تحديد قيمها. في هذا القسم سوف نجد القليل منهم، وفي نهايته سوف نجد جميع القيم المعروفة للأرقام $R(a, b)$ وأيضاً أفضل التوقعات لمجال الأعداد الأخرى.

نكتب $6 \to (3\ ,3)$ لنشير إلى أن كل تلوين أحمر وأزرق لـ K_6 له K_3 أحمر أو K_3 أزرق. وأيضاً نكتب $5 \not\to (3\ ,3)$ لنشير إلى أن ليس كل تلوين أحمر وأزرق لـ K_5 له K_3 أحمر أو K_3 أزرق. بشكل عام، $n \to (a\ , b)$ تعني أن كل تلوين أحمر وأزرق لـ K_n له K_a أحمر أو K_b أزرق. أحياناً يتم التعبير عن ذلك "n لها خاصية رامزي $(a\ , b)$".

السؤال 259: افترض $n \to (a\,,b)$، فسر لماذا $p \to (a\,,b)$ لجميع قيم $p > n$.

لذلك، تكون $R(a\,,b)$ هي أقل عدد صحيح موجب n بحيث $n \to (a\,,b)$. لذلك، $R(a\,,b) = n$ إذا وفقط إذا $n - 1 \not\to (a\,,b)$ و $R(a\,,b)$.





الشكل 6.9: الحالتان في إثبات أن $10 \to (3\,,4)$.

مسائل رامزي البسيطة

من السهل إيجاد قيمة عدد رامزي $R(2\,,b)$. نقوم بالبحث عن أصغر قيمة لـ n، بحيث يحتوي فيها كل تلوين أحمر وأزرق لـ K_n إما على K_2 أحمر أو K_b أزرق. لاحظ أن K_2 أحمر هو فقط حافة حمراء واحدة. ومن الواضح أن $b \to (2\,,b)$، لأن

أي تلوين أحمر وأزرق لـ K_b إما يحتوي على حواف زرقاء فقط أو على حافة حمراء واحدة على الأقل.

السؤال 260: أثبت أن $(2\,, b) \not\to b-1$. أي، أعطِ مثالاً لتلوين أحمر وأزرق لـ K_{b-1} لا يحتوي على K_2 أحمر ولا K_b أزرق.

وبالتالي $R(2\,, b) = b$. لجميع قيم $b \geq n$

مسألة سهلة أخرى لرامزي

الآن، وبما أننا نعلم أن $R(3\,,3) = 6$، يمكننا معالجة $R(3\,,4)$. لتوضيح كل من الصعوبة في إيجاد أعداد رامزي وأيضاً المجالات المهمة التي سنمر بها خلال مراحل إيجاد الأعداد، سوف نقوم في البداية بتحديد الحدود القصوى، ومن ثم الحدود الدنيا، وأخيراً سنحدد أفضل قيم للحدود القصوى.

إثبات أن $\mathbf{(3\,, 4) \to 10}$.

سوف نقوم بإثبات الحد الأعلى $R(3\,,4) \leq 10$ عن طريق إثبات $(3\,,4) \to 10$. حتى نبين أن أي تلوين أحمر وأزرق لـ K_{10} له إما K_3 أحمر أو K_4 أزرق، سوى نرى إذا كان بإمكننا أن نعدل الطريقة التي قمنا فيها بإثبات $(3\,,3) \to 6$. افترض أي تلوين لـ K_{10} وقم باختبار الحواف للقمة 1. يوجد حالتان. انظر الشكل 6.9.

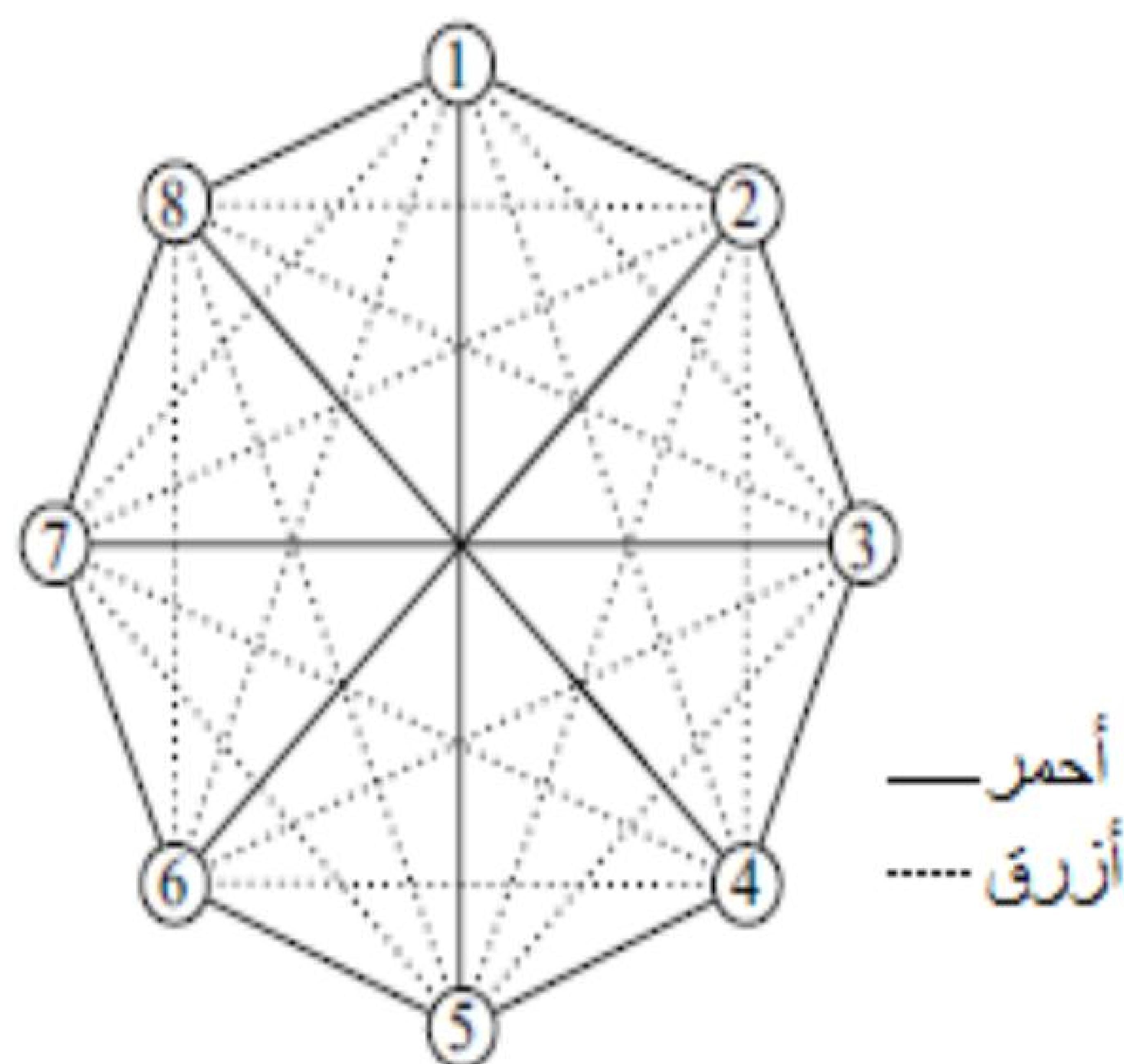
الحالة (1): يوجد على الأقل 4 حواف حمراء مجاورة للقمة 1. افترض أن هناك حوافاً حمراء تصل القمة 1 بالقمم 2 – 5. انظر إلى المخطط الجزئي K_4 الذي ظهر عن القمم 2 – 5. بما أن $(2,4) \to 4$، يحتوي هذا المخطط الجزئي K_2 أحمر أو K_4 أزرق. إذا كان هذا المخطط الجزئي يحتوي على K_4 أزرق، عندها نكون قد أوجدنا K_4 أزرق في المخطط الأكبر K_{10} . وخلاف ذلك فهو يحتوي على K_2 أحمر، أي أن هاتين القمتين والقمة 1 تشكل K_3 أحمر في المخطط الأكبر K_{10} . لذلك في هذه الحالة $(3,4) \to 10$.

الحالة (2): يوجد على الأكثر ثلاث حواف حمراء، وبالتالي على الأقل ست حواف زرقاء مجاورة للقمة 1. افترض حافة زرقاء تصل بين القمة 1 مع القمم 2 – 7. انظر إلى المخطط الجزئي K_6 الذي نتج عن القمم 2 - 7. بما أن $(3,3) \to 6$ يحتوي هذا المخطط الجزئي K_3 أحمر أو K_3 أزرق. إذا كان يحتوي على K_3 أحمر عندها نكون قد أوجدنا K_3 أحمر في المخطط الجزئي K_{10} ، وبخلاف ذلك يحتوي على K_3 أزرق، أي أن هذه القمم الثلاث والقمة (1) تشكل K_4 أزرق في المخطط الأكبر K_{10} . وبالتالي في هذه الحالة أيضاً $(3,4) \to 10$.

هاتان الحالتان شاملتان لذلك $(3,4) \to 10$ وبالتالي $R(3,4) \leq 10$.

إثبات أن $(3,4) \not\to 8$.

لإثبات أن $(3,4) \nrightarrow 8$، يجب أن نجد تلويناً أحمر وأزرق لـ K_8 لا يوجد له K_3 أحمر ولا K_4 أزرق. هذا مخطط لهذه الحالة.



والفائز هو...

إلى هذه المرحلة نعلم أن $9 \leq R(3,4) \leq 10$. لذا هل $(3,4) \rightarrow 9$ أم $(3,4) \nrightarrow 9$؟

دعنا نرَ إذا كان بإمكاننا تطوير الإثبات إلى $(3,4) \rightarrow 10$. افترض وجود أي تلوين أحمر وأزرق لـ K_9 . قم بتجاهل الحواف الزرقاء في هذه اللحظة وانظر إلى المخطط ذي القمم التسع جميع حوافه حمراء. بما أن عدد القمم فردي في هذا المخطط، يوجد قمة ذات درجة زوجية. دعنا نفترض أن القمة 1 هي هذه القمة بحيث لها عدد زوجي من الحواف الحمراء التابعة لها. الآن عد إلى التلوين الأحمر والأزرق الأصلي لـ K_9 . درجة كل قمة تساوي 8 وليس 9، لذلك سوف نقوم بتعديل الحالة (1) كما يلي:

الحالة (1): يوجد على الأقل 3 حواف حمراء تابعة للقمة 1. لكن للقمة 1 عدد زوجي من الحواف الحمراء التابعة لها، لذلك يجب أن يكون هناك على الأقل 4 حواف حمراء تابعة للقمة 1. ونتابع هذه الحالة كما فعلنا سابقا.

الحالة (2): يوجد على الأكثر حافتان حمراوان، وبالتالي على الأقل 6 حواف زرقاء تابعة للقمة 1. هذه الحالة مطابقة للحالة (2) في الإثبات السابق.

في الحالتين النتيجة هي $9 \to (3,4)$. لقد قمنا الآن بتحديد قيمة $R(3,4)$.

المبرهنة 6.4.1: $R(3,4) = 9$.

اثنان من الحدود القصوى

لماذا قمنا بإثبات أن $10 \to (3,4)$ بينما نحن نعلم أن $9 \to (3,4)$؟ في الحقيقة، وبعد التأمل، إثبات أن $10 \to (3,4)$ يثبت أن:

$$R(3,4) \leq R(2,4) + R(3,3)$$

ويمكن بنفس الطريقة الحصول على الحدود القصوى لأي عدد رامزي $R(a,b)$

المبرهنة 6.4.2: إذا كانت $a, b \geq 3$، عندها $R(a,b) \leq R(a-1,b) + R(a,b-1)$.

الإثبات: افترض أن $a, b \geq 3$. قم بتعريف $n \coloneqq R(a-1,b) + R(a,b-1)$. سوف نثبت المبرهنة عن طريق إثبات أن $n \to (a,b)$.

افترض أي تلوين أحمر وأزرق K_n ، وانظر إلى عدد الحواف المرتبطة بالقمة 1 هنالك من هذه الحواف

$n-1 = R(a-1,b) + R(a,b-1) - 1$. سوف ننظر في حالتين:

الحالة ($\boldsymbol{1}$): يوجد على الأقل $\boldsymbol{R(a-1,b)}$ حافة حمراء مرتبطة بالقمة $\boldsymbol{1}$. انظر إلى المخطط الجزئي الناتج عن نهايات الحواف $R(a-1,b)$. إنه يحتوي إما على K_{a-1} أحمر أو K_b أزرق. إذا كان يحتوي على K_b أزرق، عندها يحتوي K_n على K_b أزرق. وإذا كان يحتوي على K_{a-1} أحمر، عندها تشكل القمم $a-1$ بالإضافة للقمة 1 K_a أحمر. لذلك في هذه الحالة $n \to (a\,,b)$.

الحالة ($\boldsymbol{2}$): يوجد على الأقل $\boldsymbol{R(a,b-1)}$ حافة زرقاء مرتبطة بالقمة $\boldsymbol{1}$. انظر إلى السؤال بعد الإثبات.

في كلتا الحالتين $n \to (a\,,b)$. وبالتالي $R(a\,,b) \leq \mathrm{n} = R(a-1,b) + R(a\,,b-1)$

السؤال 261: لماذا يجب أن يكون هناك عدد من الحواف الحمراء يساوي $R(a-1,b)$ أو عدد من الحواف الزرقاء يساوي $R(a,b-1)$ مرتبطة بالقمة 1. وأيضاً اكتب تفاصيل الحالة 2.

لم نقم حتى الآن بإثبات أن أعداد رامزي $R(a\,,b)$ لكل $a\,,b \geq 2$ معرّفة بشكل جيد (أي موجودة ومحدودة)، ولكن يمكننا القيام بذلك بمساعدة المبرهنة 6.4.2. سوف نقوم بالإثبات باستخدام الاستقراء على $a+b$. الحالة الأساس هي، بما أن $R(2,b) = R(b\,,2) = b$ لجميع قيم $b \geq 2$ هذه الأعداد معرفة بشكل جيد. الآن افترض أن $a\,,b \geq 3$، وأن $R(p,q)$ معرفة بشكل جيد طالما $b + q < a + b$، هذا يؤدي إلى أن تكون كل من $R(a\,,b-1)$ و $R(a-1,b)$ معرفة بشكل جيد. الطريقة المستخدمة لإثبات المبرهنة 6.4.2 تظهر أن

$$R(a\,,b) \leq R(a-1,b) + R(a\,,b-1).$$

وبالتالي $R(a\,,b)$ لها حد أقصى معرف بشكل جيد، ولذلك تكون $R(a\,,b)$ هي أصغر عدد صحيح موجب n بحيث $n \to (a\,,b)$ معرفة بشكل جيد.

يمكن إثبات حدود المبرهنة التالية باستخدام المبرهنة 6.4.2 وباستخدام الاستقراء. انظر التمرين 4.

المبرهنة 6.4.3: إذا كانت $a, b \geq 2$، عندها $R(a\,,b) \leq \binom{a+b-2}{a-1}$

السؤال 262: جد الحدود القصوى على $R(a\,,b)$ للقيم $a\,,b = 3\,,4,5,6$ باستخدام المبرهنتين 6.4.2 و6.4.3.

الحد الأدنى

سوف نهتم الآن بالحد الأدنى على $R(a\,,a)$. دعنا نرَ أولاً كيف يكون هذا للحالة $R(5\,,5)$. الحالة الأعم تكون أكثر صعوبة.

ما هي شروط n التي تجعلنا نستنتج أن $R(5\,,5) > \mathrm{n}$؟ سوف نحتاج إلى أن نثبت أنه يوجد تلوين أحمر وأزرق لـ K_n لا يحتوي على K_5 أحمر ولا K_5 أزرق. دعنا نحاول أن نقوم بعدّ مكمل ذلك، وهو تلوين K_n الذي له K_5 أحمر أو K_5 أزرق. إذا كانت S هي أي مجموعة جزئية من خمسة عناصر من القمم في K_n ، لتكن As هي مجموعة التلوين الأحمر والأزرق لـ K_n بحيث يكون المخطط الناتج عن S جميعه أحمر أو جميعه أزرق. حجم هذه المجموعة هو:

$$|As\,| = 2.2^{\binom{n}{2}-\binom{5}{2}}$$

وبما أنه توجد طريقتان لتلوين حواف المخطط الجزئي الناتج عن S (جميعها حمراء أو جميعها زرقاء)، وبالتالي يوجد $2^{\binom{n}{2}-\binom{5}{2}}$ طريقة لتلوين باقي الحواف التي عددها $\binom{n}{2} - \binom{5}{2}$ في K_n .

عدد التلاوين لـ K_n الذي يتضمن K_5 أحمر أو K_5 أزرق هو بالتالي حجم اتحاد عناصر As:

[#عدد التلاوين الذي له K_5 أحمر أو K_5 أزرق] =

$$\left|\bigcup_{S:|S|=5} As\right|$$

مجموع أحجام المجموعات هي حالة سهلة للحد الأقصى للاتحاد:

$$\left|\bigcup_{S:|S|=5} As\right| \leq \sum_{S:|S|=5} |As|$$

استخدم الصيغة لـ $|As|$ لكتابة:

$$\sum_{S:|S|=5} |As| = \sum_{S:|S|=5} 2.2^{\binom{n}{2}-\binom{5}{2}} = \binom{n}{5}.2.2^{\binom{n}{2}-\binom{5}{2}}$$

لقد أثبتنا أن

$$[\text{عدد التلاوين الذي له } K_5 \text{ أحمر أو } K_5 \text{ أزرق}] \leq \binom{n}{5} = 2.2^{\binom{n}{2}-\binom{5}{2}}$$

الآن نأتي إلى الملاحظة المهمة: إذا كان العدد على اليمين أقل من مجموع التلاوين الأحمر والأزرق لـ K_n ، عندها يوجد تلوين لا يحتوي على K_5 أحمر ولا K_5 أزرق. المجموع الكلي للتلاوين الأحمر والأزرق لـ K_n يساوي $2^{\binom{n}{2}}$، و

$$\binom{n}{5}.2.2^{\binom{n}{2}-\binom{5}{2}} < 2^{\binom{n}{2}}$$

وتكون صحيحة إذا وفقط إذا

$$\binom{n}{5} < 2^{\binom{5}{2}-1}$$

هذه المتباينة التي سعينا إليها من البداية: إذا كانت n تحقق $\binom{n}{5} < 2^{\binom{5}{2}-1}$، عندها $R(5,5) > n$

المبرهنة 6.4.4: إذا كانت n عدد صحيح يحقق

$$\binom{n}{a} < 2^{\binom{a}{2}-1}$$

عندها $R(a,a) > n$

السؤال 263: أثبت المبرهنة عن طريق تعميم طريقة الحل لـ $R(5,5) > n$.

الحد الأدنى الناتج عن المبرهنة 6.4.4 هو قيمة متغيرة على الأغلب.

السؤال 264: جد الحد الأدنى على $R(a,a)$ لكل $a = 3, 4, 5, 6$ باستخدام المبرهنة.

ما مدى صعوبة مسائل رامزي ؟

وضع عالم الرياضيات الهنغاري الشهير باول إردوس (Paul Erdös) (1913-1996) تشبيهاً حول مدى صعوبة إيجاد $R(5,5)$ و $R(6,6)$. افترَض أن هناك رجال فضاء غرباء أقوياء لا يمكن قهرهم حضروا إلى الأرض وسألوا سؤالاً واحداً. أجب عن السؤال بشكل صحيح وسوف يترك الفضائيون الغرباء الأرض، أجب بشكل خاطىء عن السؤال وسوف يدمرون البشرية فوراً. إذا سأل الفضائيون الغرباء عن قيمة $R(5,5)$ عندها ووفقاً لإردوس أفضل ما يمكن أن نقوم به أن نجمع جميع علماء الرياضيات ليدركوا ما يقومون به ويعملوا على إيجاد الجواب. أما إذا سأل الفضائي عن قيمة $R(6,6)$، عندها يقول إردوس إن أفضل ما يمكن أن نقوم به هو أن نجد طريقة لتدمير الفضائيين الغرباء.

$a\downarrow$ $b\rightarrow$	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4		18	25	35;41	49;61	56;84	73;115
5			43;49	58;87	80;143	101;216	125;316
6				102;165	113;298	127;495	169;780
7					205;540	216;1031	233;1713
8						282;1870	317;3583
9							565;6588

الجدول 6.1: أفضل الحدود لأرقام رامزي $R(a\ ,b)$ لكل $3 \leq a \leq b \leq$

.9

يظهر في الجدول 6.1 أرقام رامزي المعروفة وغير البديهية لـ $R(a\ ,b)$ التي

تحقق

$R \leq a \leq b \leq 9$. يوجد فقط (9) قيم لـ $R(a\ ,b)$ مؤكدة، أما باقي القيم

فهي أفضل القيم المعروفة للحدود القصوى والدنيا.

السؤال 265: قارن بين النتائج التي حصلت عليها للحدود القصوى والدنيا

في السؤالين 262 و264 وبين الموجودة في الجدول 6.1.

أحدث الاكتشافات كان عدد $R(4{,}5) = 25$، والذي تحدثنا عنه في الرسالة

في بداية القسم. هذا تسلسل أحداث عملية إيجاد $R(4{,}5)$.

- 1955: أول حد أقصى $R(4{,}5) \leq 31$.

- 1960: أول حد أدنى وتحديث للحد الأقصى $25 \leq R(4,5) \leq 30$.
- 1968: تحديث للحد الأقصى $R(4,5) \leq 29$
- 1971: تحديث للحد الأقصى $R(4,5) \leq 28$
- 1991: تحديث للحد الأقصى27 $R(4,5) \leq 27$
- 1992: تحديث للحد الأقصى $R(4,5) \leq 26$.
- 1993: تحديث للحد الأقصى $R(4,5) \leq 25$ وإثبات أن $R(4,5) = 25$.

بالنظر إلى التواريخ نستنتج الصعوبة في كل خطوة، يمكن أن نستنتج أنه لا يمكن التغلب على $R(4,7)$ بالنظر إلى الحدود الحالية وهي $49 \leq R(4,7) \leq 61$.

أرقام أخرى لرامزي

تتطلب عملية إضافة عدد واحد لعدد رامزي $R(a\,, b)$ إضافة ألوان أخرى. قم بتعريف $R(a\,, b, c)$ ليكون أقل عدد صحيح موجب n بحيث يكون لأي تلوين أحمر وأزرق وأخضر لـ K_n إما K_a أحمر أو K_b أزرق أو K_c أخضر. في هذه الحالة يوجد عدد واحد معروف وليس تافهاً وهو $R(3, 3, 3) = 17$. في حالة وجود أربعة ألوان لا يوجد أي من الأرقام $R(a\,, b, c, d)$ معروفة.

السؤال 266: حدد $R(2\,, 3, 3)$. ماذا يمكننا أن نقول حول $R(2\,, b, c)$؟

يتضمن توليد آخر لـ $R(a\,,b)$ البحث عن مخطط جزئي غير متدرج الألوان بدلاً من البحث عن مخطط كامل لأي مخططين H و G، قم بتعريف المخطط الجزئي $R(G\,,H)$ ليكون أقل عدد صحيح موجب n بحيث يكون أي تلوين أحمر وأزرق لـ K_n يحتوي على إما G أحمر أو H أزرق. على سبيل المثال، $R(\,C_4, K_5-e)$ هي أقل عدد صحيح موجب n بحيث يكون أي تلوين أحمر وأزرق لـ K_n يحتوي إما على C_4 أحمر (دورة رباعية حمراء) أو K_5-e أزرق (K_5 أزرق مع إلغاء أحد حوافه) ويمكن التعبير في هذه الحالة عن $R(a\,,b)$ لتصبح $R(\,K_a\,,\,K_b)$. انظر إلى التمرين.

الملخص

رقم رامزي $R(a\,,b)$ يساوي أقل عدد صحيح موجب n بحيث يحتوي كل تلوين أحمر وأزرق لـ K_n إما كل K_a أحمر أو كل K_b أزرق. من الصعب حساب أرقام رامزي، يوجد فقط 9 أرقام غير تافهة لرامزي معروفة: $R(3\,,b)$ حيث $b=3\,,4,\dots,9$ وأيضاً $R(4\,,5)$ و $R(4\,,4)$. العمل على تحديد $R(4\,,5)$ استغرق تقريباً 40 سنة وتتطلب عمليات حسابية كبيرة وعبقرية في علم الرياضيات.

تمارين

1) صحيح أم خاطىء؟

أ. $n\to(a\,,b)$ إذا وفقط إذا $R(a\,,b)\le n$.

ب. $(a\,,b)$ $n \nrightarrow$ إذا وفقط إذا $R(a\,,b) \geq \text{n}$.

ج. يوجد تلوين أحمر وأزرق لـ K_{300} من دون K_6 أحمر ولا K_7 أزرق.

د. يوجد طريقة واحدة لتحديد الحد الأقصى على $R(a\,,b)$ وهي عن طريق استعراض تلوين المخطط الكامل والذي له إما K_a أحمر أو K_b أزرق.

2) أثبت النسخة التالية من المبرهنة 6.4.2 التي تعطي حدوداً أضيق لإحدى الحالات الخاصة: إذا كانت $a\,,b \geq 3$، وكانت $R(a,b-1)$ و $R(a-1,b)$ كلاهما زوجي، عندها $R(a\,,b) \leq R(a-1,b) + R(a\,,b-1) - 1$.

3) افترض وجود أي 5 نقاط في المسطح بحيث لا تقع أي ثلاث منها على خط واحد. أثبت أنه يوجد 4 نقاط تشكل قمماً لشكل رباعي محدب.

4) أثبت النظرية 6.4.3 عن طريق الاستقراء على $a + b$ (يمكن إثبات ذلك أيضاً باستخدام الاستقراء المزدوج على b و a).

5) جد التلوين الأحمر والأزرق لـ K_{13} الذي لا يحتوي على K_3 أحمر ولا K_5 أزرق.

6) حدد أرقام رامزي المتولدة التالية:

أ. $R(K_3 - e, K_b)$ لجميع قيم $b \geq 3$

ب. $R(K_{1,3}, K_{1,4})$

ج. $R(C_4, C_4)$

د. $R(K_3, C_4)$

7) أعط برهاناً توافقياً مباشراً للمبرهنة 6.4.3

ملاحظات سريعة

يمثل كتاب غراهام وروتشيلد سنبسر (Graham, Rothschild & Spencer (1980)) دراسة استقصائية ممتازة لنظرية رامزي ويحتوي أيضاً على بعض المعلومات التاريخية المهمة. عبر رامزي عن مبرهنته الأصلية على شكل مجموعات، وليس مخططات وكان مهتماً في مسألة تتعلق بالمنطق في الرياضيات. ومع ذلك أطلق بحثه في العام 1930 اهتماماً كبيراً في الأبحاث حول التوافق في نظرية المخططات. عمل رامزي في الفلسفة وفي منطق الرياضيات وفي علم الاقتصاد وقدم مساهمة عظيمة لكل من هذه المجالات قبل أن يتوفى عن عمر فقط 27.

العالمان اللذان تم ذكرهما في الرسالة في بداية هذا القسم براندن ماكي (Brendan Mckay) وستانسلو رادزيسوفسكي (Stanislaw Radziszowski)، ظهرت نتائج بحثهما في الورقة البحثية التي أعدوها. و حافظ أيضاً رادزيسوفسكي على مقال مسمى بأرقام رامزي الصغيرة (Small Ramsey Numbers)، والذي تم

نشره في *Electronic Journal of Combinatorics*، والذي يحتوي أفضل الحدود المعروفة لجميع أنواع أرقام رامزي بما فيها تلك الواردة في الجدول 6.1. التحديث الأخير كان في شهر آب/ أغسطس من العام 2006.

الفصل السابع

التصاميم والرموز

في هذا الفصل، سنتناول مجالين تطبيقيين للتوافيق، في البداية سيبدوان غير مرتبطين بالتوافيق. يتضمن المجال الأول استخدام رموز تصحيح الأخطاء (Erro-Correcting Codes). تعطي رموز تصحيح الأخطاء طريقة لنقل رسالة بحيث يمكن استرجاع الرسالة الأصلية عند ظهور أخطاء في عملية النقل. ما عليك سوى التفكير في التقنية المستخدمة اليوم (الهواتف النقالة، مشغلات الأقراص، سفن الفضاء) وطرق حصول أخطاء النقل (مشاكل سواتل الاتصالات أو أبراج الهواتف النقالة، تعرض الأقراص للعطب والضرر، أنواع مختلفة من العوامل) للتعرّف على أهمية هذا التطبيق.

يتضمن المجال الآخر تصاميم توافيقية (Combinatorial Designs). ظهرت إحدى الاحتياجات الأولى للتصاميم في تصميم التجارب الإحصائية، خاصة في حقلي

الزراعة والطب. من الأمثلة الكلاسيكية على ذلك الدراسات المختصة بفحص كفاءة تركيبات مختلفة من مخصبات البذور، والأدوية وحتى إطارات المركبات. للخروج باستنتاجات صحيحة يجب على الباحث أو المختبِر التحكم بالعوامل غير التجريبية والتي يمكن أن تشوش على المخرجات. على سبيل المثال، في تجربة تركيبات مخصبات البذور الممكنة، يجب اختبار المجموعات كافة باستخدام أنواع تربة مختلفة وفي ظروف جوية مختلفة بحيث لا يكون نجاح أي من العينات مرتبط بهذين العاملين. توفر التصاميم التوافقية نماذج أولية للتجربة تحقق هذا الهدف.

وبداية بهذه تطبيقات الأولى للتوافيق أُثبتت جدارتها في تقبّل إعدادات أخرى. وتتضمن التطبيقات أيضاً إعداد جداول المسابقات ووضع رموز تصحيح الأخطاء.

1.7 مناهج بناء التصاميم

نبدأ دراستنا لتصاميم التوافيق بمحاولة بناء بعض التصاميم المحددة. بعد اختبار بعض الحالات، نشتق بعض الخصائص ومن ثم نستكشف المزيد من مناهج البناء.

التصميم (7,7,3,3,1)

يرغب مدير فريق كرة الطائرة الترفيهية بجدولة بعض المباريات في بطولة يشارك فيها 7 أفرقة. في مثل هذه البطولات، يلعب كل فريق مع كل فريق آخر مرة

واحدة على وجه التحديد. يرغب المدير بإرسال ثلاثة أفرقة إلى الملعب يومياً. في هذه الحالة يلعب فريقان ضد بعضهما ويعمل الفريق الثالث على توفير الحكام، ثم يتبادلون الأدوار بحيث يكون مجموع المباريات الملعوبة يومياً ثلاثاً. كيف يمكن وضع جدول المباريات؟

يجب أن يلعب كل فريق ما مجموعه ست مباريات. وفي اليوم الذي يحضر فيه الفريق إلى الملعب يلعب مبارتين. وبناء عليه، في الجدول المثالي، فإن كل فريق يحضر إلى الملعب في 6/ 2=3 أيام. لاحظ أيضاً مجموع المباريات التي يلعبها الفريق يساوي $\binom{7}{2}$=21. في الجدول المثالي، يستغرق إنجاز هذه المباريات 21/ 3=7 أيام لأن عدد المباريات التي تجرى يومياً هو 3.

لنحاول إعداد الجدول. رقّم الأفرقة من 1 إلى 7 وحاول جمعها في مجموعات فرعية بحيث تحقق المتطلبات. مثلاً لنرسل الأفرقة 1–3 للعب في اليوم الأول. الفريق الأول يجب أن يلعب مع الأفرقة 4–7 أيضاً، إذن ابدأ بتحديد المجموعات الفرعية:

$$B_1 = \{1,2,3\}\ B_2 = \{1,4,5\}\ B_3 = \{1,6,7\}$$

وهذا يضمن أن الفريق الأول سيلعب مع كل فريق آخر مرة واحدة.

الفريق الثاني يكون قد لعب مع الفريق الأول والفريق الثالث، ولكن يجب أن يلعب أيضاً مع الأفرقة 4–7. لن نضمّن المجموعة الفرعية {2,4,5} لأن الفريقين 4

و 5 لعبا في المجموعة B_2. (كل زوج من الأفرقة يجب أن يلعب مرة واحدة فقط). وعليه فإننا نختار $B_4 = \{2,4,6\}$. وهذا يكمل متطلبات اللعب للفريق الثاني. لاحظ أن الفريق 3 لايزال بحاجة للعب مع الأفرقة 4–7، نحدد مجموعة فرعية جديدة $B_6 = \{3,4,7\}$ و $B_7 = \{3,5,6\}$.

السؤال 267: إذا اخترت أن تكون $B_4 = \{2,4,7\}$، ماذا ستكون بقية المجموعات الفرعية؟

يكون الجدول الإجمالي كما يلي:

i	1	2	3	4	5	6	7
B_i	,2,31	,4,51	,6,71	,4,62	,5,72	,4,73	,5,63

يجب أن يلعب كل 21 زوجاً من الأفرقة مرة واحدة تحديداً. على سبيل المثال، يظهر الفريقان 3 و6 معاً في المجموعة B_7 ولا يظهران معاً في أي مجموعة فرعية أخرى. لاحظ أيضاً أن كل فريق يحضر إلى الملعب في ثلاثة أيام تحديداً.

يعرف هذا التنويع في المجموعات الفرعية بتصميم المجموعة المتوازن غير المكتمل. وهو يتضمن الهيكلية التي يرغب بها المدرب: أن يظهر كل فريق في ثلاث مجموعات فرعية فقط، وكل مجموعة فرعية تتضمن ثلاثة أفرقة فقط، وأن كل زوج

من الأفرقة يظهر معاً في مجموعة فرعية واحدة فقط. هذا التصميم يعرف بـ (7،7،3،3،1) لأسباب سنوضحها لاحقاً.

لا يوجد تصميم مثالي لو كان عدد الأفرقة ستة مثلاً. لكن البطولة ستتضمن $\binom{6}{2} = 15$ مباراة، لذا فإن الجدول المثالي سيتضمن 15/ 3 =5 أيام. بالبدء بالمجموعة $B_1 = \{1,2,3\}$ و$B_2 = \{1,4,5\}$، لا يوجد طريقة لوضع المجموعة الفرعية $B_3 = \{1,?,6\}$ بحيث تتجنب أن يلعب الفريق 1 مع أي فريق لعب معه مسبقاً. يجب على المدرّب إما أن يكون جاهزاً لإرسال الأفرقة إلى الملعب بهدف التحكيم فحسب أو يجب أن يجد طريقة أخرى لوضع برنامج البطولة.

السؤال 268: هل يوجد هكذا تصميم لو كان عدد الأفرقة 8؟ عليك أن تضع التصميم أو أن تفسر سبب عدم إمكانية وجوده.

تصاميم المجموعات المتوازن غير المكتمل

التصميم التوافقي أو ببساطة **التصميم** هو زوج (V, B) حيث V مجموعة محدودة من **تنويعات (Varieties)** و B مجموعة متعددة تتكون من المجموعات الفرعية غير الخالية من V. المجموعات الفرعية من B هي أجزاء التصميم. التصميم الذي صممناه مسبقاً يتضمن

$$V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$B = \{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{1,6,7\},\{2,4,6\},\{2,5,7\},\{3,4,7\},\{3,5,6\}\}$$

في هذه الحالة، لا يوجد مجموعات فرعية متكررة، إذن $\mathcal{B}$ مجموعة عادية. على الرغم من أننا رمزنا للمجموعات الفرعية بـ $B_1, \dots \dots, B_7$ عندما بنينا التصميم، إلا أننا قمنا بذلك لتسهيل الرجوع إليها. المجموعات الفرعية في التصميم غير مرمّزة.

التصميم (b, v, r, k, λ) فيه مجموعات فرعية b وتنويعات v بحيث يظهر كل تنويع في المجموعات الفرعية r فقط، وكل مجموعة فرعية تحتوي التنويعات k تحديداً، وكل زوج من التنويعات المتميزة يظهر في المجموعات الفرعية λ تحديداً. إن مثل هذه التصاميم تكون إما **مكتملة (Complete)** أو **غير مكتملة (Incomplete)** حسب ما إذا كانت $k = v$ أو $k < v$ على التوالي. **التصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل** (Balanced Incomplete Block Design) (BIBD) هو تصميم (b, v, r, k, λ) فيه $k < v$. وعليه يكون جدول البطولة الذي صمم سابقاً (7,7,3,3,1).

بشكلٍ عام، أي تصميم يظهر فيه التنويع في المجموعات الفرعية r تحديداً يكون تصميم ر- منتظم. وأي تصميم يكون فيه كل مجموعة فرعية ذات حجم k يكون **ك - منتظم**. **أي** تصميم يظهر فيه كل زوج من التنويعات المتميزة في المجموعات الفرعية λ فقط يكون $\boldsymbol{\lambda}$_متوازناً (λ_$Balanced$). وعليه فإن **تصميم ذو**

المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل يكون تصميماً غير مكتمل ومنتظم وعادي ومتوازن. أما التصميم ذو الخصائص التالية

$$V = \{1,2,3,4\}$$
$$B = \{\{1,2\},\{1,2\},\{3,4\},\{3,4\}\}$$

فهو ليس **تصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل** لأنه وعلى الرغم من أنه غير مكتمل، و2_عادي، و2_منتظم، إلا أنه غير متوازن لأن التنويعين 1 و2 يظهران معاً في مجموعتين فرعيتين بينما لا يظهر التنويعان 1 و3 معاً في أي مجموعة فرعية. يتطلب التمرين 8 إثبات أن أي تصميم غير مكتمل منتظم ومتوازن ليس بالضرورة عادياً، وعليه يكون $BIBD$.

السؤال 269: أعطِ مثالاً على تصميم فيه $V = \{1,2,3\}$ يكون عادياً ومتوازناً لكن غير موحد.

في التصميم المكتمل، تتكون كل مجموعة فرعية من المجموعة الكاملة من التنويعات V. إذا كان مثل هذا التصميم ويحتوي على مجموعات فرعية عددها b فإن الموسطات الباقية تكون سهلة الحساب.

السؤال 270: حدد الموسطات الباقية لتصميم مكتمل $(b, v, ?, ?, ?)$.

يتضمّن العمل الممتع الذي ينبغي عمله على تصاميم (b, v, r, k, λ) تلك الموسطات التي تحقق المتباينة $v > k > 1$، لأن التصاميم المكتملة (فيها $k = v$) والتصاميم التي فيها $k = 1$ تكون عديمة الأهمية.

بناء تصميم (10,6,5,3,2)

يرغب الباحثون في مجال الصيدلة والأدوية باختبار ستة أنواع مختلفة من مسكنات الألم على مصابين بالشقيقة المزمنة. حدد الباحثون 10 أشخاص لدراستهم. إذ يرغبون باختبار الأدوية الستة جميعها على كل شخص لكن هذا غير ممكن لأسباب طبية وعملية. بدلاً من ذلك، سيختبرون 3 أدوية مختلفة على كل شخص وسيصرّون على اختبار كل تنويع ممكن من الأزواج من الأدوية على أشخاص مختلفين. إذا وُجد أن أحد الأدوية أكثر فعالية من الآخر، فلابدّ أن ينعكس ذلك على التجارب المستقلة لكل شخصين.

تتكون الأدوية من تنويعات عددها $v = 6$. ترتبط كل مجموعة فرعية بمجموعة من 3 أدوية يمكن تطبيقها على أحد الأشخاص، إذن $k = 3$ و$b = 10$. إضافة لذلك، يجب أن يستخدم كل زوج من الأدوية معاً في $\lambda = 2$ مجموعة فرعية. تستدعي التجربة استخدام تصميم $(10,6, r,3,2)$. وبالتالي فإن كل تنويع يجب أن

يظهر في 5 مجموعات فرعية تحديداً، أي $r = 5$، ونحتاج إلى بناء تصميم (10,6,5,3,2). (سنرى لماذا $r = 5$ قريباً).

لتكن المجموعة $V := [6]$. يجب أن يظهر التنويع 1 في المجموعات الفرعية $r = 5$، لذا نضعها في B_1 حتى B_5. التنويعان 1 و2 يجب أن يظهرا معاً في $\lambda = 2$ مجموعة فرعية، لذا نضع التنويع 2 في B_1 وفي B_2. التنويع 2 يجب أن يظهر في خمس مجموعات فرعية، لذا نضعه في المجموعات الفرعية B_6 حتى B_8. أي تنويعات أخرى يمكن وضعها في B_1، لذا نختار وضع التنويع 3 في تلك المجموعة. تصميمنا المكتمل جزئياً يكون:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_i	1 ,2,3	1 ,2,?	1 ,?,?	1 ,?,?	1 ,?,?	2 ,?,?	2 ,?,?	2 ,?,?	?,?, ?	?,?, ?

للخطوة التالية، يجب أن يظهر التنويعان 1 و3 معاً في مجموعتين فرعيتين. وهما تظهران معاً في المجموعة الفرعية B_1، لذا يمكننا وضع التنويع 3 في B_3.

السؤال 271: هل يمكن أن يكتمل التصميم إذا اخترنا أن $B_1 = B_2 = \{1,2,3\}$؟ دعّم إجابتك. (يسمح باستخدام مجموعات فرعية متكررة في التصميم، فإذا لم يكن بالإمكان إكمال التصميم، فلن يكون هذا هو السبب).

التنويعان 2 و3 يجب أن يظهرا معاً في المجموعة الفرعية نفسها مرتين، إذن نضع التنويع 3 في B_6. يظهر التنويع 3 الآن مع التنويعين 1 و2 بعدد المرات المطلوب. يجب أن يظهر 5 مرات إجمالياً، لذا يجب أن نضعها في B_9 وB_{10}. لدينا الآن:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_i	1 ,2,3	1 ,2,?	1 ,3,?	1 ,?,?	1 ,?,?	2 ,3,?	2 ,?,?	2 ,?,?	3 ,?,?	3 ,?,?

من بين المجموعات الفرعية B_1 حتى B_5، يجب أن نضع التنويعات 4-6 بحيث تظهر كل من هذه التنويعات مع التنويع 1 مرتين تحديداً. من طرق عمل ذلك:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_i	1 ,2,3	1 ,2,4	1 ,3,5	1 ,4,6	1 ,5,6	2 ,3,?	2 ,?,?	2 ,?,?	3 ,?,?	3 ,?,?

وهذا يكمل الاعتبارات التي تتضمن التنويع 1. من بين المجموعات الفرعية B_6 حتى B_8، وهي المجموعات المتبقية التي تحتوي التنويع 2، مازال ينبغي ظهور التنويعات التالية:

الزوج	,21	,32	,42	,52	,62
عدد المجموعات الفرعية التي يجب أن يظهر فيها الزوج	0	0	1	2	2

وضع المجموعة الفرعية $B_6 = \{2,3,4\}$ يعني أن تكون $B_7 = B_8 = \{2,5,6\}$ وبالتالي يتسبب في ظهور التنويعين 5 و6 بالظهور معاً 3 مرات في التصميم. ومن ثم نحاول جعل $B_6 = \{2,3,5\}$، لكن أيضاً نجد أننا لا نستطيع إكمال التصميم.

السؤال 272: اشرح سبب عدم استطاعتنا اختيار $B_6 = \{2,3,5\}$ حتى الآن.

بوضع المجموعة الفرعية $B_6 = \{2,3,6\}$ يعني أن تكون $B_7 = \{2,4,5\}$ و$B_8 = \{2,5,6\}$. نحن على وشك الانتهاء

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_i	1 ,2,3	1 ,2,4	1 ,3,5	1 ,4,6	1 ,5,6	2 ,3,6	2 ,4,5	2 ,5,6	3 ,?,?	3 ,?,?

لم يظهر التنويع 3 حتى الآن في نفس المجموعة الفرعية مع التنويع 4، لذا يجب أن نضع 4 في كلٍ من المجموعتين الفرعيتين للحصول على:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_i	1 ,2,3	1 ,2,4	1 ,3,5	1 ,4,6	1 ,5,6	2 ,3,6	2 ,4,5	2 ,5,6	3 ,4,5	3 ,4,6

لابدّ من التحقق من أن هذا تصميم (10,6,5,3,2).

الشروط الأساسية الضرورية

تصبح المناهج العشوائية التي نستخدمها لبناء التصاميم (7,7,3,31) و(10,6,5,3,2) مربكة إذا أردنا بناء تصاميم أكبر. أيضاً، إذا لم يوجد التصميم، فإن إثبات ذلك باستخدام هذه المناهج يحتاج عناية وجهداً كبيرين.

قبل الرجوع إلى مناهج بناء التصاميم، نشتق شرطين أساسيين ضروريين للتصميم (b, v, r, k, λ).

المبرهنة 7.1.1: إذا وُجد التصميم (b, v, r, k, λ)، فإن $bk = vr$ و$r(k-1) = \lambda(v-1)$.

البرهان التوافقي: افترض وجود أي تصميم (b, v, r, k, λ).

لإثبات أن $bk = vr$ نطرح سؤالاً، كم عدد القوائم المكونة من عنصرين (B, x) الممكنة، حيث B مجموعة فرعية في التصميم وx تنويع يظهر في تلك المجموعة الفرعية؟

الإجابة 1: اختر مجموعة فرعية بطرق عددها b. كل مجموعة فرعية يكون حجمها k، إذن يوجد k طريقة لاختيار تنويع في تلك المجموعة الفرعية. باستخدام مبدأ الضرب، فإنه يوجد bk قائمة ثنائية العناصر.

الإجابة 2: اختر أولاً تنويعاً بـ v طريقة. يظهر كل تنويع في المجموعات الفرعية r، إذن يوجد r طريقة لاختيار مجموعة فرعية تتضمن ذلك التنويع. وعليه فإنه يوجد vr قائمة ثنائية العناصر.

لإثبات أن $r(k-1) = \lambda(v-1)$، نثبّت أولاً أي تنويع y ومن ثم نطرح السؤال، كم عدد القوائم المكونة من عنصرين (B, x) الممكنة، حيث $x, y \in B$ و$x \neq y$؟

الإجابة 1: بما أن التنويع y يظهر في المجموعات الفرعية r تحديداً، يوجد r طريقة لاختيار المجموعة الفرعية B. تتضمن تلك المجموعة $k-1$ تنويعاً غير y، إذن يوجد $k-1$ طريقة لاختيار التنويع x. يوجد عدد $r(k-1)$ من هذه القوائم الثنائية.

الإجابة 2: يوجد $v-1$ طريقة لاختيار التنويع x والذي يختلف عن y. يظهر هذان التنويعان معاً في λ مجموعة فرعية، إذن يوجد λ طريقة لاختيار المجموعة الفرعية B. يوجد $\lambda(v-1)$ من هذه القوائم الثنائية. ■

السؤال 273: جميع التصاميم ذو المجموعات الفرعية المتوازنة غير المكتملة التي صادفتنا إلى الآن فيها $\lambda < r$. استخدم المبرهنة لإثبات أنها صحيحة بشكلٍ عام.

إذا طبقّنا المبرهنة على التصميم $(10,6,r,3,2)$ من المثال السابق، يمكننا استخدام الشرط $bk = vr$ لكتابة $30 = 6r$ والتي تتضمن $r = 5$. بشكلٍ عام، تظهر المبرهنة أن القيم من أيّ من الموسطات الثلاثة في التصميم (b,v,r,k,λ) تحدّد القيم للنوعين الآخرين. لهذا السبب، غالباً ما يسمى التصميم (b,v,r,k,λ) بـ (v,k,λ) ببساطة. سنستخدم كلا الترميزين تبادلياً.

إضافة لتحديد الموسطات المفقودة، يمكننا استخدام المبرهنة أيضاً لبرهنة أن بعض التصاميم غير ممكنة. فيما يلي بعض الأمثلة.

مثال: هل توجد مثل هذه التصاميم؟

ما هي الخلاصة التي يمكن الخروج بها من المبرهنة 7.1.1 عن وجود التصاميم ذات الموسطات التالية؟

(أ) $(111,111,11,11,1)$

$\Leftarrow$ التصميم $(111,111,11,11,1)$ يحقق $bk = vr$ و $r(k-1) = \lambda(v-1)$. المبرهنة لا تحكم وجود مثل هذا التصميم، لكنها تساعدنا في بناء واحد.

(ب) $(4,4,3,3,2)$

$\Leftarrow$ التصميم $(4,4,3,3,2)$ يحقق $bk = vr$ و $r(k-1) = \lambda(v-1)$ أيضاً.

إذن مرة أخرى، المبرهنة لا تحكم وجود مثل هذا التصميم، من السهل بناء هكذا تصميم. اجعل $V = [4]$ و $\mathcal{B}$ تتكون من مجموعات فرعية ثلاثية من V.

السؤال 274: ابنِ تصميماً بالمواصفات $(v,k,\lambda) = (5,3,3)$ باستخدام طريقة البناء نفسها.

(جـ) $(v,k,\lambda) = (11,3,2)$

$\Leftarrow$ إذا كان التصميم $(b,11,r,3,2)$ ممكناً، فإنه سيحقق $3b = 11r$ و $2r = 20$. وهذا يعني أن $r = 10$ وبالتالي فإن $3b = 110$. لكن هذا يعني أن b عدداً ليس صحيحاً، إذن مثل هذا التصميم غير ممكن.

(د) جدول مباريات بطولة الكرة الطائرة الذي أوردناه في بداية هذا القسم، لكن هنا نفترض أن عدد الأفرقة v.

$\Leftarrow$ هذا يقلل من تحديد قيم v التي يوجد لها التصميم $(b,v,r,3,1)$. نحتاج $2r = v - 1$ أو $r = (v-1)/2$. كما يلزمنا $3b = v(v-1)/2$ أو $b = v(v-1)/6$. وعليه فإنه إن وجد مثل هذا التصميم بحيث يتضمن الأفرقة v، فلابدّ أن تكون v عدداً فردياً و$v(v-1)$ يقسم على 6. لا تعطي المبرهنة أي نفاذ بصيرة على ماذا كانت هذه الشروط كافية أم لا.

منهجا بناء أساسيان

تعتبر معادلات المبرهنة 7.1.1 شروطاً مهمة لوجود التصميم. لسوء الحظ، فهي غير كافية، ومن الأمثلة على ذلك الجزء (أ) من المثال الأخير. استخدم عام 1988، عدد من الباحثين الحاسوب الفائق (CRAY) لإقرار أن التصميم (111,111,11,11,1) ممكن. طالع لام (Lam) (1991) لقراءة القصة. من ناحية أخرى، قد تكون شروط المبرهنة كافية، كما هو الحال في الجزء (د) من المثال. يسمى التصميم $(b,v,r,3,1)$ **بنظام شتاينر الثلاثي** (Steiner Triple System). تداول هذا الاسم على الرغم من أن كيركمان (Kirkman) (1847) أعطى نفس الشروط لوجود التصميم قبل شتاينر الذي نشر بحثه عام 1853، غير مدرك لوجود بحث

كيركمان، حيث أدرك أن الشروط الضرورية كانت كافية. سنتناول نظم شتاينر الثلاثية في القسم 3.7.

سنخصص ما تبقى من هذا القسم لثلاثة مناهج للبناء. في القسمين التاليين، سنعود لدراسة الشروط الضرورية.

المنهج الأول: تكرار الأقسام

من التصميم (b, v, r, k, λ)، أنشئ تصميماً جديداً بإعادة كتابة كل مجموعة فرعية عدد t من المرات. ستكون النتيجة التصميم $(tb, tv, tr, tk, t\lambda)$. على سبيل المثال، نحن نعلم أن التصميم (21,7,9,3,3) ممكن لأنه يمكننا ببساطة إضافة ثلاث نسخ من كل مجموعة فرعية من التصميم (7,7,3,3,1).

السؤال 275: اشرح كيفية بناء التصميم (170,6,85,3,34).

المنهج 2: إيجاد تصميم متمّم

من الطرق الطبيعية لبناء تصميم جديد من تصميم قائم، أن يتم أخذ متممة كل مجموعة فرعية نسبةً إلى مجموعة من التنويعات. ويعرف هذا بالتصميم المتمم. إذا كان $\mathcal{D}$ فإن $\mathcal{D}^c$ يرمز للتصميم المتمم.

فيما يلي التصميم (7,7,3,3,1) والتصميم المتمم له:

i	1	2	3	4	5	6	7
B_i	,2,31	,4,51	,6,71	,4,62	,5,72	,4,73	,5,63

i	1	2	3	4	5	6	7
B_i^c	4 ,5,6,7	2 ,3,6,7	2 ,3,4,5	1 ,3,5,7	1 ,3,4,6	1 ,2,5,6	1 ,2,4,7

لاحظ أن التصميم المتمم هو **تصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل** بالموسطات (7,7,4,4,2).

السؤال 276: جد التصميم المتمم للتصميم (10,6,5,3,2) المعطى مسبقاً. هل هو تصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل؟ ما هي موسطاته؟

ما هي العلاقة بين موسطات التصميم وتصميمه المتمم؟ افترض أن $\mathcal{D}$ هو تصميم (b, v, r, k, λ). سيدرك المرء بسرعة أن $\mathcal{D}^c$ هو لتصميم $(b, v, b-r, v-k, ?)$؟

السؤال 277: **برّر هذه الموسطات الأربعة الأولى. أيضاً، لماذا يجب أن لا نأخذ في الاعتبار إيجاد تصميم متمم للتصميم المكتمل؟**

هل يظهر كل زوج من التنويعات المتميزة معاً في نفس عدد المجموعات الفرعية من التصميم المتمم؟ الإجابة هي نعم، وإثبات ذلك يتطلب تطبيقاً سريعاً لمبدأ الاحتواء – الاستثناء. لاحظ أولاً أن التنويعين

i و j

يظهران معاً في المجموعة الفرعية من التصميم المتمم $\mathcal{D}^c$ إذا، وفقط إذا، لم يظهر أي منهما في المجموعة الفرعية المقابلة في $\mathcal{D}$. عدد المجموعات الفرعية في $\mathcal{D}$ التي لا يظهر فيها أي من التنويعين i أو j يساوي:

$$b - r - r + \lambda = b - 2r + \lambda$$

لأنه يوجد b من المجموعات الفرعية الإجمالية، و r من المجموعات الفرعية التي تحتوي على التنويع i و r من المجموعات الفرعية التي تحتوي على التنويع j و λ من المجموعات الفرعية التي تحتوي على التنويعين i و j . وهذا يبرهن العبارة الأولى في المبرهنة التالية. أما العبارة الثانية في المبرهنة فتتبع بملاحظة أن $(\mathcal{D}^c)^c =$ $\mathcal{D}$.

المبرهنة 7.1.2: إذا أعطي التصميم (b, v, r, k, λ)، والتصميم المتمم $(b, v, b - r, v - k, b - 2r + \lambda$. إضافة لذلك، سيكون هناك تصميم

(b,v,r,k,λ) إذا وفقط إذا كان وُجد التصميم $(b,v,b-r,v-k,b-2r+\lambda)$

بناء تصاميم دورية

تتضمن آخر طريقة لبناء التصاميم في هذا القسم، تتضمن الحساب النمطي، وسيتضمن أول توضيح له هنا بناء تصميم منتظم ثلاثي، و13 تنويعاً. بدلاً من استخدام $V=[13]$ نستخدم $V=\{0,1,2,\dots,12\}$ وهي مجموعة بواقي النمط 13.

ابدأ بالمجموعات الفرعية الأساس {1,3,9} و{2,5,6}، ثم أضف بواقي النمط 13 إلى التنويعات في كل مجموعة فرعية أساس.

نفّذ هذا في الشكل 7.1، حيث تظهر المجموعات الفرعية الأساس أعلى كل عمود. الترميز $\{1,3,9\}\oplus 5$، على سبيل المثال، يعني إضافة 5 إلى كل عنصر في المجموعة {1,3,9} ثم اختصر النمط 13:

$$\{1,3,9\}\oplus 5=\{(1+5)\ mod\ 13,(3+5)\ mod\ 13,(9+5)\ mod\ 13\}$$
$$=\{6,8,1\}$$

ينتج عن هذا التصميم (26,13,6,3,1) (تحقق من ذلك!)

$$\begin{array}{ll}
B_1 = \{1,3,9\} \oplus 0 \;\; = \{1,3,9\} & B_{14} = \{2,5,6\} \oplus 0 \;\; = \{2,5,6\} \\
B_2 = \{1,3,9\} \oplus 1 \;\; = \{2,4,10\} & B_{15} = \{2,5,6\} \oplus 1 \;\; = \{3,6,7\} \\
B_3 = \{1,3,9\} \oplus 2 \;\; = \{3,5,11\} & B_{16} = \{2,5,6\} \oplus 2 \;\; = \{4,7,8\} \\
B_4 = \{1,3,9\} \oplus 3 \;\; = \{4,6,12\} & B_{17} = \{2,5,6\} \oplus 3 \;\; = \{5,8,9\} \\
B_5 = \{1,3,9\} \oplus 4 \;\; = \{5,7,0\} & B_{18} = \{2,5,6\} \oplus 4 \;\; = \{6,9,10\} \\
B_6 = \{1,3,9\} \oplus 5 \;\; = \{6,8,1\} & B_{19} = \{2,5,6\} \oplus 5 \;\; = \{7,10,11\} \\
B_7 = \{1,3,9\} \oplus 6 \;\; = \{7,9,2\} & B_{20} = \{2,5,6\} \oplus 6 \;\; = \{8,11,12\} \\
B_8 = \{1,3,9\} \oplus 7 \;\; = \{8,10,3\} & B_{21} = \{2,5,6\} \oplus 7 \;\; = \{9,12,0\} \\
B_9 = \{1,3,9\} \oplus 8 \;\; = \{9,11,4\} & B_{22} = \{2,5,6\} \oplus 8 \;\; = \{10,0,1\} \\
B_{10} = \{1,3,9\} \oplus 9 \;\; = \{10,12,5\} & B_{23} = \{2,5,6\} \oplus 9 \;\; = \{11,1,2\} \\
B_{11} = \{1,3,9\} \oplus 10 = \{11,0,6\} & B_{24} = \{2,5,6\} \oplus 10 = \{12,2,3\} \\
B_{12} = \{1,3,9\} \oplus 11 = \{12,1,7\} & B_{25} = \{2,5,6\} \oplus 11 = \{0,3,4\} \\
B_{13} = \{1,3,9\} \oplus 12 = \{0,2,8\} & B_{26} = \{2,5,6\} \oplus 12 = \{1,4,5\}
\end{array}$$

الشكل 7.1: تصميم دوري (26,13,6,3,1).

السؤال 278: لتكن $V = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ مجموعة بواقي النمط 7 ولنأخذ مجموعة فرعية أساس $\{0,1,3\}$. ابنِ تصميماً دورياً بسبع مجموعات فرعية بإيجاد $\{0,1,3\} \oplus i$ لكل عنصر $i \in V$. ما هي معايير التصميم الناتج؟

توصيف التصاميم الدورية

اتّضح أنه ليس كل خيار للمجموعات الفرعية الأساس ينتج تصميماً (b, v, r, k, λ) باستخدام المنهج الدوري. لماذا تنجح بعض المجموعات الفرعية الأساس ولا ينجح البعض الآخر؟

السؤال 279: أعد حلّ السؤال 278، لكن باستخدام المجموعة الفرعية الأساس {0,1,2}. لماذا لا يكون التصميم الناتج BIBD؟

لحسن الحظ، ثمة إجابة كاملة للسؤال عما إذا كانت مجموعة معطاة من المجموعات الفرعية تنتج تصميماً BIBD. المفتاح هنا هو الفروقات الزوجية بين العناصر في نفس المجموعة الفرعية الأساس.

بالنسبة إلى التصميم (26,13,6,3,1)، استخدمنا المجموعتين الفرعيتين الأساس {1,3,9} و{2,5,6}. انظر إلى الفروقات الزوجية في النمط 13 بين العناصر في نفس المجموعة الفرعية. في الجدول التالي، يبيّن النصف الأعلى الفروقات ضمن المجموعة الفرعية {1,3,9} في حين يبيّن النصف الثاني الفروقات ضمن المجموعة الفرعية {2,5,6}.

$1-3=-2\equiv 11$	$1-9=-8\equiv 5$	$3-9=-6\equiv 7$
$3-1=2\equiv 2$	$9-1=8\equiv 8$	$9-3=6\equiv 6$
$2-5=-3\equiv 10$	$2-6=-4\equiv 9$	$5-6=-1\equiv 12$
$5-2=3\equiv 3$	$6-2=4\equiv 4$	$6-5=1\equiv 1$

(لاحظ أننا نكتب $11\equiv 2-$، على سبيل المثال، كاختصار لـ $-2\equiv 11 (mod\ 13)$). لاحظ أن كل بواقي النمط 12 غير الصفرية تظهر مرة واحدة فقط في القائمة.

السؤال 280: للتصميم في السؤال 278، احسب الفروقات الزوجية بين المجموعة الفرعية {0,1,3}. هل يظهر باقٍ للنمط 7 غير صفري مرة واحدة فقط؟

تعطي المبرهنة التالية توصيفاً كاملاً للتصاميم الدورية من حيث المجموعات الفرعية الأساس.

المبرهنة 7.1.3: افترض أن $\mathcal{C}$ مجموعة من المجموعات الجزئية المكونة من k والمأخوذة من المجموعة المكونة من v عنصر $\{0,1,\dots,v-1\}$ من بواقي النمط v، حيث $2 \leq k \leq v$. إذن $\mathcal{C}$ تحتوي المجموعات الفرعية الأساس للتصميم الدوري (v,k,λ) إذا، وفقط إذا، كان الإجراء التالي ينتج قائمة تحتوي على جميع بواقي النمط v غير الصفرية λ مرة تحديداً:

لكل مجموعة فرعية $C = \{c_1,\dots,c_k\}$ من $\mathcal{C}$، احسب:

$$(c_i - c_j) \ mod \ v$$

لكل زوج مرتب $(c_i - c_j)$ للعناصر غير المتساوية من C.

يتضمن البرهان تطبيق خصائص الحساب النمطي ولنترك ذلك للتمرين 19. سنعطي الآن مثالاً آخر، لكن هذه المرة بـ $\lambda = 3$. لتكن $k = 7$ و$v = 15$، ولنأخذ المجموعة الفرعية الأساس {0,1,2,4,5,8,10} كمجموعة جزئية من بواقي النمط 15. تتضمن المجموعة الفرعية سبعة تنويعات، إذن يوجد 7×6=42 فرقاً زوجياً ينبغي حسابها. تظهر الفروقات في الشكل 7.2. تظهر كلّ من البواقي *1*,2,...,14 ثلاث مرات تحديداً وهذا يتوافق مع شروط المبرهنة. عند إيجاد التصميم، فإنه سيكون من نوع *BIBD* (*15*,15,7,7,3).

$0-1=-1\equiv 14$	$0-2=-2\equiv 13$	$0-4=-4\equiv 11$
$1-0=1\equiv 1$	$2-0=2\equiv 2$	$4-0=4\equiv 4$
$0-5=-5\equiv 10$	$0-8=-8\equiv 7$	$0-10=-10\equiv 5$
$5-0=5\equiv 5$	$8-0=8\equiv 8$	$10-0=10\equiv 10$
$1-2=-1\equiv 14$	$1-4=-3\equiv 12$	$1-5=-4\equiv 11$
$2-1=1\equiv 1$	$4-1=3\equiv 3$	$5-1=4\equiv 4$
$1-8=-7\equiv 8$	$1-10=-9\equiv 6$	$2-4=-2\equiv 13$
$8-1=7\equiv 7$	$10-1=9\equiv 9$	$4-2=2\equiv 2$
$2-5=-3\equiv 12$	$2-8=-6\equiv 9$	$2-10=-8\equiv 7$
$5-2=3\equiv 3$	$8-2=6\equiv 6$	$10-2=8\equiv 8$
$4-5=-1\equiv 14$	$4-8=-4\equiv 11$	$4-10=-6\equiv 9$
$5-4=1\equiv 1$	$8-4=4\equiv 4$	$10-4=6\equiv 6$
$5-8=-3\equiv 12$	$5-10=-5\equiv 10$	$8-10=-2\equiv 13$
$8-5=3\equiv 3$	$10-5=5\equiv 5$	$10-8=2\equiv 2$

الشكل 7.2: الفوارق الزوجية بين عناصر المجموعة الفرعية $\{0,1,2,4,5,8,10\}$.

السؤال 281: ابنِ التصميم

ليست كل التصاميم دورية، لكن هذه الطريقة (وتعميمها) مُنتِجة عند إنتاج التصاميم. راجع التمرين 17 للاطلاع على بعض الشروط الأساسية الضرورية للتصاميم الدورية.

الملخص

يتضمن التصميم (b, v, r, k, λ) مجموعة من التنويعات والمجموعات الفرعية المتعددة. كل مجموعة فرعية هي مجموعة فرعية من التنويعات. فيما يلي معاني الموسطات:

المعنى	الموسط
عدد المجموعات الفرعية	b
عدد التنويعات	v
كل تنويع يظهر في r من المجموعات الفرعية تحديداً	r
كل مجموعة فرعية تحتوي k من التنويعات تحديداً	k
كل زوج من التنويعات يظهر معاً في λ من المجموعات الفرعية تحديداً.	λ

في التصميم ذو المجموعات الفرعية غير المكتمل المتوازن يكون $k < v$.

أي تصميم (b, v, r, k, λ)، إن وُجد، فلابدّ أن يحقق $bk = vr$ و$r(k-1) = \lambda(v-1)$. على كل حال، هذه الشروط غير كافية لوجود التصميم. تعاملنا مع مناهج بناء التصاميم من البداية (المناهج العشوائية ومنهج التصاميم الدوري) إضافة لتلك المستخدمة لبناء تصميم من تصميم آخر (تكرار الأجزاء الفرعية والتصميم المتمم).

التمارين

1. افترض أنك تعرف ثلاثة من خمسة عناصر في التصميم (b, v, r, k, λ). في كلٍ من الحالات التالية، اشتق معادلة للعناصر الأخرى.

(أ) b, v, r معلومة.

(ب) v, k, λ معلومة.

(ت) r, k, λ معلومة.

2. صف جميع التصاميم $(b, v, r, 2,1)$ الممكنة.

3. لتكن $n \geq 3$. وضّح كيفية بناء التصميم $(n, n, n-1, n-1, n-2)$.

4. برهن أن هناك تصميم (7,7,3,3,1) واحداً فقط لإعادة تسمية القمم. (ترتيب قائمة المجموعات الفرعية غير مهم).

5. لتكن $V = [n]$ ولنفترض أن $\mathcal{B}$ تتكون من جميع المجموعات الجزئية المكونة من k عنصر المأخوذة من V، حيث $1 < k < n$. حدّد ما إذا كان التصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل. إذا كان كذلك، أعطِ العناصر.

6. (نظرية المخطط) وضّح كيف يمكن اعتبار k_n وهو المخطط الكامل بعدد رؤوس n تصميماً. أعط العناصر. أيضاً وضّح سبب أن المخطط غير المكتمل ليس تصميماً.

7. اشرح توافيقياً، لماذا في أي تصميم (b, v, r, k, λ) يكون $b = \frac{\lambda\binom{v}{2}}{\binom{k}{2}}$.

8. لتكن $\mathcal{D}$ تصميماً غير مكتمل فيه تماثل-k وتوازن-λ . برهن أن $\mathcal{D}$ منتظم. (توجيه: راجع برهان المبرهنة 7.1.1).

9. جد أساساً للتصميم الدوري (10,5,4,2,1).

10. ابن تصميماً دورياً (11,5,5,2,11).

11. ابن تصميماً دورياً (18,9,8,4,3). (توجيه: استخدم مجموعتين فرعيتين أساسيتين).

12. ابن التصميم (14,8,7,3,3).

13. افترض أن $\mathcal{D}$ تصميم دوري للنمط v، و$\mathcal{C}$ تتضمن المجموعات الفرعية الأساس. جد مجموعة المجموعات الفرعية الأساس للتصميم المتمم $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ وبرهن صحة الحل.

14. برهن أنه في أي تصميم فإن $r \leq \frac{b+\lambda}{2}$.

15. لنفترض أنك ستشارك في سحب يانصيب باختيار مجموعة جزئية من ثلاثة أرقام من [14]. وأنك تربح جائزة إذا تطابق رقمان على الأقل في التذكرة الفائزة.

(أ) بيّن أنه من الممكن ضمان الربح بشراء 14 تذكرة (توجيه: استخدم التصميم (7,7,3,3,1)).

(ب) هل تعمل استراتيجية التناظر إذا كنت ستختار 3 أرقام من [21]؟ وضح ذلك.

يعرف هذا بـ "يانصيب ترانسلفانيا" ويبدو أن أصله غير معلوم.

16. بيّن أن المجموعة

$C = \{\{0,1,3\},\{2,6,7\},\{4,8,11\},\{5,10,12\}\}$ تحتوي على مجموعات فرعية أساس للتصميم الدوري 13. ابن التصميم وحدد عناصره.

17. (أ) اشرح سبب أن التصميم (10,6,5,3,2) لا يمكن أن يكون دورياً.

(ت) برهن أنه في التصميم الدوري، يوجد عدد صحيح c بحيث $b = cv, ck(k-1) = \lambda(v-1)$ و $r = ck$. ما أهمية العدد c في سياق التصميم؟

(جـ) هل يمكن أن يكون التصميم (305,61,20,4,1) دورياً؟

18. فيما يلي توضيح لكيفية بناء تصميم دوري باستخدام حساب النمط 2. لتكن V مجموعة الأعداد الثنائية المكونة من 4 خانات. باستخدام المجموعة الفرعية الأساسية

$$B_1 = \{0001,0010,0100,1000,0011,1100\}$$

ابن التصميم بإيجاد المجموعات الفرعية $B_1 \oplus \mathbf{v}$ لكل $\mathbf{v} \in V$. ما هي عناصر هذا التصميم؟

19. برهن المبرهنة 7.1.3.

ملاحظات سريعة

في التصاميم، وكما يحدث أحياناً في بعض المفاهيم الرياضية، ظهر الجانب الترفيهي قبل التطبيق العملي. عام 1847، نشر كيركمان حلاً للمسألة والتي تعرف الآن بـ

مسألة طالبات المدرسة لكيركمان (Kirkman's Schoolgirls Problem): إذا كان يتوجب على 15 طالبة السير مشياً في خمسة صفوف يتكون كل منها من ثلاث طالبات مرة واحدة يومياً لمدة أسبوع، هل من الممكن أن تكون كل طالبة في نفس الصف مع طالبة أخرى مرة واحدة تحديداً؟

تستدعي هذه المسألة استخدام التصميم (15,3,1) ذي خاصية إضافية وهي: إمكانية الحل (Resolvability). في التصميم القابل للحل، يمكن ترتيب المجموعات الفرعية في مجاميع بحيث تتجزأ كل مجموعة إلى مجموعة من التنويعات. كان تفسير فيشر (Fisher) المقنع الذي قدمه في العقدين 1930 و1940 كيف يمكن أن تستخدم التصاميم في التجارب الإحصائية. من الجدير بالذكر أن العديد من المصطلحات التي

أوردها مازالت مستخدمة حتى الآن. أما بوز (Bose) وهو رياضي هندي، فقد طوّر العديد من طرق بناء التصاميم في بحث يعود لعام 1939، منها التصميم الدوري.

2.7 مصفوفة الحدوث والتصاميم المتماثلة

أي تصميم (b, v, r, k, λ) يجب أن يحقق $bk = vr$ و $r(k-1) = \lambda(v-1)$. إضافة لذلك، أي تصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل يجب أن يكون فيه $k < v$ وبناء على ذلك يكون $\lambda < r$. سنخصص هذا القسم لدراسة التصاميم المتماثلة (Symmetric Designs) وهي تصاميم يتساوى فيها عدد التنويعات والمجموعات الفرعية. سنبدأ بدراسة مصفوفة الحدوث (The Incidence Matrix) وهي أداة مهمة في نظرية التصميم.

مصفوفة الحدوث للتصميم

تعتبر مصفوفة الحدوث من الطرق الأخرى لتمثيل تصميم ما. مصفوفة الحدوث للتصميم $(V, \mathcal{B})$ هي المصفوفة A ورتبتها $v \times b$ حيث مدخلها (i, j) يساوي

(7.1)

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان التنوع } i \text{ في المجموعة الفرعية } B_j \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

ثمة ترتيب مختار مسبقاً مضمّناً في هذا التعريف للتنويعات والمجموعات الفرعية. على سبيل المثال، مصفوفة الحدوث للتصميم (7,3,3,17,) بالترميز التالي:

i	1	2	3	4	5	6	7
B_i	,2,31	,4,51	,6,71	,4,62	,5,72	,4,73	,5,63

هي المصفوفة ذات الرتبة 7×7

$$A_1 := \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

الصفوف والأعمدة مرمّزة بالترتيب المختار للتنويعات والمجموعات الفرعية. يمكن استخدام أي ترتيب آخر لأن المتطلب الوحيد هو أن تنطبق المعادلة (7.1). كمثال آخر، مصفوفة الحدوث للتصميم (5,6,3,310,) الذي يتكون من المجموعات الجزئية الثلاثية العناصر من [5]، تحديداً:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_i	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3

	,2,3	,2,4	,2,5	,3,4	,3,5	,4,5	,3,4	,3,5	,4,5	,4,5

هي المصفوفة ذات الرتبة 10×5.

$$A_2 := \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} B_1 \; B_2 \; B_3 \; B_4 \; B_5 \; B_6 \; B_7 \; B_8 \; B_9 \; B_{10} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

السؤال 282: كم عدد الصفوف والأعمدة التي تتضمنها مصفوفة الحدوث للتصميم (28,4,1)؟

خاصيتان لمصفوفة الحدوث

تقودنا مصفوفة الحدوث إلى مبرهنات مهمة في نظرية التصميم. لنمهّد الطريق لهذا العمل بنتيجتين تمهيديتين.

لتوقّع النتيجة الأولى، اختبر حاصل ضرب المصفوفتين التاليتين ومن مصفوفات الحدوث للتصميمين (7,3,3,17,) و(5,6,3,310,) اللتين وردتا معنا سابقاً:

$$A_1 A_1^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 A_2^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

أمرٌ ما يحدث هنا: المدخلات القطرية تساوي r والمدخلات الأخرى تساوي λ.

إن تعريف ضرب المصفوفة يوضّح هذا. إذا كانت A مصفوفة الحدوث للتصميم (b, v, r, k, λ)، فإن A تساوي $v \times b$ وحاصل الضرب AA^T يساوي $v \times v$. أي مدخل قطري في AA^T يساوي

$(AA^T)_{ii} =$ (الصف ذو الترتيب i في A) . (العمود ذو الترتيب i في A^T)

$=$ (الصف ذو الترتيب i في A) . (الصف ذو الترتيب i في A)

$=$ عدد الواحدات في الصف i في A

$=$ عدد المجموعات الفرعية يظهر فيها التنويع i

$$= r$$

أي مدخل لا يقع على القطر في AA^T يساوي (افترض أن $i \neq j$)

$(AA^T)_{ij} =$ (الصف ذو الترتيب i في A) . (العمود ذو الترتيب j في A^T)

$=$ (الصف ذو الترتيب i في A) . (الصف ذو الترتيب j في A)

$=$ عدد الأعمدة في A والتي يحتوي فيها الصف i والصف j على 1

$=$ عدد المجموعات الفرعية التي يظهر فيها التنويعان i و j معاً

$$= \lambda$$

إذن المصفوفة AA^T تتضمن r على القطر و λ خارجه.

السؤال 283: إذا كانت A_3 مصفوفة الحدوث للتصميم (4,128,)، إذن ماذا يكون حاصل ضرب $A_3A_3^T$؟

ثمة طريقة مفيدة لكتابة حاصل ضرب مصفوفة الحدوث عندما يكون منقولها عبارة عن مجموع المصفوفات I وJ، حيث I مصفوفة الوحدة وJ مصفوفة كل مدخلاتها 1، كل منهما ذات حجم ملائم:

$$AA^T = \begin{pmatrix} r & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & r \end{pmatrix} = (r-\lambda)I + \lambda J$$

تتضمن النتيجة الثانية التي نرغب في إثباتها محدّد المصفوفة AA^T. سنحسب المحدد في حالة خاصة وهي $v = 4$ وذلك لأن الحالة العامة تناظرية بالكامل. عندما $v = 4$، فإن

$$AA^T = \begin{pmatrix} r & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & r \end{pmatrix}$$

تذكّر حقيقتين أساسيتين عن محدد المصفوفة: (1) يبقى محدد المصفوفة من دون تغيير إذا استخدمنا عملية "إضافة العديد من صف/عمود غير الصفري إلى صف/عمود آخر"، و(2) محدد المصفوفة المثلثة يساوي حاصل ضرب المدخلات القطرية.

لحساب محدد المصفوفة، ابدأ باستبدال الصف i بالصف i ناقص الصف 1، لـ $i = 2,3,4$ فتحصل على

$$\det AA^T = \begin{vmatrix} r & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda - r & r - \lambda & 0 & 0 \\ \lambda - r & 0 & r - \lambda & 0 \\ \lambda - r & 0 & 0 & r - \lambda \end{vmatrix}$$

للحصول على الصورة المثلثة استبدل العمود 1 بالعمود i إضافة للعمود 1، لـ $i = 2,3,4$:

$$\det AA^T = \begin{vmatrix} r + 3\lambda & \lambda & \lambda & \lambda \\ 0 & r - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r - \lambda \end{vmatrix} = (r + 3\lambda)(r - \lambda)^3$$

المتباينة الأخيرة تنطبق لأن المصفوفة أصبحت الآن ثلاثية (علوية).

السؤال 284: بالنسبة إلى التصميم في السؤال 283، جد محدد $A_3A_3^T$

الصيغة العامة تتضمن التنويعات v، والمبرهنة التالية تنص على نتيجتين تتضمنان مصفوفة حدوث.

المبرهنة 7.2.1: إذا كانت مصفوفة الحدوث للتصميم (b, v, r, k, λ)، فإن:

$$AA^T = (r - \lambda)I + \lambda J$$

ومحدد AA^T يساوي $[r + (v - 1)\lambda](r - \lambda)^{v-1}$

السؤال 285: بيّن سبب كون محدد AA^T يساوي $rk(r - \lambda)^{v-1}$ أيضاً.

التصاميم المتماثلة ومبرهنة بروك – رايزر - تشولا (Bruck-Ryser-Chowla)

يكون التصميم متماثلاً إذا كان عدد المجموعات الفرعية مساوياً لعدد التنويعات $(b = v)$. تنطبق الصيغة $bk = vr$ بحيث إن كل تصميم (b, v, r, k, λ) فيه $b = v$ يكون فيه $r = k$، وعليه يكون التصميم (v, v, k, k, λ). التصميم المألوف (7,3,3,1,7,) متماثلاً.

من أكثر النتائج كفاءة في نظرية التصميم مبرهنة بروك – رايزر - تشولا الخاصة بالتصاميم المتماثلة. وتوفّر شرطاً ضرورياً لوجود التصميم المتماثل. بعد إعطاء برهان جزئي، سنكتشف بعض النتائج.

المبرهنة 7.2.2 (بروك – رايزر – تشولا): إذا كان التصميم (v, k, λ) المتماثل قائماً، فإن

- إذا كان v عدداً زوجياً، فإن $k - \lambda$ مربع كامل
- إذا كان v عدداً فردياً، فإن المعادلة

$$x^2 = (k - \lambda)y^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} \lambda z^2$$

سيكون حلاً غير بسيط في الأعداد الصحيحة x, y, z.

برهان جزئي: نبرهن المبرهنة فقط في حال كون v عدد زوجي، بما أن الحالة الأخرى تتطلب برهاناً معقداً نسبياً.

لنفترض أن لدينا التصميم المتماثل (v, k, λ) حيث v عدد زوجي ويوجد مصفوفة حدوث. من المبرهنة 7.2.1 والسؤال المتعلق بها ونجد أن محدد AA^T يساوي $rk(r - \lambda)^{v-1}$.

بما أن التصميم تناظري، فإن المصفوفة A تكون مصفوفة مربعة، وعليه يكون محدد AA^T يساوي

$$\text{محدد } AA^T = (\text{محدد } A)(\text{محدد } A^T) = (\text{محدد } A)^2$$

إضافة لذلك، $r = k$ في التصميم المتماثل. بتطبيق هذا على المعادلة أعلاه نجد

$$\left(\text{محدد} A\right)^2 = k^2(k - \lambda)^{v-1}$$

الطرف الأيسر مربع كامل وكذلك الطرف الأيمن. بما أن k^2 مربع كامل فإن $(k-\lambda)^{v-1}$ مربع كامل أيضاً. لكن v عدد زوجي، و$v-1$ عدد فردي، وعليه يكون $k-\lambda$ مربع كامل.

مثال: هل توجد هذه التصاميم؟

ما هو الاستنتاج الذي يمكن الخروج به من مبرهنة بروك – رايزر – تشولا عن وجود التصاميم حسب العناصر التالية؟

(أ) (111,111,11,11,1)

⇐ افترض أن التصميم (111,111,11,11,1) موجود. بما أن عدد التنويعات فردي، فإن مبرهنة بروك – رايزر – تشولا تتضمن أن هناك حلاً لـ

$$x^2 = (11-1)y^2 + (-1)^{\frac{111-1}{2}} \cdot 1 \cdot z^2$$

أو $x^2 = 10y^2 - z^2$. يوجد $(x,y,z) = (3,1,1)$. لا تتيح لنا المبرهنة الاستنتاج ما إذا كان مثل هذا التصميم موجوداً أم لا. (كما ذكر في القسم 7.1، مثل هذا التصميم غير موجود).

(ب) (22,22,7,7,2)

⇐ افترض أن التصميم (22,22,7,7,2) موجود. بما أن v عدد زوجي، فإن مبرهنة بروك – رايزر – تشولا تتضمن أن $k-\lambda = 7-2 = 5$ مربع كامل. وفي

هذا تناقض، إذن لا يوجد مثل هذا التصميم. (من الجدير بالملاحظة أن $bk = vr$ و$r(k-1) = \lambda(v-1)$، إذن هنا الشروط الأساسية الضرورية ليس بضرورة تعني أن التصميم غير ممكن).

السؤال 286: ماذا الذي تتضمنه مبرهنة بروك – رايزر - تشولا عن وجود التصميم (,6,216)؟

مثال: هل هذا التصميم موجود؟

هل يوجد التصميم (43,43,7,7,1)؟

افترض أنه موجود. في هذه الحالة تتضمن المبرهنة وجود الأعداد الصحيحة x, y, z، وأنها كلها ليست أصفاراً، حيث $x^2 = 6y^2 - z^2$. ومنه نجد أن $x^2 + z^2$ لابدّ أن يكون عدداً زوجياً. وهذا يعني بالضرورة أن تكون كل من x^2 وz^2 عددين زوجيين، وبالتالي أيضاً كلا العددين x وz عددين زوجيين أو فرديين.

إذا كان كلا العددين x وz عددين زوجيين أو فرديين، فإن $x = 2k$ و$z = 2l$ لبعض الأعداد الصحيحة k وl. وهذا يتضمن أن $(2k)^2 + (2l)^2 = 6y^2$ أو $2k^2 + 2l^2 = 3y^2$. إذن $3y^2$ هو عدد زوجي ما يعني بالضرورة أن يكون y عدداً زوجياً أيضاً. الآن الأعداد x, y, z جميعها أعداد زوجية، لكن هذا تناقض لأن ليس لها قاسم مشترك واحد.

وعليه فإن x و z كليهما عددان زوجيان. اكتب $x = 2m + 1$ و $y = 2n + 1$ لبعض الأعداد الصحيحة m و n. المعادلة $x^2 + z^2 = 6y^2$ تصبح $(2m + 1)^2 = (2n + 1)^2 = 6y^2$ أو

$$2(m^2 + m + n^2 + n) + 1 = 3y^2$$

وهذا يضمن أن y عدد فردي، إذن $y = 2p + 1$ لبعض الأعداد الصحيحة p. بالتعويض نحصل على المعادلة

$$m(m + 1) + n(n + 1) = 6p^2 + 6p + 1$$

وهذا أيضاً تناقض لأن طرف المعادلة الأيسر زوجي والطرف الأيمن فردي.

السؤال 287: املأ التفاصيل الناقصة (جبرياً ومنطقياً) في البرهان السابق.

هذا الأمر يغطي كل الحالات. لا يوجد حل غير تافه لـ $x^2 = 6y^2 - z^2$ وعليه فإن التصميم (43,7,7,143,) غير موجود.

v	k	λ	العناصر	هل يوجد؟	السبب
7	3	1	(7,7,3,3,1)	نعم	القسم 7.1
7	4	1	(7,7,4,4,2)	نعم	متمم لـ (7,7,3,3,1)

دوري	نعم	(13,13,4,4,1)	1	4	13
التمرين 10، القسم 7.1	نعم	(11,11,5,5,2)	2	5	11
دوري	نعم	(21,21,5,5,1)	1	5	21
متمم لـ (11,11,5,5,2)	نعم	(11,11,6,6,3)	3	6	11
التمرين 18، القسم 7.1	نعم	(16,16,6,6,2)	2	6	16
دوري	نعم	(31,31,6,6,1)	1	6	31
القسم 7.1	نعم	(15,15,7,7,3)	3	7	15
مبرهنة بروك – رايزر – تشولا في هذا القسم	لا	(22,22,7,7,2)	2	7	22
مبرهنة بروك – رايزر – تشولا في هذا القسم	لا	(43,43,7,7,1)	1	7	43
متمم لـ (15,15,7,7,3)	نعم	(15,15,8,8,4)	4	8	15

29	8	2	(29,29,8,8,2)	لا	مبرهنة بروك – رايزر – تشولا (التمرين 2)
57	8	1	(57,57,8,8,1)	نعم	دوري
13	9	6	(13,13,9,9,6)	نعم	متمم لـ (13,13,4,4,1)
19	9	4	(19,19,9,9,4)	نعم	دوري
25	9	3	(25,25,9,9,3)	نعم	طالع الملاحظات السريعة
37	9	2	(37,37,9,9,2)	نعم	دوري
73	9	1	(73,73,9,9,1)	نعم	دوري

الجدول 7.1: جميع التصاميم المتماثلة غير التافهة لـ $3 \leq k \leq 9$.

التصاميم المتماثلة بـ $3 \leq k \leq 9$

من الممتع التحقق من إمكانية وجود تصاميم متماثلة لمجموعات فرعية صغيرة الحجم نسبياً. يلخص الجدول 7.1 هذه الاحتمالات لـ $3 \leq k \leq 9$. لاحظ أن

تصميم (v, v, k, k, λ) المتماثل فيه $\lambda = \frac{k(k-1)}{v-1}$، إذن اختيار v و k أوتوماتيكياً يحدد قيمة λ. وهكذا فإنه كل قيمة من قيم k التي تحقق $3 \le k \le 9$، يعطينا الجدول قيم v التي تعطي عدداً صحيحاً لـ $\frac{k(k-1)}{v-1}$. الاستثناء الوحيد هو عندما $v = k + 1$. في هذه الحالة يصبح التصميم $(k + 1, k + 1, k, k, k - 1)$ وهو تصميم سهل البناء. راجع التمرين 3 من القسم 7.1.

على سبيل المثال، عندما يكون حجم المجموعة الفرعية $k = 8$، فإن القيم الوحيدة لـ v (بافتراض أن $v \ge 8$ التي يكون لها $\lambda = \frac{8(8-1)}{v-1} = \frac{8(8-1)}{v-1} = \frac{56}{v-1}$ عدد صحيح هي $v = 9,15,29,57$. بما أن التصميم (9,9,8,8,7) ممكن ببساطة، فإننا ندرج قيم v الثلاث المرتبطة به وهي $v = 15,29,57$.

السؤال 288: عندما $k = 10$، ما هي قيم v التي يجب أن نأخذها في الاعتبار؟ ما هي قيم λ المرتبطة؟

هذا وقد عمل العديد من الباحثين على حل سؤال وجود كلٍ من هذه التصاميم. إذا حددنا سؤال الوجود لتصميم محدد مما ورد في هذا الكتاب، فإن الجدول سيعطينا مرجعيته. الكلمة دوري (Cyclic) تشير إلى أنه يمكن بناء التصميم من خلال منهجية التصاميم الدورية التي قدمناها في القسم 7.1.

التصميم المتبقي والتصميم المشتق

سنستكشف الآن منهجي بناء يمكن تطبيقهما على التصاميم المتماثلة. كل منهج يبني تصميماً غير متماثل من تصميم آخر متماثل، وبالتالي يضيف دعماً لدراسة التصاميم المتماثلة. أولاً، يجب أن نفهم خاصية التصاميم المتماثلة التي تبرر هذه المناهج.

التصاميم المتماثلة مترابطة

لاحظ أنه في التصميم (7,7,3,3,1)

$$\{1,2,3\} \quad \{1,4,5\} \quad \{1,6,7\} \quad \{2,4,6\} \quad \{2,5,7\} \quad \{3,4,7\} \quad \{3,5,6\}$$

وفي التصميم (15,15,7,7,3) الذي بنيته في السؤال 281 في الصفحة 279، تحديداً

(7.2)

$$\begin{array}{lll}
\{0,1,2,4,5,8,10\} & \{5,6,7,9,10,13,0\} & \{10,11,12,14,0,3,5\} \\
\{1,2,3,5,6,9,11\} & \{6,7,8,10,11,14,1\} & \{11,12,13,0,1,4,6\} \\
\{2,3,4,6,7,10,12\} & \{7,8,9,11,12,0,2\} & \{12,13,14,1,2,5,7\} \\
\{3,4,5,7,8,11,13\} & \{8,9,10,12,13,1,3\} & \{13,14,0,2,3,6,8\} \\
\{4,5,6,8,9,12,14\} & \{9,10,11,13,14,2,4\} & \{14,0,1,3,4,7,9\},
\end{array}$$

أي زوج من المجموعات الفرعية غير المتساوية يشترك في التنويعات λ تحديداً. وهذا يتطلب التحقق من الزوج $\binom{7}{2} = 21$ في التصميم الأول والزوج $\binom{15}{2} = 105$ في التصميم الثاني.

بشكلٍ عام، يكون التصميم ترابط_l إذا أعطي أن $|B_i \cap B_j| = l$ لجميع المجموعات الفرعية B_i وB_j حيث $i \neq j$. تحدث الخاصية الملاحظة في المثالين في الفقرة السابقة بشكلٍ عام. البرهان الذي طُلب في التمرين 12 يعمل مع مصفوفة الحدوث.

المبرهنة 7.2.3: إذا كان التصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل متماثلاً، فإنه يكون مترابطاً. أي أنه بإعطاء التصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل (v, k, λ) متماثل، فإنه يكون لكل زوج من المجموعات الفرعية غير المتساوية نفس التنويعات المشتركة λ.

هذه المبرهنة صحيحة في حالة التصميم المكتمل.

التصميم المتبقي

بإعطاء التصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل متماثل، يمكننا بناء تصميم متبقٍ (Residual Design) من خلال (1) اختيار أي مجموعة فرعية B_0؛ (2) حذف B_0؛ (3) حذف التنويعات في B_0 من المجموعات الفرعية الباقية.

على سبيل المثال، اختيار المجموعة الفرعية $B_0 \coloneqq \{9,10,11,13,14,2,4\}$ في التصميم (15,15,7,7,3) الموضّح في (7.2) يُنتِج تصميماً متبقياً يحتوي المجموعات الفرعية التالية:

{0, 1, 5, 8}	{5, 6, 7, 0}	{12, 0, 3, 5}
{1, 3, 5, 6}	{6, 7, 8, 1}	{12, 0, 1, 6}
{3, 6, 7, 12}	{7, 8, 12, 0}	{12, 1, 5, 7}
{3, 5, 7, 8}	{8, 12, 1, 3}	{0, 3, 6, 8}
{5, 6, 8, 12}		{0, 1, 3, 7}

وهو تصميم (14, 8,7,4,3).

السؤال 289: جد التصميم المتبقي الذي ينتج عن اختيار $B_0 \coloneqq \{1,6,7\}$ في التصميم (7,3,3,17,). ثم طبّق الأمر نفسه لكن باختيار $B_0 \coloneqq \{3,4,7\}$. فسّر لماذا لا يكون أي تصميمين متبقيين بالضرورة متشابهين بغض النظر عن كيف نختار B_0.

بشكلٍ عام، إذا بدأنا بالتصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل (v, k, λ) متماثل فإن التصميم المتبقي هو التصميم $(v-1, v-k, k, k-\lambda, \lambda)$. لتبرير هذه الموسطات، افترض أننا نحذف المجموعة الفرعية B_0. هذا سيترك لنا المجموعات الفرعية $v-1$. عندما نحذف التنويعات k في B_0 من المجموعات الفرعية المتبقية، سيتبقى التنويعات $v-k$. بما أن التصميم مرتبط_λ، فإن كل مجموعة فرعية تتضمن تنويعات λ مشتركة مع B_0، إذن يحتوي التصميم المتبقي على مجموعات

فرعية حجمها $k - \lambda$. أخيراً، التصميم المتبقي يكون منتظماً على _k ومتوازناً _λ لأن هذه الخصائص متوارثة من التصميم المتماثل الأصلي.

التصميم المشتق

بإعطاء التصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل متماثل، يمكننا بناء تصميم مشتق (Derived Design) من خلال (1) اختيار أي مجموعة فرعية B_0؛ (2) حذف B_0؛ (3) استبدال المجموعة الفرعية المتبقية بنقطة تقاطعها مع B_0.

على سبيل المثال، اختيار المجموعة الفرعية $B_0 \coloneqq \{9,10,11,13,14,2,4\}$ في التصميم (15,15,7,7,3) يُنتِج تصميماً مشتقاً يحتوي المجموعات الفرعية التالية:

$\{2, 4, 10\}$	$\{9, 10, 13\}$	$\{10, 11, 14\}$
$\{2, 9, 11\}$	$\{10, 11, 14\}$	$\{11, 13, 4\}$
$\{2, 4, 10\}$	$\{9, 11, 2\}$	$\{13, 14, 2\}$
$\{4, 11, 13\}$	$\{9, 10, 13\}$	$\{13, 14, 2\}$
$\{4, 9, 14\}$		$\{14, 4, 9\}$

وهذا تصميم (14,7,6,3,2).

بشكلٍ عام، إذا بدأنا بالتصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل متماثل (v, k, λ)، سيكون التصميم المشتق بالتصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل $(v-1, k, k-1, \lambda, \lambda-1)$.

السؤال 290: **برر قيمة كل قيمة من هذه الموسطات. متى تحتاج حقيقة أن التصميم المتماثل مترابط؟**

المبرهنة التالية تلخص الحقائق الأساسية عن التصاميم المتبقية والمشتقة.

المبرهنة 7.2.4: بإعطاء التصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل متماثل (v,k,λ):

- التصميم المتبقي هو التصميم $(v-1, v-k, k, k-\lambda, \lambda)$.
- التصميم المشتق هو التصميم $(v-1, k, k-1, \lambda, \lambda-1)$.

بكلمات أخرى، إذا تواجد التصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل متماثلاً (v,k,λ)، فإن التصميمين

$(v-1, v-k, k, k-\lambda, \lambda)$ و$(v-1, k, k-1, \lambda, \lambda-1)$ ممكنان كلاهما.

من الطبيعي السؤال عما إذا كان العكس صحيحاً، كما في المبرهنة 7.1.2 في التصميم المتمم. على سبيل المثال، إذا كان التصميم $(v-1, v-k, k, k-\lambda, \lambda)$ ممكناً، هل نستطيع دائماً فك عملية بناء التصميم المتبقي والاستنتاج أن التصميم المتماثل (v,k,λ) ممكن؟ الإجابة هي لا. أعطى باتاتشاريا (Bhattacharya) (1944) مثالاً للتصميم (24,16,9,6,3) الذي لا يمكن تضمينه كتصميم متبقٍ للتصميم

المتماثل (25,9,3). طالع التمرين 13. بعض الشروط التي يكون فيها التضمين ممكناً معروفة. طالع الفصل 16 من بحث هول (Hall) (1986).

مثال: التصاميم المتبقية والتصاميم المشتقة

بإعطاء التصميم المتماثل (16,6,2)، ما هي التصاميم التي يمكن بناؤها منه؟

عندما $(v, k, \lambda) = (16,6,2)$ فإن التصميم المتبقي يكون

$$(v-1, v-k, k, k-\lambda, \lambda) = (15,10,6,4,2)$$

أما التصميم المشتق فيكون

$$(v-1, k, k-1, \lambda, \lambda-1) = (15,6,5,2,1)$$

كما يمكننا بناء تصميم متمّم في كلتا الحالتين. وهذا يعطي 6 تصاميم (بما فيها التصميم الأصلي) تتضمن العناصر التالية:

$$(16, 16, 6, 6, 2) \qquad (15, 10, 6, 4, 2) \qquad (15, 6, 5, 2, 1)$$
$$(16, 16, 10, 10, 6) \qquad (15, 10, 9, 6, 5) \qquad (15, 6, 10, 4, 6)$$

الملخص

في التصميم المتماثل، عدد المجموعات الفرعية يساوي عدد التنويعات. وهذه التصاميم عبارة عن صنف مدروس جيداً من التصاميم ذو المجموعات الفرعية

المتوازنة غير المكتملة. ويشار إلى أن العديد من نتائج كون تلك التصاميم ممكنة/ غير ممكنة أصبحت معروفة. تعطي مبرهنة بروك – رايزر - تشولا الشروط الضرورية لإمكانية وجود التصاميم المتماثلة، وقد أثبتت المبرهنة أنها أداة فعالة للباحثين. كما تعتبر التصاميم المتماثلة مصدراً للتصاميم غير المتماثلة من خلال مناهج بناء التصاميم المتبقية والمشتقة.

يلعب الجبر الخطي، وتحديداً مصفوفة الحدوث، دوراً مهماً في نتائج هذا القسم وما تبقى من الفصل.

التمارين

1. جد أصغر قيمة لـ r حيث $r > 1$ بحيث يكون التصميم $(b, v, r, 6, 1)$ ممكناً بناءً على الشروط الضرورية التي درسناها إلى الآن كافة. حدد قيم b وv المرتبطتان بقيمة r، أيضاً حدد قيمتين إضافيتين لـ r يكون عندها التصميم ممكناً.

2. استخدم مبرهنة بروك – رايزر - تشولا لإثبات أن التصميم (29,8,8,229,) غير ممكن. (توجيه: ابدأ بطريقة مشابهة للمثال الوارد في هذا القسم المتضمن التصميم (43,7,1).)

3. حدّد ما إذا كان التصميم المتماثل (43,36,30) ممكناً.

4. افترض أن $n \geq 2$. على ماذا تنص مبرهنة بروك – رايزر – تشولا حول إمكانية وجود التصميم

$(n^2+n+1, n+1, 1)$؟ جد قيمتين مختلفتين لـn بحيث لا تكون مثل هذه التصاميم موجودة عندها.

5. أثبت أنه إذا كان التصميم متماثلاً بـ $\lambda = 1$، فإنه يوجد عدد صحيح n بحيث تكون موسطات التصميم كما يلي: $(n^2+n+1, n^2+n+1, n+1, n+1, 1)$. (مثل هذا التصميم يعرف بمسطح **الإسقاط** (Projective Plane).

6. عليك بناء تصميم (8,2,1). هل يمكن بناء التصميم بإيجاد التصميم المتبقي أو التصميم المشتق لتصميم متماثل مناسب؟ برر ذلك.

7. ابن التصميم (14,7,8,4,4).

8. خذ تصميماً **ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل** متماثلاً (v, k, λ). بيّن أن التصميم المتبقي لتصميمه المتمم له نفس موسطات التصميم المتمم لتصميمه المشتق.

9. لتكن $\mathcal{D}$ تصميماً ذا مصفوفة حدوث. عرّف التصميم المزدوج (Dual Design) لـ $\mathcal{D}$ ليكون ذلك التصميم مع مصفوفة حدوث A^T. نستخدم $\mathcal{D}^T$ للرمز للتصميم المزدوج.

افترض أن $\mathcal{D}$ هو التصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل (b, v, r, k, λ). جد شرطاً كافياً لـ $\mathcal{D}^T$ ليكون تصميماً من نوع التصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل ثم برهن صحة إجابتك. أيضاً جد موسطات $\mathcal{D}^T$.

10. التصميم ذو المستويين $(v, k, 2)$ هو تصميم متماثل.

(أ) برهن أن موسطات التصميم ثنائي المسح يجب أن يحقق $v = \frac{k(k-1)}{2} + 1$.

(ب) استخدم أياً من الشروط الضرورية المعروفة لتحديد ما إذا كان التصميم ثنائي المسح ممكناً لكل قيمة من قيم k تحقق $3 \le k \le 11$.

11. برهن أنه لا يوجد أي تصميم ثنائي المسح فيه $k = 12$. (راجع التمرين السابق).

12. برهن المبرهنة 7.2.3 (توجيه: لاحظ أن $AJ = kJ$ و $JA = kJ$ حيث A مصفوفة حدوث و J هي مصفوفة كل مدخلاتها واحدات. برر سبب كون التصميم A^{-1} ممكناً، ثم استخدم $AA^T = (k - \lambda) I + \lambda J$

13. بناءً على هول (1986)) هذا هو تصميم باتاتشاريا (16,9,6,3,24) الذي ذكرناه مسبقاً في هذا القسم:

1, 2, 7, 8, 14, 15	3, 5, 7, 8, 11, 13	2, 3, 8, 9, 13, 16
3, 5, 8, 9, 12, 14	1, 6, 7, 9, 12, 13	2, 5, 7, 10, 13, 15
3, 4, 7, 10, 12, 16	3, 4, 6, 13, 14, 15	4, 5, 7, 9, 12, 15
2, 4, 9, 10, 11, 13	3, 6, 7, 10, 11, 14	1, 2, 3, 4, 5, 6
1, 4, 7, 8, 11, 16	2, 4, 8, 10, 12, 14	5, 6, 8, 10, 15, 16
1, 6, 8, 10, 12, 13	1, 2, 3, 11, 12, 15	2, 6, 7, 9, 14, 16
1, 4, 5, 13, 14, 16	2, 5, 6, 11, 12, 16	1, 3, 9, 10, 15, 16
4, 6, 8, 9, 11, 15	1, 5, 9, 10, 11, 14	11, 12, 13, 14, 15, 16

جد مجموعتين فرعيتين فيهما 4 عناصر مشتركة، ثم استخدمهما لتوضيح سبب عدم إمكانية كون التصميم متبقياً للتصميم المتماثل (25,9,3).

ملاحظات سريعة

كما سنرى في القسم 7.5، مصفوفة الحدوث لتصميم ما تُثبت فائدة نظرية شيفرات تصحيح- الخطأ، حيث تشكّل الصفوف في مصفوفات الحدوث هذه الشيفرات. من المراجع الجيدة للقرّاء الراغبين في الاستزادة عن برهان مبرهنة بروك – رايزر – تشولا أبحاث هول (1986) وفان لينت وويلسون (Van Lint and Wilson) (1992). أثبت كلٌّ من بروك ورايزر المبرهنة في البداية للتصاميم المتماثلة التي يكون فيها $\lambda = 1$ عام 1949. عام 1950، أكمل كل من تشولا ورايزر برهان المبرهنة بشكل عام بغض النظر عن λ. بخصوص الملاحظة التي وردت في الجدول 7.1، راجع الملحق/ في بحث هول (1986) للاطلاع على التصميم (25,9,3) المتماثل.

3.7 متباينة فيشر ونُظم شتاينر

في هذا القسم، سنبرهن شرطاً أساسياً ضرورياً لوجود التصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل وثم نتقصى نظم شتاينر الثلاثية. ومن هنا، سنعمم فكرة تصميم لنوع تصميم_t ثم سنقدم نظم شتاينر العامة.

متباينة فيشر

في كل تصاميم ذو المجموعات الفرعية المتوازنة غير المكتملة في درسنا لغاية الآن، كان عدد التنويعات لا يزيد عن عدد المجموعات الفرعية. وهذا صحيح بشكلٍ عام، وأثبت صحته الإحصائي فيشر (1940).

يستخدم البرهان الذي سنقدمه مصفوفة الحدوث والحقائق التالية من الجبر الخطي.

1. إذا كان $B = n \times n$، ومحدد $B \neq 0$ ، إذن رتبة $B = n$. (أي مصفوفة مربعة محددتها غير صفرية تكون ذات رتبة كاملة).

2. رتبة المتباينة $CD \geq$ رتبة C تنطبق على أي مصفوفات C وD، إذا أعطي أن CD معرّفة. (يعرف هذا أحياناً كمتباينة رتبة – حاصل – الضرب).

3. رتبة مصفوفة هي عدد الأعمدة على الأكثر.

تنطبق متباينة فيشر على تصاميم ذو المجموعات الفرعية المتوازنة غير المكتملة، وتنص على أن $b \geq v$، أو أن عدد المجموعات الفرعية يكون بنفس عدد التنويعات على الأقل.

السؤال 291: أعط مثالاً يبين أن متباينة فيشر لا تنطبق بالضرورة على التصاميم الكاملة.

المبرهنة 7.3.1: (**متباينة فيشر**): في أي تصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل (b, v, r, k, λ)، فإن $b \geq v$ و $r \geq k$.

البرهان: خذ أي تصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل (b, v, r, k, λ) ذا مصفوفة حدوث A. حسب المبرهنة 7.2.1، نعلم أن محدد AA^T يساوي $rk(r-\lambda)^{v-1}$. لكن السؤال 273 يبين أن $r > \lambda$ في أي تصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل، إذن محدد $AA^T \neq 0$ وعليه تكون رتبة $AA^T = v$. باستخدام الحقائق المذكورة أعلاه، فإن

$$v = AA^T \text{ محددة} \leq A \text{ رتبة} \leq b$$

وهذا يثبت متباينة فيشر $b \geq v$. إذن تضمن المعادلة $bk = vr$ أن $r \geq k$. ■

نظم شتاينر الثلاثية

النظام الثلاثي هو تصميم منتظم ثلاثي، أي أن التصميم $(v, 3, \lambda)$. التصميان (7,7,3,3,1) و(10,6,5,3,2) هما نظامين ثلاثيين. نظام شتاينر الثلاثي هو نظام ثلاثي متوازن _1، أي أنه تصميم $(v, 3,1)$. التصميم (7,7,3,3,1) والتصميم (26,13,6,3,1) الواردان في الشكل 7.1 هما نظاما شتاينر ثلاثيان. بما أن عدد التنويعات v يحدد بقية الموسطات في نظام شتاينر الثلاثي، فإن التصميم $(v, 3,1)$ يعرف أحياناً بتصميم $STS(v)$.

النظم الثلاثية مهمة في نظرية التصميم لعدة أسباب. أحدها أن نظرية التصميم بدأت في منتصف سنوات 1800 بأبحاث كيركمان وشتاينر (Steiner) حول وجود ما نسميه الآن نظم شتاينر الثلاثية. أيضاً، عندما تكون $k = 3$ أصغر قيمة في مجموعة فرعية حجمها k تكون عندها الأسئلة التي تطرح حول الوجود والبناء غير بسيطة بشكلٍ عام.

شرط ضروري وكافٍ

أي تصميم $STS(v)$، إن وُجد، هو تصميم $(b, v, r, 3,1)$. في المثال الذي تلا المبرهنة 7.1.1 في القسم 7.1، وجدنا أن الشرط الضروري لوجود هكذا تصميم هو

$r = \frac{v-1}{2}$ و$b = \frac{v(v-1)}{6}$. أي أن v لابدّ أن تكون عدداً فردياً و$v(v-1)$ يجب أن يقبل القسمة على 6.

لمتابعة ذلك أبعد قليلاً قسّم v على 6 واكتب التعبير $v = 6q + s$ حيث q عدد صحيح وs عدد صحيح يحقق المتباينة $0 \leq s < 6$. بما أن v عدد فردي، فإن $s = 1$ أو 3 أو 5. يتّضح أن المبرهنة 7.1.1 تلغي إمكانية $s = 5$.

السؤال 292: افترض أن $v = 6q + 5$ ثم استخدم $b = \frac{v(v-1)}{6}$ لاشتقاق النقيض.

هذا يثبت أن أي تصميم $STS(v)$ يجب أن يكون فيه $v = 6q + 1$ أو $v = 6q + 3$ لبعض الأعداد الصحيحة q، وهذا يثبت الشرط الضروري في المبرهنة التالية. سنحذف برهان الكفاية وبدلاً منه سنصف مناهج البناء (أحدها في هذا القسم، والآخر في القسم 7.5) التي تعمل في حالات معينة. من المراجع الجيدة للبرهان الفصل الخامس عشر من كتاب هول (1986).

المبرهنة 7.3.2: لتكن $v \geq 3$. ثمة نظام شتاينر ثلاثي ينطبق على التنويعات v إذا وفقط إذا كانت إما $v \equiv 1(mod6)$ أو $v \equiv 3(mod6)$.

بكلمات أخرى، يوجد نظام شتاينر الثلاثي تحديداً عندما ينتمي عدد التنويعات إلى المجموعة $\{3,7,9,13,15,19,21,25,27,\ldots\}$. لاحظ أن التصميم $STS(3)$ تافه.

يتضمن الجدول 7.2 قائمة متماثلة من عناصر نظم شتاينر الثلاثية.

b	v	r	k	λ
1	3	1	3	1
7	7	3	3	1
12	9	4	3	1
26	13	6	3	1
35	15	7	3	1
57	19	9	3	1
70	21	10	3	1
100	25	12	3	1
117	27	13	3	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{v(v-1)}{6}$	v	$\frac{v-1}{2}$	3	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

الجدول 7.2: موسطات نظم شتاينر الثلاثية.

منهج بناء لنظم شتاينر الثلاثية

نقدم الآن منهجاً لإنشاء تصميم $STS(v_1v_2)$ من التصميم $STS(v_1)$ والتصميم $STS(v_2)$. على سبيل المثال، من التصميم $STS(9)$ والتصميم $STS(13)$، يمكننا بناء التصميم $STS(117)$.

لتوضيح ذلك، سننشئ التصميم $STS(21)$ من التصميم $STS(3)$.

$$V_1 = \{x, y, x\}$$
$$\mathcal{B}_1 = \{\{x, y, z\}\}$$

والتصميم $STS(7)$ العادي

$$V_2 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{\{1,2,3\}, \{1,4,5\}, \{1,6,7\}, \{2,4,6\}, \{2,5,7\}, \{3,4,7\}, \{3,5,6\}\}$$

يذكرنا الجدول 7.2 بأن للتصميم $STS(21)$ 70 مجموعة فرعية.

إن مجموعة تنويعات تصميم جديد هي المجموعة $V_1 \times V_2$، أي الضرب الديكارتي لـ V_1 وV_2. للاختصار، اكتب العملية كمجموعة من كلمات مكونة من حرفين كما يلي:

$$V_1 \times V_2 = \{x1, x2, \dots, x7, y1, y2, \dots., y7, z1, z2, \dots, z7\}$$

الآن بالنسبة إلى المجموعات الفرعية. هي مبنية كما يلي:

• النوع الأول: كل المجموعات الفرعية $\{cm, dm, em\}$ حيث $\{c, d, e\} \in \mathcal{B}_1$ و $m \in V_2$.

• النوع الثاني: كل المجموعات الفرعية $\{nf, ng, nh\}$، حيث $n \in V_1$ و $\{f, g, h\} \in \mathcal{B}_2$.

• النوع الثالث: كل المجموعات الفرعية $\{cf, dg, eh\}$، حيث $\{c, d, e\} \in \mathcal{B}_1$ و $\{f, g, h\} \in \mathcal{B}_2$.

في مثالنا، نضمّن المجموعات الفرعية $7 = 7 \cdot 1$ من النوع الأول:

(7.3)

$$\{x1, y1, z1\} \quad \{x2, y2, z2\} \quad \{x3, y3, z3\} \quad \{x4, y4, z4\}$$
$$\{x5, y5, z5\} \quad \{x6, y6, z6\} \quad \{x7, y7, z7\}$$

نضمّن المجموعات الفرعية $21 = 7 \cdot 3$ من النوع الثاني:

(7.4)

$$\begin{array}{ccc}
\{x1, x2, x3\} & \{y1, y2, y3\} & \{z1, z2, z3\} \\
\{x1, x4, x5\} & \{y1, y4, y5\} & \{z1, z4, z5\} \\
\{x1, x6, x7\} & \{y1, y6, y7\} & \{z1, z6, z7\} \\
\{x2, x4, x6\} & \{y2, y4, y6\} & \{z2, z4, z6\} \\
\{x2, x5, x7\} & \{y2, y5, y7\} & \{z2, z5, z7\} \\
\{x3, x4, x7\} & \{y3, y4, y7\} & \{z3, z4, z7\} \\
\{x3, x5, x6\} & \{y3, y5, y6\} & \{z3, z5, z6\}
\end{array}$$

تتطلب المجموعات الفرعية من النوع الثالث بعض التوضيح. يجب أن نضمّن المجموعات الفرعية $\{cf, dg, eh\}$ كافة في جميع التباديل الممكنة للتنويعات في المجموعة الفرعية $\{c, d, e\}$ وفي المجموعة الفرعية $\{f, g, h\}$. بصورة مكافئة، يمكننا تحديد ترتيب معين من التنويعات في المجموعة الفرعية من $\mathcal{B}_1$ ومن ثم نُدخل جميع التباديل للتنويعات الثلاثة في كل مجموعة فرعية من $\mathcal{B}_2$. وبذا ندخل $42 = 1 \cdot 7 \cdot$!3 مجموعة فرعية من النوع الثالث:

(7.5)

$$
\begin{array}{ccc}
\{x1, y2, z3\} & \{x1, y3, z2\} & \{x2, y1, z3\} \\
\{x2, y3, z1\} & \{x3, y1, z2\} & \{x3, y2, z1\} \\
\{x1, y4, z5\} & \{x1, y5, z4\} & \{x4, y1, z5\} \\
\{x4, y5, z1\} & \{x5, y1, z4\} & \{x5, y4, z1\} \\
\{x1, y6, z7\} & \{x1, y7, z6\} & \{x6, y1, z7\} \\
\{x6, y7, z1\} & \{x7, y1, z6\} & \{x7, y6, z1\} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\{x3, y5, z6\} & \{x3, y6, z5\} & \{x5, y3, z6\} \\
\{x5, y6, z3\} & \{x6, y3, z5\} & \{x6, y5, z3\}
\end{array}
$$

في المجمل يوجد 7+21+42=70 مجموعة فرعية من بين (7.3) و(7.4) و(7.5)، وهذه تشكّل تصميمنا الجديد.

عند هذا الحد، لدينا تصميم موسطاته $b = 70$، $v = 21$، $k = 3$. لإكمال برهنة أنه تصميم $STS(21)$، علينا أن نبيّن أن $r = 10$ و$\lambda = 1$ حسبما ورد في الجدول 7.2.

لبيان أن $r = 10$، سنأخذ تنويعاً عاماً wi ينتمي إلى $V_1 \times V_2$. يظهر هذا التنويع في المجموعات الفرعية من النوع الأول مرة واحدة فقط، وفي المجموعات الفرعية من النوع الثالث، ثلاث مرات تحديداً، وفي المجموعات الفرعية من النوع الثالث $3! \cdot 1 = 6$ مرات. وعليه يظهر هذا التنويع $1 + 3 + 6 = 10$ مرات بالمجمل.

السؤال 293: تأكّد أن $\lambda = 1$ بأخذ زوج شامل من التنويعات wi وuj وبيان أنهما يظهران معاً مرة واحدة تحديداً في التصميم الجديد. (خذ في الاعتبار الحالات بناءً على ما إذا كان $i = j$ و$w = u$ أو $i \neq j$ و$w \neq u$).

ينطبق هذا الإجراء بشكلٍ عام ويثبت وجود العديد من التصاميم $STS(v)$. على سبيل المثال، بما أننا بنينا التصميمين $STS(3)$ و$STS(7)$ ، فإننا نعلم أن التصميم $STS(3^m, 7^n)$ ممكن الوجود للأعداد الصحيحة غير السالبة m وn وعندما كليهما ليس صفراً.

المبرهنة 7.3.3: **إذا كان نظام شتاينر الثلاثي على التنويعات v_1 ممكناً وكذلك نفس النظام على التنويعات v_2، فإن نظام شتاينر الثلاثي على v_1v_2 ممكن أيضاً.**

التصاميم – t

في التصميم (b, v, r, k, λ)، يظهر أن أي تنويعين معاً في المجموعات الفرعية λ تحديداً. قد يتطلب أحد التعميمات الطبيعية لهذه الفكرة بدلاً من ذلك أن تظهر أي ثلاثة تنويعات أو أربعة تنويعات أو أكثر معاً في المجموعات الفرعية λ تحديداً.

بشكلٍ عام، فإننا نعرّف **التصميم** $\boldsymbol{t - (v, k, \lambda)}$ على أنه تصميم على التنويعات v ويحتوي مجموعات فرعية حجمها k بحيث تظهر أي من التنويعات t معاً في المجموعات الفرعية λ تحديداً. غالباً ما يُختصر هذا إلى تصميم – $\boldsymbol{t}$.

تضمن عملنا منذ بداية هذا الفصل وحتى الآن تصاميم ثنائية، أي أن أي تصميم (b, v, r, k, λ) هو تصميم $2 - (v, k, \lambda)$.

فيما يلي مثال على تصميم ثلاثي، خصوصاً التصميم $3 - (10,4,1)$. فهو يتضمن 10 تنويعات و30 مجموعة فرعية من حجم 4، وكل التنويعات الثلاثية تظهر معاً في مجموعة فرعية واحدة تحديداً:

(7.6)

{1, 5, 6, 10}	{1, 2, 8, 9}	{2, 3, 6, 7}	{3, 4, 9, 10}	{4, 5, 7, 8}
{1, 3, 4, 7}	{4, 6, 8, 9}	{2, 7, 8, 10}	{2, 3, 5, 9}	{2, 4, 5, 10}
{5, 6, 7, 9}	{3, 6, 8, 10}	{1, 3, 5, 8}	{1, 7, 9, 10}	{1, 2, 4, 6}
{2, 3, 4, 8}	{2, 4, 7, 9}	{3, 7, 8, 9}	{3, 4, 5, 6}	{3, 5, 7, 10}
{4, 6, 7, 10}	{1, 4, 5, 9}	{1, 4, 8, 10}	{5, 8, 9, 10}	{1, 2, 5, 7}
{2, 5, 6, 8}	{1, 6, 7, 8}	{1, 2, 3, 10}	{1, 3, 6, 9}	{2, 6, 9, 10}

عند هذه النقطة، إما أن تأخذ العبارة الأخيرة كأمر مسلّم به أو أن تتحقق من كونها صحيحة لكل مجموعة جزئية ثلاثية من التنويعات وعددها $\binom{8}{3} = 56$. يعطي التمرين 7 طريقة حول هذا ويبيّن أيضاً كيف تم بناء هذا التصميم تحديداً.

السؤال 294: التصميم (7,3,1) هو تصميم $(7, 3, 1) - 2$. هل هو تصميم $- t$ لأي قيمة أخرى من قيم t؟ فسّر.

الخصائص الأساسية للتصاميم $- t$

تفحّص التصميم $(10,4,1) - 3$ المبيّن في (7.6). يمكننا أن نحدد أن مثل هذا التصميم يجب أن يتضمن 30 مجموعة فرعية كما سيتبع. عدد المجموعات الجزئية الثلاثية من التنويعات الممكنة $\binom{10}{3} = \binom{v}{t}$، وكل منها يجب أن تظهر في $\lambda = 1$ مجموعة فرعية من التصميم. وهذا يعني أنه يوجد $\lambda\binom{v}{t} = 1 \cdot \binom{10}{3}$ مجموعة جزئية ثلاثية لشمولها من بين المجموعات الفرعية في التصميم. كل مجموعة فرعية رباعية الحجم تتضمن $\binom{4}{3} = \binom{k}{t}$ مجموعة فرعية ثلاثية من التنويعات الممكنة. وهذا يعني أن

$$b = \text{number of blocks}$$

$$= \frac{\text{Total number of t} - \text{subsets to "cover"}}{number\ of\ t - subsets\ \text{covered} per\ block}$$

$$= \frac{\lambda\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}}$$

$$= \frac{1 \cdot \binom{10}{3}}{\binom{4}{3}}$$

$$= 30$$

كما أنه من الممكن إثبات أن $b\binom{k}{t} = \lambda\binom{v}{t}$ باستخدام برهان توافيقي يعمّم الفكرة المستخدمة في برهنة المبرهنة 7.1.1 في القسم 7.1.

السؤال 295: أعطِ هذا البرهان. (عدّ الأزواج على شكل $(\boldsymbol{B},\boldsymbol{T})$ حيث $\boldsymbol{B}$ مجموعة فرعية و$\boldsymbol{T}$ مجموعة فرعية-t من $\boldsymbol{B}$.

كما يمكننا تحديد أن التصميم $3-(10,4,1)$ فيه $r = 12$ باستخدام تعديل على برهان المبرهنة 7.1.1. نطرح سؤالاً: بالنسبة إلى التنويع الثابت y، كم عدد الأزواج (B,T) الممكنة حيث B مجموعة فرعية تحتوي y وT مجموعة جزئية ثلاثية من B تحتوي y؟

ثمة r طريقة لاختيار مجموعة فرعية B تحتوي التنويع y. لكل خيار من هذه الخيارات، يوجد

$\binom{k-1}{t-1} = \binom{3}{2}$ طريقة لاختيار التنويعات الأخرى $t-1=2$ من B لإكمال المجموعة الجزئية T. وعليه فإنه يوجد $r\binom{k-1}{t-1} = r\binom{3}{2}$ زوج بالإجمال.

من ناحية أخرى، يوجد $\binom{v-1}{t-1} = \binom{9}{2}$ طريقة لاختيار التنويعات الأخرى $t-1=2$ لشمولها مع y في المجموعة الجزئية T. لكلٍ من هذه الخيارات، يوجد

$\lambda = 1$ طريقة لاختيار مجموعة فرعية B تحتوي التنويعات في T. يوجد $\lambda\binom{v-1}{t-1} = 1 \cdot \binom{9}{2}$ زوج بالإجمال.

لوضعنا $r\binom{3}{2} = 1 \cdot \binom{9}{2}$ نحصل على $r = 12$. في هذا النقاش، أثبتنا الصيغة التالية الأكثر عمومية من المبرهنة 7.1.1.

المبرهنة 7.3.4: إذا كان التصميم $t - (v, k, \lambda)$ موجوداً، فإن $b\binom{k}{t} = \lambda\binom{v}{t}$ و$r\binom{k-1}{t-1} = \lambda\binom{v-1}{t-1}$.

يمكن إنجاز المزيد من العمل. في الواقع، أي تصميم $t -$ هو أيضاً تصميم $i -$ لجميع قيم $i < t$. على سبيل المثال، التصميم 3- الذي أوردناه سابقاً هو أيضاً تصميم 2-، وعليه يكون التصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل عادياً.

السؤال 296: عندما نعامل التصميم على أنه تصميم 2-، ما هي موسطات (b, v, r, k, λ) التصميم $(10, 4, 1) - 3$ المبين في (67.)؟

النتيجة التالية، وتعرف أحياناً بمبرهنة الوسيط، تجعل الأمر دقيقاً. من البراهين الممكنة اتباع مسار منطقي شبيه بذلك المستخدم في برهان المبرهنة 7.3.4. وسنترك هذا للتمرين 10.

النظرية 7.3.5 (**مبرهنة الوسيط**): إذا كان $\mathcal{D}$ تصميم من نوع $t-(v,k,\lambda)$ وi تحقق $0 \leq i < t$، فإن $\mathcal{D}$ يكون أيضاً تصميم $i-(v,k,\lambda i)$ حيث λi تحقق $\lambda i\binom{k-i}{t-i} = \lambda\binom{v-i}{t-i}$.

السؤال 297: في نصّ المبرهنة، ما قيمة λ_0 و λ_1 مقارنة بموسطات التصميم المألوفة أكثر؟

فيما يلي مثالين يوضحان هذه المبرهنة.

مثال: تصميم ثنائي من تصميم ثلاثي

افترض أن لدينا التصميم $3-(8,4,1)$. (طالع التمرين 6 كمثال). عند أخذ التصميم الثنائي، ما هي عناصره؟

تتضمن نظرية الوسيط أنها التصميم من نوع $2-(8,4,\lambda_2)$ حيث تحقق λ_2 المعادلة:

$$\lambda_2\binom{4-2}{3-2} = 1\cdot\binom{8-2}{3-2}$$

والنتيجة $\lambda_2 = 3$. وعليه فإنه يكون تصميماً من نوع $2-(8,4,3)$ أو تصميماً مكافئاً للتصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل $(14,8,7,4,3)$.

مثال: هل هذا التصميم موجود؟

ما هي الشروط الضرورية من المبرهنتين 7.3.4 و7.3.5 المفترضة ضمنياً حول وجود التصميم

$(20,6,10) - 4$؟

إذا كان التصميم موجوداً، فإنه حسب المبرهنة 7.3.4 سيكون لدينا

$$b = \frac{\lambda\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}} = \frac{10.\binom{20}{4}}{\binom{6}{4}} = 3230$$

و

$$r = \frac{\lambda\binom{v-1}{t-1}}{\binom{k-1}{t-1}} = \frac{10\binom{19}{3}}{\binom{5}{3}} = 969$$

أي أنه سيكون لدينا 3230 مجموعة فرعية وكل تنويع سيظهر في 969 مجموعة فرعية تحديداً. بما أن كلاً من هذه الأرقام عدد صحيح، فهذا لا ينفي وجود التصميم.

حسب المبرهنة 7.3.5، سيكون التصميم أيضاً $(20,6,\lambda_3) - 3$، حيث

$$\lambda_3 = \frac{\lambda\binom{v-3}{t-3}}{\binom{k-3}{t-3}} = \frac{10.\binom{17}{1}}{\binom{3}{1}} = \frac{170}{3}$$

بما أن λ_3 ليس عدداً صحيحاً، نستنتج أن التصميم $(20,6,10) - 4$ غير موجود.

نظم شتاينر

أخيراً، ذكرنا بإيجاز فئة مهمة ومدروسة جيداً هي تصاميم $t-$. نظام شتاينر هو تصميم $\boldsymbol{t}-$ تكون فيه $\lambda = 1$. بكلمات أخرى، نظام شتاينر هو تصميم $t-(v,k,1)$. وغالباً ما يُختصر كـ $S(t,k,v)$. التصميم متعدد الأغراض (7 ,3,1) هو تصميم $S(2,3,7)$، وأي تصميم شتاينر ثلاثي هو تصميم $S(2,3,v)$. التصميم الموضّح في (7.6) هو تصميم $S(3,4,10)$.

بخلاف المبرهنة 7.3.2، التي تعطي شرطاً ضرورياً وكافياً لوجود نظام شتاينر الثلاثي، لا يوجد أي مبرهنة مشابهة معروفة لنظم شتاينر أكثر عمومية. رأينا أمثلة لتصميم $S(t,k,v)$ لقيم $t = 2,3$. ثمة أمثلة

لـ $t = 4,5$، لكن هذه حدود معرفتنا؛ لايزال السؤال ما إذا وجد تصميم لقيم $t > 5$ مسألة مفتوحة. أكبر نظام شتاينر معروف (من حيث عدد المجموعات الفرعية) عندما $t = 5$ هو التصميم $S(5,6,84)$.

السؤال 298: ما هي قيم $\boldsymbol{b}$ و $\boldsymbol{r}$ للتصميم $\boldsymbol{S(5,6,84)}$؟

كما سنرى في القسم 7.5، يمكن أن تكون شيفرات تصحيح الخطأ مصدراً لنظم شتاينر.

الملخص:

تجمع متباينة فيشر قائمة العلاقات الأساسية الضرورية لوجود التصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل:

$$bk = vr, r(k-1) = \lambda(v-1), b \geq k, v > k, r > \lambda$$

ثمة تعميم للتصميم (v,k,λ) وهو التصميم $t-(v,k,\lambda)$، حيث تظهر كل مجموعة جزئية $t-$ من التنويعات في المجموعات الجزئية λ تحديداً. نظام شتاينر هو تصميم$-t$ فيه $\lambda = 1$. في حين توجد إجابة كاملة معروفة عن سؤال وجود نظم شتاينر الثلاثية، وهي تصاميم $(v,3,1)-2$، لايزال بناء نظم شتاينر لـ $t > 2$ مسألة أكثر تعقيداً بكثير.

التمارين

1. كم عدد نظم شتاينر الثلاثية المتماثلة؟ برر إجابتك.

2. ابنِ تصميم $STS(9)$.

3. جد جميع قيم λ التي يوجد لها نظام ثلاثي بستة تنويعات. لكل قيمة من قيم λ هذه، إما أن تعطي تصميماً أو توضح كيفية بنائه.

4. (نظرية المخطط) أثبت أن ثمة تصميم $STS(v)$ ممكن إذا، وفقط إذا، كان ممكناً تجزئة حواف المخطط الكامل K_v إلى مخططات جزئية منفصلة الحواف كل منها K_3.

5. برهن المبرهنة 7.3.3 بتعميم البرهان المعطى في المثال $v_1 = 3$ و$v_2 = 7$ في النص.

6. خذ التصميم (7,3,1) في القسم 7.1. عرّف تصميماً جديداً $\mathcal{D}$ كما سيأتي. يتضمن التصميم 8 تنويعات و14 مجموعة فرعية، حيث تكون المجموعات الفرعية ذات نوعين: (أ) المجموعات الفرعية للتصميم (7,3,1) لكن بإضافة التنويع 8 لكل منها؛ (ب) المجموعات الفرعية للتصميم المتمم للتصميم (7,3,1).

برهن أن هذا التصميم هو من نوع $S(3,4,8)$. (عندما تبرهن أن $\lambda = 1$، استخدم هيكلية التصميم (7,3,1) ومتممته؛ لا تتحقق من جميع المجموعات الجزئية الثلاثية $\binom{8}{3}$ الممكنة من المجموعة V بالقوة الغاشمة).

7. (نظرية المخطط)، فيما يلي طريقة لبناء التصميم $(10,4,1) - 3$ المبيّن في هذا القسم. ارسم مخططاً كاملاً K_5 ورمّز حوافه من 1 إلى 10. تنويعات التصميم هي الحواف: $V = [10]$. المجموعات الفرعية من 3 أنواع: (أ) الحواف في المخطط الجزئي متماثلة مع $K_{1,4}$، (ب) الحواف في التصميم الفرعي متماثلة مع $K_2 \cup C_3$، (جـ) الحواف في التصميم الفرعي متماثلة مع C_4.

(أ) أعطِ قائمة بكل المجموعات الفرعية. كم مجموعة فرعية يوجد من كل نوع؟

(ب) استخدم بناء المخطط، برهن أنه تصميم ثلاثي فيه $\lambda = 1$؟

8. (نظرية المخطط)، خذ في الاعتبار التحليل في المثال السابق، إضافة للتصميم التالي. التنويعات هي الحواف المرمزة للمخطط الكامل K_6. المجموعات

الفرعية من نوعين: (أ) الحواف ذات مطابقة[1] كاملة، (ب) الحواف في المخطط الفرعي مماثلة لـ C_3.

حدد الموسطات بحيث يكون التصميم من نوع $t-(v,k,\lambda)$، ثم برهن صحة إجابتك.

9. قد يكون التصميم $3-(16,6,2)$ ممكناً حسب الشروط الضرورية الواردة في المبرهنتين 7.3.4 و7.3.5؟ فسّر.

10. برهن مبرهنة الموسطات (نظرية 7.3.5).

ملاحظات سريعة

للمطالعة الإضافية، يمكن الرجوع لـهول (1986) كمرجع متقدم ممتاز حول نظرية التصميم. إذ يتضمن قائمة شاملة للنتائج المعروفة عن وجود أو عدم وجود تصاميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل بالعناصر $3 \leq r \leq 20$.

4.7 الشيفرات الثنائية الكاملة

لحظة سنترك نظرية التصميم، ونبدأ بدراسة شيفرات الخطأ- التصحيح. هدفنا في هذا القسم فهم بناء أنواع معينة من شيفرة الخطأ - التصحيح. لننتقل مباشرة ونرى كيفية عمل الشيفرة.

---

[1] مطابقة كاملة في المخطط G مع الرؤوس n هي مجموعة عدد حوافها n/2، لا تتقابل فيها أي حافتين في رأس واحد.

شيفرة هامينغ $(7, 2^4, 3)$ (Hamming Code)

أُرسل مسبار إلى أبعد نقطة يمكن الوصول إليها في نظامنا الشمسي، يرسل صوراً إلى الأرض. تكون ألوان كل صورة بدرجات اللون الرمادي وتتكون من بيكسيلات، حيث قيمة كثافة كل بيكسل تتراوح بين 0 (أسود) و15 (أبيض)[2]. إرسال الصورة يتم دفعة واحدة: يكون لدينا فرصة واحدة فقط لإرسال كل صورة بحيث تُرسل بدقة. موقع المسبار البعيد جداً ومحدودية تزويد الطاقة فيه يمنعاننا من إصلاح الصور إو إعادة إرسالها.

حسب الاتفاق بأن كل صورة تتطلب إرسالاً دقيقاً ندرك أن الخطأ في الإرسال وارد الحدوث. فقد تحدث مشاكل في معدات المسبار، أو في المعدات الموجودة على الأرض، أو حتى بسبب عوامل دخيلة بينهما كالعوامل الجوية وتأثيرات الفضاء. ولا يمكن للعلماء والمهندسين التحكم بالعديد من هذه العوامل أو السيطرة عليها. هل يمكن وجود طريقة إرسال تقف حائلاً دون هذه العوامل؟

تعطي الشيفرة المبينة في الجدول 7.3 طريقة مبتكرة لذلك. فهي تتكون من قائمة من بعض الأعداد الثنائية المكونة من 7 خانات وتعرف بـكلمات شيفرة (Codewords)، مع ما يوازيها من تدرج اللون الرمادي. تُعرف هذه الشيفرة بشيفرة هامينغ $(7, 2^4, 3)$. يشير الموسط الأول إلى أن طول كل كلمة شيفرة هو 7، بينما يشير

(2) مدى القيم الصغير هذا ملائم لتوضيح الفكرة. في التطبيقات الواقعية، يتراوح تدرج اللون الرمادي بين 0-63 أو 0-255.

الموسط الثاني إلى أن عدد كلمات الشيفرة هو 2^4. يشير الموسط الثالث إلى أن مسافة الشيفرة الدنيا هو 3، وسنرى معنى ذلك لاحقاً في هذا القسم. لإرسال بكسيل قيمة التدرج الرمادي له 11، يرسل المسبار الشيفرة 1011010. أما لإرسال بكسيل قيمة التدرج الرمادي له 3 فيرسل الشيفرة 0011001.

الكلمة الشيفرة	الكثافة (تدرج رمادي)	الكلمة الشيفرة	الكثافة (تدرج رمادي)
0000000	0	1000011	8
0001111	1	1001100	9
0010110	2	1010101	10
0011001	3	1011010	11
0100101	4	1100110	12
0101010	5	1101001	13
0110011	6	1110000	14
0111100	7	1111111	15

الجدول 7.3: تطبيق شيفرة هامينغ $(7, 2^4, 3)$ لإرسال صورة ذات تدرج رمادي.

تخيّل أن المسبار يرسل قيمة تدرج رمادي تستقبله المستقبلات على الأرض كـ 1010001. هذه الكلمة لا تظهر في قائمة الكلمات الشيفرة، إذن ليس لها مكافئ تدرج رمادي. لكنها قريبة من الكلمة الشيفرة 1010101 التي ترتبط بالتدرج 10. في الواقع تختلف الكلمتان في خانة واحدة فقط. شبيهاً بذلك، الكلمة غير الشيفرة 1101011 تختلف عن 1101001 (التدرج 13) في خانة واحدة فقط.

ما يجعل الشيفرة ذكية هو الخاصية التالية الجديرة بالملاحظة: كل عدد من الأعداد الثنائية المكونة من 7 خانات من الـ $2^7 = 128$ عدد الممكنة إما أن يكون أحد الكلمات الشيفرة الـ 16 أو بخلاف ذلك فإنه يكون مختلفاً عن الكلمة الشيفرة الفريدة بخانة واحدة تحديداً. في تطبيقنا، هذا يعني أن الأرض يمكن أن تستقبل الصورة المضبوطة التي أرسلها المسبار في الأصل حتى لو كان ثمة خطأ واحد في عملية إرسال كل قيمة في التدرج الرمادي. إذا كانت الأرض تستقبل عدداً ثنائياً مكوّناً من 7 خانات ليس موجوداً ضمن قائمة الكلمات الشيفرة، يتم استبداله بكلمة الشيفرة الأقرب إلى ذلك العدد. بافتراض أن خطأ واحداً على الأكثر يحدث في إرسال كل قيمة في التدرج الرمادي، فإن طريقة فكّ الشيفرة تضمن الاستقبال الصحيح للصورة الأصلية.

بطبيعة الحال، كل المراهنات تلغى عند إمكانية حدوث أكثر من خطأ واحد في إرسال قيمة تدرج رمادي واحدة. على سبيل المثال، افترض حدوث خطأين على

الأكثر في إرسال كل قيمة تدرج رمادي. إذا كانت الأرض تستلم 1010000، فهل يكون المسبار أرسل 0000000 (التدرج 0) في الأصل؟ أو 1010101(التدرج 10) أو 1110000 (التدرج 14)؟ ترتبط هذه القيم باللون الأسود، والرمادي الخفيف، والأبيض تقريباً على التوالي، إذن هذا يؤثّر على دقّة الصورة بشكلٍ ملحوظ.

بوجود شيفرة محسّنة، يحسن عدد أكبر من الأخطاء، لكن القدرة على تصحيح حتى لو خطأ واحد سيكون إنجازاً هاماً. حدسياً، القدرة على تصحيح أكثر من خطأ واحد تتطلب بالضرورة كلمات شيفرة أكبر. لكن، كلمات شيفرة أقصر مرغوبة بالتأكيد نظراً لأنها تتطلب مساحة تخزين أصغر وتتيح سرعة في الإرسال.

تعتبر الخصائص الرياضية والتبادلات لشيفرات تصحيح - الخطأ بأهمية الاعتبارات العملية التي تنشأ من التطبيقات نفسها. هذه الخصائص التي تعتبر شيفرات ثنائية كاملة، ومثال عليها شيفرة هامينغ $(7, 2^4, 3)$، نادرة. سنركز على إمكانية الوجود وأسئلة البناء بها في ذلك الشيفرات الكاملة، وسنترك مجال فك الشيفرات الهام والممتع لمصادر أخرى.

الشيفرات الثنائية

لتكن $\mathbb{B}^n$ مجموعة كل الأعداد الثنائية المكونة من n خانة. الشيفرة الثنائية (Binary Code) هي أي مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{B}^n$، وتعرف عناصر هذه

المجموعة بكلمات الشيفرة. تعرف كل نقطة في $\mathbb{B}^n$ ليست كلمة شيفرة بـ "كلمة". في سياق إرسال الرسائل، كلمات الشيفرات ما هي إلا هذه النقاط في $\mathbb{B}^n$ التي ربطنا بها معنىً. أما الكلمات الباقية فلا تحمل معنى بل تنتج عن إرسال خاطئ لكلمة الشيفرة. شيفرة هامينغ $(7, 2^4, 3)$ هي شيفرة ثنائية على $\mathbb{B}^7$.

نحتاج طرقاً لجمع وتضخيم وقياس المسافة بين كلمات الشيفرة، إذن نحتاج لمعالجة $\mathbb{B}^n$ كفضاء متجهي مع العمليات المألوفة والضرب العادي. فيما يلي مثال على الإضافة في $\mathbb{B}^6$

$$101110 \oplus 011000 = 110110$$

يذكّرنا العامل $\oplus$ بأننا ننفّذ عملية إضافة للنموذج 2 في كل مكوّن. القواعد هي:

$0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0$. عملية الضرب العادي سهلة أيضاً: على سبيل المثال: $0(101110) = 000000$ و$1(101110) = 101110$.

مسافة هامينغ

المفهوم الأساسي الذي يحرّك كلاً من إمكانيات تصحيح - الخطأ وطريقة فك الشيفرة هو المسافة. تُعرّف مسافة هامينغ (Hamming Distance) بين الكلمات v وw في $\mathbb{B}^n$ كما يلي:

عدد المكونات التي تختلف فيها $\boldsymbol{v}$ و $\boldsymbol{w}$ =: $h(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$

على سبيل المثال، في $\mathbb{B}^6$ لدينا $h(101110,011000) = 4$ و$h(000000,010001) = 2$.

السؤال 299: لتكن $\boldsymbol{v}$و$\boldsymbol{w}$ كلمات في $\mathbb{B}^n$ ولتكن $\boldsymbol{0}$ كل الكلمات الصفرية. فسّر لماذا $h(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ تساوي عدد الواحدات في $\boldsymbol{v}\oplus\boldsymbol{w}$. ثم فسّر سبب $h(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = h(\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}\oplus\boldsymbol{w})$.

تحقق مسافة هامينغ h الخصائص الرياضية **للمقياس**. وهذه الخصائص هي:

M1 لكل $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in \mathbb{B}^n$، حيث $h(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \geq 0$. إضافة لذلك، $h(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = 0$ إذا وفقط إذا كان $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$.

M2 لكل $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in \mathbb{B}^n$، حيث $h(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = h(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})$.

M3 لكل $\mathbf{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in \mathbb{B}^n$، حيث $h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \leq h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + h(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$.

معادلة المسافة الإقليدية المألوفة المستخدمة في الجبر وحساب التفاضل والتكامل واقتران القيمة المطلقة هي أمثلة على القياسات. تتبع الخصائص M1 وM2

بسهولة من تعريف مسافة هامينغ. الخاصية M3 المعروفة بمتباينة المثلث، تتبع بالتحليل المبني على المكونات. طالع التمرين 2.

أما **وزن** الكلمة في $\mathbb{B}^n$ فهو عدد الواحدات في تلك الكلمة. نستخدم wt(**v**) لترميز وزن v. على سبيل المثال wt(010111)=4.

السؤال 300: عبّر عن wt(**v**) بمقياس مسافة هامينغ. ثمّ عبر عن $h(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ من ناحية اقتران الوزن.

الكرات

في بداية هذا القسم، ادّعينا أن شيفرة هامينغ $(7, 2^4, 3)$ ذات خاصية أن كل كلمة $\mathbb{B}^7$ تقع ضمن مسافة 1 من كلمة شيفرة واحدة تحديداً. يساعدنا مفهوم الكرة على تخيّل وتحليل هذه الفكرة.

لأي كلمة $v \in \mathbb{B}^n$ وأي عدد صحيح غير سالب r، يحتوي **كرة نصف قطرها $\boldsymbol{r}$ متمركزة عند $\boldsymbol{v}$** وتضم كل الكلمات في $\mathbb{B}^n$ ضمن مسافة نصف القطر r من $\boldsymbol{v}$. أي أن

$$S_r(\boldsymbol{v}) \coloneqq \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{B}^n : h(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \leq r\}$$

على سبيل المثال، في $\mathbb{B}^6$ يكون

$$S_0(010111) = \{010111\}$$

$$S_1(010111) = \{010111,110111,000111,011111,010011,010101,010110\}$$

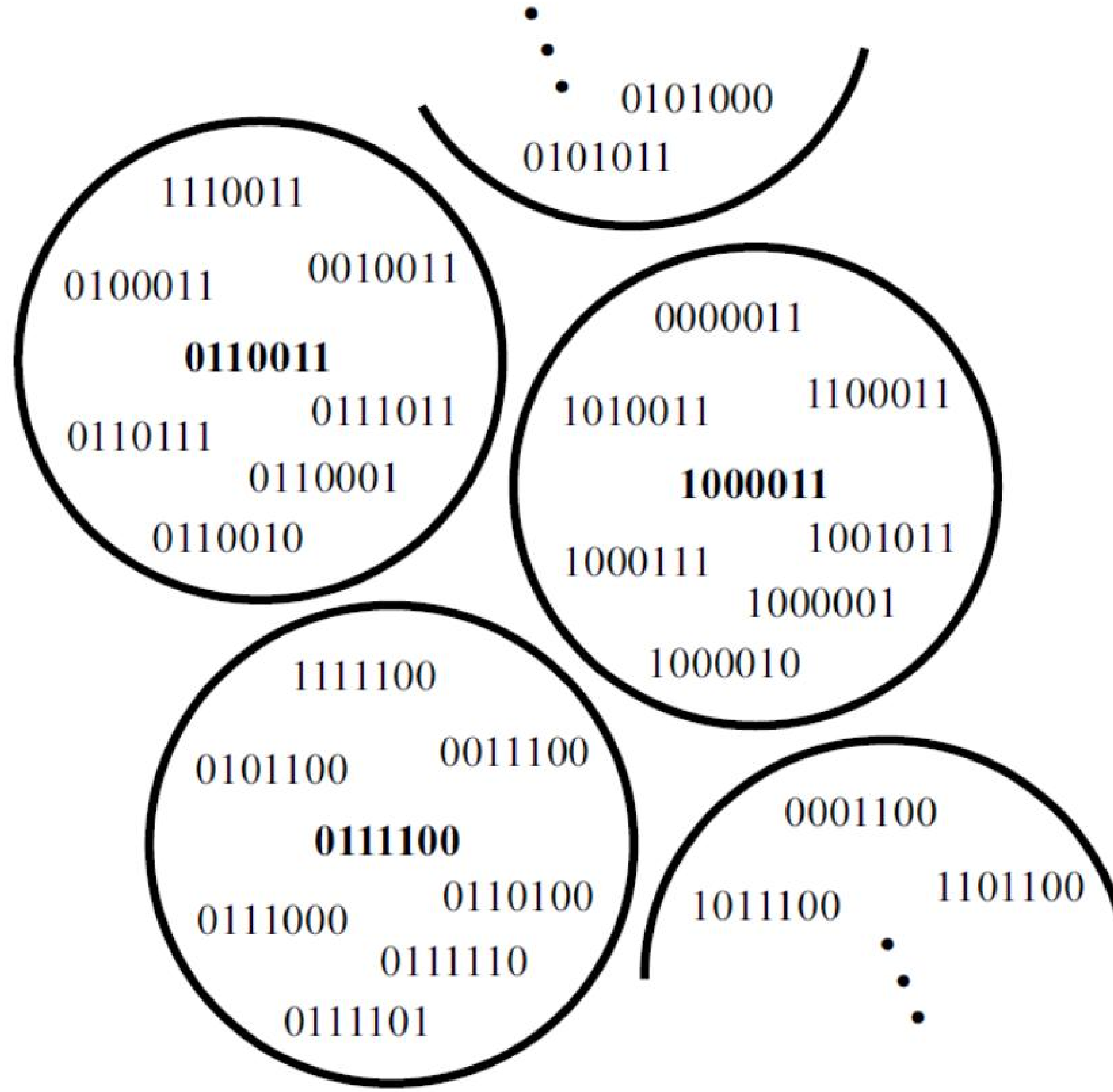
السؤال 301: كم عدد الكلمات في $S_3(010111)$ وفي $S_2(010111)$؟

عد الكلمات باستخدام منهج غير وضع قائمة بها جميعاً.

يبيّن الشكل 7.3 تمثيلاً جزئياً لكرة نصف القطر 1 حول كل كلمة شيفرة من شيفرة هامينغ $(7, 2^4, 3)$. تحتوي كلٌ من الكرات الثلاث الكاملة المبنية على كلمات الشيفرة بالخط الغامق والكلمات السبع الأخرى في $\mathbb{B}^7$ التي تبعد مسافة 1 عن الكلمة الشيفرة. بالطبع تقسم كرات نصف القطر 1 الست عشرة المجموعة $\mathbb{B}^7$ إلى 16 قسماً. سنثبت ذلك لاحقاً.

القدرة على تصحيح - الخطأ

بما أننا نركز على كيفية بناء الشيفرة بهدف الحصول على ضمانات مؤكدة على القدرة على تصحيح الخطأ، سنبحث في فهم العلاقة بين عدد الأخطاء التي يمكن أن تصححها الشيفرة والمسافة بين الكلمات الشيفرة. بديهياً، لابدّ أن تكون كلمات الشيفرة منتشرة كفاية بحيث لا تتقاطع الكرات المرتبطة بها. يسمى منهج فك شيفرة رسالة عن طريق استبدال كل كلمة بالكلمة الشيفرة الأقرب لها بفكّ تشفير المسافة الأقل (Minimum Distance Decoding).



الشكل 7.3: بعض كرات نصف القطر 1 من شيفرة هامينغ $(7,2^4,3)$.

في جدول 7.3 لشيفرة هامينغ $(7,2^4,3)$، أقل مسافة بين أي كلمتي شيفرة هي 3. إن برهنة هذا تتطلب أمرين، تحديداً

- التحقق من أن $h(c_1,c_2) \geq 3$ لجميع كلمات الشيفرة المتميزة c_1 و c_2.
- إيجاد كلمتي شيفرة تقعان على بعد 3 من بعضهما على وجه التحديد.

يتضمن الجزء الأول وجود $\binom{16}{2} = 120$ زوج، وهذا أمر شاق لكنه ممكن.

بعد الانتهاء من الجزء الأول، يتبع الجزء الثاني بملاحظة أن

$h(0000000,0010110) = 3$.

بامتلاكنا شيفرة ثنائية C، نقول إن لها المسافة الأقل d، شرط أن d هي أقل قيمة لمسافة هامينغ بين أي كلمتي شيفرة:

$$d \coloneqq \min\{h(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}'): \boldsymbol{c},\boldsymbol{c}' \in \mathcal{C}, \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{c}'\}$$

نشير إلى الشيفرة باستخدام عبارة ثلاثية:

(طول كلمات الشيفرة، عدد كلمات الشيفرة، المسافة الأقل)

إذن إذا كان $\mathcal{C}$ شيفرة في $\mathbb{B}^n$ بمسافة أقل مقدارها d، فإننا نسميها شيفرة ثنائية $(n,|\mathcal{C}|,d)$، حيث $|\mathcal{C}|$ عبارة عن حجم المجموعة $\mathcal{C}$.

حالما نعرف أقل مسافة في الشيفرة، تبيّن لنا المبرهنة التالية إمكانية تصحيح - الخطأ.

المبرهنة 7.4.1، إذا كانت

كلمتي أي بين مسافة وأقل ثنائية شيفرة $\boldsymbol{C}$

$\left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor$ أقصى كحد تصحح أن يمكن $\boldsymbol{C}$ فإن ،$\boldsymbol{d}$ هي شيفرة **خطأ باستخدام فك شيفرة المسافة الأقل. إضافة إلى ذلك، تعتبر هذه أفضل إمكانية.**

البرهان: افترض أن $\mathcal{C}$ هي شيفرة في $\mathbb{B}^n$ حيث أقل مسافة تساوي $\boldsymbol{d}$. افترض أنه تم إرسال كلمة الشيفرة $c \in \mathcal{C}$، ويتم استلام الكلمة $v \in \mathbb{B}^n$، وأنه يحصل $\left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor$ خطأ في الإرسال. هذا يعني أن المسافة بين c و v تحقق

$$h(c,v) \leq \left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor$$

بحيث تقع v في كرة نصف القطر $\left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor$ في منتصف كلمة الشيفرة c.

يجب أن نبيّن أن هذه الكلمة v لا تنتمي لأي كرة أخرى نصف قطرها $\left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor$ مركزة على أي كلمة شيفرة أخرى. من أجل ذلك، لتكن $\boldsymbol{c}'$ أي كلمة شيفرة غير $\boldsymbol{c}$. بالافتراض وباستخدام متباينة المثلث $h(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}') \leq h(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v}) + h(\boldsymbol{v},\boldsymbol{c}')$. وبالتالي:

$$h(\boldsymbol{v},\boldsymbol{c}') \geq h(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}') - h(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})$$

$$\geq d - h(c,v) \quad \text{طالما أن } h(c,c') \geq d$$

$$\geq d - \frac{d-1}{2} \quad \text{طالما أن } h(c,v) \leq \left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor \leq \frac{d-1}{2}$$

$$> \left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor$$

وهذا يثبت أن $h(v,c') > \left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor$، وعليه فإن v لا تنتمي لأي كرة نصف قطرها $\left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor$ مركزة في كلمة شيفرة غير c. وهذا يكمل إثبات أن $\mathcal{C}$ يمكن أن تصحح حتى $\left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor$ خطأ. سنؤجل إثبات أن هذه هي الإمكانية الأفضل 9– أي أن $\mathcal{C}$ يمكن أن تصحح أكثر من عدد الأخطاء هذا إلى التمرين. ■

ثمة طريقة أخرى لصياغة هذه المبرهنة: إذا كانت $\mathcal{C}$ شيفرة ثنائية وأقل مسافة بين أي كلمتي شيفرة تساوي $2e + 1$، فإن $\mathcal{C}$ يمكن أن تصحح حتى e خطأ كحد أقصى باستخدام فك تشفير المسافة الأقل.

السؤال 302: خذ الشيفرة التالية في $\mathbb{B}^4$:

$$\mathcal{C} = \{0000,1100,0110,0011,1111\}$$

ما هي أقل مسافة؟ كم عدد الأخطاء التي يمكن تصحيحها؟ ارسم مخططاً كما في الشكل 7.3 لكن يحتوي جميع الكلمات وعددها 16 في $\mathbb{B}^4$ مع كرات كلمات الشيفرة الخمس.

حدود حزم الكرة والشيفرات الكاملة

سنشتق فيما يأتي شرطاً بحيث يحدّ من بحثنا بشكل كبير عما يعرف بالشيفرات الكاملة. ويتضمن نقاشاً حول العدّ.

إذا كانت $\mathcal{C}$ شيفرة على $\mathbb{B}^n$، فإن عدد الكلمات في أي كرة نصف قطرها e وممركزة عند كلمة الشيفر$\boldsymbol{c}$ هي

$$\sum_{i=0}^{e} \binom{n}{i}$$

لأنه يوجد $\binom{n}{0}$ كلمة تختلف عن c في صفر من المواقع، وعدد الكلمات $\binom{n}{1}$ التي تختلف عن c في موقع واحد تحديداً، وهكذا دواليك حتى $\binom{n}{e}$ التي تختلف في e موقع بالتحديد. (في السؤال 301، كان يجب أن تكون إجابتك

$\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}=22$ و$\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}=42$ على التوالي)أ في الشكل 7.3، تحتوي كل كرة بنصف قطر-1 على $\binom{7}{0}+\binom{7}{1}=8$ كلمات.

إذا كانت الشيفرة تصحح عدد e من الأخطاء كحد أقصى، فإن كرات نصف القطر-e المركزة عند كلمات الشيفرة تكون منفصلة. إذا أخذت معاً، فإنها لا يمكن أن تحتوي أكثر من كامل مجموع الكلمات في $\mathbb{B}^n$.

وبناءً على ذلك:

(7.7)

$$|C|\cdot\sum_{i=0}^{e}\binom{n}{i}\leq 2^n \quad \text{أو} \quad |C|\leq\frac{2^n}{\sum_{i=0}^{e}\binom{n}{i}}$$

يعرف هذا باسم **حدود حزم الكرة** (Sphere Packing Bound) أو أحياناً **بحدود هامينغ** (Hamming Bound) لأنها تحدّ من عدد كلمات الشيفرة حسب متطلب الكرات - المنفصلة. أي شيفرة ينطبق عليها حد حزم الكرة (7.7) عند المعادلة تكون **شيفرة كاملة** (Perfect Code). وتكون المبرهنة التالية فورية.

المبرهنة 7.4.2 (حد حزم الكرة): إذا كانت $\mathcal{C}$ شيفرة كاملة على $\mathbb{B}^n$ تُصحّح e من الأخطاء كحد أقصى، فإن $\sum_{i=0}^{e}\binom{n}{i}$ لابدّ أن يكون قوة العدد 2. في هذه الحالة، تحتوي $\mathcal{C}$ كلمات شيفرة عددها $\frac{2^n}{\sum_{i=0}^{e}\binom{n}{i}}$.

الشيفرات الطفيفة والشيفرات غير الطفيفة

تُعرف الشيفرة في $\mathbb{B}^n$ التي تُصحح إما صفراً أو n خطأ **بالشيفرة الطفيفة**. أي شيفرة أخرى تكون **شيفرة غير طفيفة**. يطلب السؤال التالي توضيح سبب تسمية الشيفرة الطفيفة بهذا الاسم.

السؤال 303: عرّف الشيفرات التالية على $\mathbb{B}^3$:

$$\mathcal{C}_1 = \{000,001,101,100,011,101,110,111\}$$
$$\mathcal{C}_2 = \{000\}$$

وضّح لماذا تصّحح الشيفرة الأولى صفراً خطأً والثانية تصحّح ثلاثة أخطاء. ثم فسّر سبب كون الشيفرتين عديمتي الفائدة لنقل المعلومات في سياق تصحيح - الخطأ.

مثال: وجود شيفرة كاملة غير طفيفة

هل يمكن وجود شيفرة كاملة غير تافهة في $\mathbb{B}^6$؟

افترض وجود واحدة. تتضمن المبرهنة 7.4.2 أن $\sum_{i=0}^{e}\binom{6}{i}$ هو قوة العدد 2 لبعض قيم e التي تحقق $1 \leq e \leq 5$. (تذكر أن $e = 0$ و $e = 6$ ترتبطان بشيفرات طفيفة). بما أن

$$\begin{aligned}
\binom{6}{0} + \binom{6}{1} &= 7\\
\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} &= 22\\
\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} &= 42\\
\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} &= 57\\
\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} &= 63
\end{aligned}$$

وأي منها ليس من قوى 2، فإن لدينا تناقض. لا يوجد أي شيفرة كاملة غير طفيفة في $\mathbb{B}^6$.

السؤال 304: هل من الممكن وجود شيفرة كاملة غير طفيفة في $\mathbb{B}^{15}$ حسب المبرهنة 7.4.2؟ إن وجدت، كم خطأ يمكن لهذه الشيفرة أن تصحّح؟

الشروط الضرورية للشيفرات الثنائية الكاملة لتصحيح خطأ واحد

إذا كانت الشيفرة الثنائية الكاملة تصحّح خطأ واحداً $e = 1$، فإنها وحسب المبرهنة 7.4.2 تتضمن

$\frac{2^n}{1+n} = \frac{2^n}{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}}$ كلمة شيفرة، حيث $n + 1$ هو قوة للعدد 2. بكتابة $2^m = n + 1$ لبعض قيم m نحصل على $n = 2^m - 1$. وعليه إذا وجدت شيفرة تصحيح خطأ واحد كاملة، لابدّ أن تكون موجودة في $\mathbb{B}^{2^m-1}$ حيث m بعض الأعداد الصحيحة. في هذه الحالة، يكون عدد كلمات الشيفرة

$$\frac{2^n}{1+n} = \frac{2^{2^m-1}}{1+2^m-1} = 2^{2^m-m-1}$$

يجب أن تحقق هذه الشيفرة أقل مسافة $d = 2e + 1 = 3$ بين الكلمات الشيفرة. إن وجدت، ويجب أن نستخدمها كشيفرة ثنائية $(2^m - 1, 2^{2^m-m-1}, 3)$. عندما $m = 3$، يكون لدينا الشيفرة الثنائية المألوفة $(7, 2^4, 3)$.

بناء شيفرات ثنائية كاملة لتصحيح خطأ واحد

سنبيّن الآن وجود شيفرات ثنائية $(2^m - 1, 2^{2^m-m-1}, 3)$ لجميع قيم $m \geq 2$، وبناء على ذلك سنثبت أن الشروط الضرورية التي اشتقّت للتوّ كافية أيضاً. ستكون هذه الشيفرات كاملة لتصحح خطأ واحداً. سنعمل على بناء هذه الشيفرات باستخدام مصفوفة.

الشيفرات الخطية والمصفوفات المولدة

الشيفرة الخطية (Linear Code) في $\mathbb{B}^n$ هي عبارة عن فضاء جزئي متّجهي من $\mathbb{B}^n$. بصورة مكافئة، الشيفرة الخطية في $\mathbb{B}^n$ هي مجموعة من كل مجاميع الصفوف

في المصفوفة $n \times k$، وكل مدخلة تكون إما 0 أو 1. تسمى هذه المصفوفة بالمصفوفة المولّدة للشيفرة.

يكشف اختبار شيفرة هامينغ (7,4,3) في الجدول 7.3 أنه لو أزلنا آخر 3 خانات من كل كلمة شيفرة سيتبقى قائمة من الأعداد الثنائية الستة عشر المكونة من 4 خانات. لبناء هذه الشيفرة من خلال المجاميع الخطية لصفوف المجموعة، سيكون من المنطقي البدء بالمصفوفة.

$$G_7 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{pmatrix}$$

حيث سيتم تحديد الـ *. إن وجود مصفوفة الوِحدة 4×4 يسهّل بناء الشيفرة.

السؤال 305: افترض أنه تمّ تحديد النجوم في المصفوفة G_7 بنجاح، كيف ستكتب 1011010 كتجميع خطي لصفوف المصفوفة G_7؟ كيف ستكتب 0010110؟

الآن يجب أن نحدد النجوم * بحيث تعمل الشيفرة على تصحيح خطأ واحد. العلاقة بين تصحيح الخطأ وأقل مسافة الموضّحة في المبرهنة 7.4.1 تفيد بأن المسافة بين أي كلمتي شيفرة يجب أن تكون 3 على الأقل. إذن لا يقتصر الأمر على أن المسافة

بين أي سطرين في G_7 تساوي 3 على الأقل (سيكون لكل صف واحدة من كلمات الشيفرة)، بل إن الأمر نفسه ينطبق على جميع المجاميع الخطية الـ16 الممكنة للصفوف.

أولاً لاحظ أنه لا يمكن أن يتضمن أي صف في G_7 أقل من ثلاث واحدات. وهذا لأن **0**=0000000 هي كلمة شيفرة (وتساوي المجموع الخطي المكون من 0) والمسافة بين **0** وأي كلمة تساوي عدد الواحدات في تلك الكلمة. وعليه فإنه في كل صف، لابدّ أن تكون اثنتان من ثلاث نجمات * عبارة عن واحدات. إذ لابد أن يتم اختيار كل جزئية *** في كل صف في G_7 من 011، 101، 110، 111.

السؤال 306: لماذا لا يتحقق متطلب المسافة الأقل إذا كان نفس العدد ذي الخانات الثلاث يحتل الجزئية * في صفين مختلفين في G_7؟**

يجبرنا هذا على استخدام كل من 011، 101، 110، 111 مرة واحدة فقط. نختار

(7.8)

$$G_7 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

لكن إذا أنتجنا كلمات الشيفرة الـ16 الممكنة كافّة من خلال مجاميع خطية للصفوف الأربعة، هل سنحصل على متطلب المسافة الأقل؟ تساوي المبرهنة التالية

مشكلة إيجاد أقل مسافة بمشكلة (الأسهل) إيجاد مجموعة خطية غير صفرية لأقل وزن. سنؤجل البرهان إلى أن نوضّح كيفية تطبيق المبرهنة على المصفوفة G_7 المبيّنة أعلاه.

المبرهنة 7.4.3: إذا كان G مصفوفة 1−0 و$\mathcal{L}$ مجموعة جميع المركبات الخطية لصفوف G، في نموذج العمل 2، فإن أقل مسافة هامينغ بين أي عنصرين في $\mathcal{L}$ تساوي أقل وزن للعناصر غير الصفرية في $\mathcal{L}$.

فيما يلي توضيح كيف تتيح لنا المبرهنة استنتاج أن المسافة الأقل للشيفرة المولّدة بالمصفوفة G_7 تساوي 3: يكفي أن نأخذ كل مركب خطي غير صفري ممكن لصفوف G_7 والتأكد من أن النتيجة عبارة عن كلمة وزنها على الأقل 3. سيبدو المركب الخطي الممثل كما يلي

$$a_1R_1 \oplus a_2R_2 \oplus a_3R_3 \oplus a_4R_4$$

حيث R_i هو الصف i من المصفوفة G_7 وكل واحدة من المعاملات a_i تكون إما 0 أو 1. فعلياً، المتطلب الأخير يعني أن كل صف إما أن يكون "داخل" (المعامل 1) أو "خارج" (المعامل 0) المركب الخطي. (هذا تسهيل تتمتع به الشيفرة الخطية فقط. سوف نرى أمثلة على الشيفرات غير الخطية في القسم 7.5).

أولاً، لاحظ أن وزن كل صف (أي المركب الخطي بمعامل واحد فقط يساوي 1) يساوي 3. لأي ثلاثة صفوف أو أكثر، سيوجد ثلاث واحدات بين الأعمدة الثلاثة الأولى، وعليه فإن الوزن سيكون 3 على الأقل. بناءً على ذلك، كل المركبات الخطية غير الصفرية تنتج عناصر وزنها 3 على الأقل. لاحظ أن وزن الصف الأول من المصفوفة G_7 يساوي 3 تحديداً، نستنتج أن الوزن الأقل للمركب الخطي غير الصفري يساوي 3. حسب المبرهنة، المسافة الأقل بين أي كلمتي شيفرة تساوي 3.

السؤال 307: عرّف

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

تتضمن الشيفرة المولّدة بالمركبات الخطية للصفوف $2^3 = 8$ كلمة شيفرة. ما هي أقل مسافة بين كلمات الشيفرة؟ كم عدد الأخطاء التي يمكن لهذه الشيفرة تصحيحها؟

برهان المبرهنة

برهان المبرهنة 7.4.3: افترض أن A مصفوفة 1–0 و $\mathcal{L}$ مجموعة المركبات الخطية للصفوف كافة، في نموذج العمل 2. لتكن d مسافة هامينغ الأقل بين أي

عنصرين في $\mathcal{L}$، ولتكن w أقل وزن لعنصر غير صفري في $\mathcal{L}$. يجب أن نبيّن أن $w =$ d.

لتكن $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{L}$ تحقق $h(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = d$. فإن $wt(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v})$ تساوي d أيضاً (طالع السؤال 300). بما أن $\mathcal{L}$ مغلقة في عملية الجمع، فإن $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}$ تكون عنصراً في $\mathcal{L}$. وهذا يعني أن $w \leq d$ لأن $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}$ عنصر غير صفري في $\mathcal{L}$ له وزن d وأقل وزناً من w بين جميع العناصر غير الصفرية في $\mathcal{L}$.

لأجل التناقض، افترض أن $w < d$. إذن يوجد عنصر غير صفري $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ بحيث $wt(x) = w < d$. لكن سيكون $h(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = w < d$ وهكذا سيكون هناك عنصران في $\mathcal{L}$ أقرب من d. يتناقض هذا مع حقيقة أن d هي المسافة الأقل. وعليه فإن $w \geq d$ وهذا يكمل البرهان. ■

شيفرات هامينغ

تبني المصفوفة المولّدة شيفرة هامينغ $(7, 2^4, 3)$ بسهولة يمكن تعميمها على بناء شيفرات ثنائية كاملة

$$.(2^m - 1, 2^{m-m-1}, 3)$$

تعرف هذه الشيفرات **بشيفرات هامينغ** (Hamming Codes) على اسم العالم ريتشارد هامينغ (Richard Hamming).

المبرهنة 7.4.4 (هامينغ): لأي عدد صحيح m حيث $m \geq 2$، يوجد شيفرة كاملة

$(2^m - 1, 2^{m-m-1}, 3)$. وهذه شيفرة تصحيح خطأ واحد في $\mathbb{B}^{2^m-1}$ وتحتوي كلمات الشيفرة 2^{2^m-m-1}.

البرهان: افترض أن $\mathbb{B}^{2^m-1}$. عرّف المصفوفة

$$G := [\, I \mid A \,]$$

حيث:

- I هو محدد المصفوفة $(2^m - m - 1) \times (2^m - m - 1)$.
- A هو أي مصفوفة $(2^m - m - 1) \times m$، تتضمن صفوفها جميع هذه الكلمات في $\mathbb{B}^m$ بحيث تحتوي على الأقل واحدين.

لاحظ أن $\mathbb{B}^m$ تحتوي كلمة واحدة عدد الواحدات فيها صفر وعدد كلمات m تحتوي 1 واحداً تحديداً، إذن لابدّ أن الكلمات $2^m - m - 1$ في $\mathbb{B}^m$ تتضمن على الأقل واحدين.

نحن ندّعي أن G تولّد شيفرة كاملة $(2^m - 1, 2^{2^m-m-1})$. تتضمن صفوف المصفوفة G المدخلات

$2^m - m - 1 + m = 2^m - 1$ وهي بالتالي مدخلات في $\mathbb{B}^{2^m-1}$. بما أن وجود مصفوفة الوحدة

$(2^m - m - 1) \times (2^m - m - 1)$ على الطرف الأيسر من G فإن كل من المركبات الخطية الممكنة من صفوف G أي 2^{2^m-m-1} تنتج كلمة شيفرة مختلفة، إذن لابدّ من وجود 2^{2^m-m-1} كلمات شيفرة في هذه الشيفرة.

سنبيّن الآن أن كل كلمة شيفرة غير صفرية لها وزن 3 على الأقل. أي كلمة شيفرة عبارة عن صف وحيد فيG يكون فيها 1 واحد من بين المدخلات الأولى $2^m - m - 1$ وفيها على الأقل واحدان بين المدخلات المتبقية m. ووزن الشيفرة 3 على الأقل.

أي كلمة شيفرة تتشكّل بإضافة صفّين في G ستتضمن واحدين من بين المدخلات $2^m - m - 1$ وعلى الأقل 1 واحداً من بين المدخلات المتبقية m. العبارة الأخيرة صحيحة لأن كل صفوف A مختلفة. وزن كلمة الشيفرة هذه 3 على الأقل أيضاً.

أخيراً، أي كلمة شيفرة تتشكّل بإضافة ثلاثة صفوف أو أكثر في G ستتضمن 3 واحدات من بين أول مدخلات $2^m - m - 1$. وزن كلمة الشيفرة هذه 3 على الأقل.

وعليه فإن كل كلمة شيفرة غير صفرية وزنها على الأقل 3. أي صف في A فيه واحدان تحديداً سيرتبط بصف في G فيه 3 واحدات تحديداً، إذن في الواقع أقل وزن لي كلمة شيفرة غير صفرية يساوي 3. تفترض المبرهنة 7.4.3 ضمناً أن أقل مسافة بين أي كلمتي شيفرة تساوي 3. أنشأنا شيفرة ثنائية بالمعايير

$(2^m - 1, 2^{2^m-m-1}, 3)$. وهي شيفرة كاملة أنها تحقق حد حزم الكرة.

■

السؤال 308: اكتب مصفوفة مولدة لشيفرة هامينغ $(\mathbf{15}, \mathbf{2^{11}}, \mathbf{3})$.

الملخص

توفّر شيفرة تصحيح الخطأ منهجاً لدقة الاتصالات على الرغم من وجود أخطاء في الإرسال. بينّا كيفية بناء عائلة من الشيفرات الثنائية باستخدام مركبات خطية من صفوف المصفوفة المولّدة. هذه الشيفرات هي شيفرات تصحيح خطأ واحد كاملة لأنها، وبافتراض وجود خطأ واحد على الأكثر في إرسال كل كلمة شيفرة، توفّر اتصالاً دقيقاً بالكامل. توجد مثل هذه الشيفرات عندما يكون طول كلمة الشيفرة أقل من قوى 2 تحديداً: 3، 7، 15، 31، 63 وهكذا دواليك.

التمارين

1. فك تشفير قيم التدرج الرمادي لصورة 4×4 مرسلة حسب شيفرة تصحيح الخطأ الواحد المبيّنة في الجدول 7.3.

0100111	1110110	1010101	1011001
0100111	1000001	1000000	0111101
1101001	0101011	0101010	1110000
0110011	0110010	0110010	0001111

بافتراض حدوث خطأ واحد على الأكثر في إرسال كل كلمة شيفرة، كم عدد الأخطاء التي حدثت فعلياً؟

2. برهن أن متباينة المثلث لقياس مسافة هامينغ.

3. في $\mathbb{B}^8$، جد عدد الكلمات في $S_4(01110110)$. ثم جد عدد كلمات$\mathbf{v}$ التي تحقق $\mathrm{wt}(01110110 \oplus \mathbf{v}) \geq 4$.

4. عرّف العملية التالية على الكلمات في $\mathbb{B}^n$:

$$\mathrm{v} * \mathrm{w} := (v_1 w_1, v_2 w_2, \ldots, v_n w_n)$$

حيث يأخذ حاصل الضرب النموذج 2.

برهن: إذا كان $\mathrm{v} * \mathrm{w} \in \mathbb{B}^n$ فإن $\mathrm{wt}(\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = \mathrm{wt}(\mathbf{v}) + \mathrm{wt}(\mathbf{w}) - 2\mathrm{wt}(\mathbf{v} * \mathbf{w})$

5. برهن أن $\text{wt}(\mathbf{v}\oplus\mathbf{w}) \geq \text{wt}(\mathbf{v}) - \text{wt}(\mathbf{w})$. أيضاً متى تكون المعادلة صحيحة؟

6. برهن أنه لا يوجد شيفرة كاملة في $\mathbb{B}^n$ يمكن أن تصحح أخطاء لغاية $n - 1$.

7. إذا كنت ترغب في استخدام شيفرة تصحيح خطأ واحد ثنائية كاملة لإرسال صورة ذات دقّة عالية، حيث تتراوح قيم التدرج الرمادي للبيكسلات بين 0 و65535. ما هي أصغر شيفرة هامينغ يمكنك استخدامها؟ كم طول كل كلمة شيفرة؟ ما هي نسبة الكلمات الشيفرة المئوية التي ستستخدمها لفك شيفرة قيم التدرج الرمادي؟

8. لكلٍ من المصفوفات المولّدة التالية، كم خطأ يمكن للشيفرة الخطية الناتجة أن تصحح؟ دعّم إجابتك.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9. أكمل برهان المبرهنة 7.4.1 ببيان أن الشيفرة لا يمكن أن تُصحّح أكثر من $\left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor$ خطأ باستخدام فك تشفير أقل مسافة. (توجيه: إحدى طرق عمل ذلك أن تبيّن أنه إذا كان نصف قطر الكرات أكبر، فإنها "ستتداخل").

10. افترض أن C شيفرة في $\mathbb{B}^n$ تصحّح عدد e من الأخطاء، حيث $|C| > 2$. برهن أن $e < \frac{n-1}{2}$

11. فيما يلي طريقة لفك تشفير شيفرة هامينغ $(7, 2^4, 3)$. عرّف

$$\boldsymbol{d}_1 := 0001111\ \boldsymbol{d}_2 := 0110011\ \boldsymbol{d}_3 := 1010101$$

عندما تستلم الكلمة $\mathbf{x}$ ، ابنِ $\mathrm{c} := (\mathbf{x}.\boldsymbol{d}_1, \mathbf{x}.\boldsymbol{d}_2, \mathbf{x}.\boldsymbol{d}_3)$ حيث إن حاصل الضرب محسوب نموذج 2. c هو عدد ثنائي مكون من 3 خانات، لكن عند تحويله لعدد عشري فإنه يعرّف الموقع في $\mathbf{x}$، لا شك أن 1001100 كلمة الشيفرة الصحيحة. مثال آخر، عندما $\mathbf{x} = 0110011$ فإن $\mathrm{c} = (0{,}0{,}0)$ و000 في العدد الثنائي يكون 0 في العدد العشري – لا يحدث خطأ هنا لأن 0110011 هي كلمة شيفرة.

برّر طريقة فك التشفير هذه. قد ترغب أولاً في إثبات أنه إذا كان $\mathbf{x}$ كلمة شيفرة فإن $\mathrm{c} = (0{,}0{,}0)$. ثم أثبت إذا كانت $\mathbf{x}$ ليست كلمة شيفرة، فإن c تحدّد موقع الخطأ.

ملاحظات سريعة

حسب حساب تومبسون (Thompson) (1983)، أعطت خيبة أمل هامينغ عام 1947 في مختبرات تلفون بيل دافعاً لاكتشافه. يبدو أن الحاسوب، فور اكتشاف خطأ في أثناء تشغيل أحد برامج هامينغ، ألغى الحوسبة كلياً من دون فرصة لاسترجاعها. بعد لعن الحاسوب، فكّر هامينغ، "إذا كانت الآلة قادرة على تحديد خطأ، لماذا لا تستطيع تحديد موقع الخطأ وتصحّحه؟" ومن هنا ولّد مجال شيفرات تصحيح الخطأ.

يُشار عادةً للشيفرات الخطية كشيفرات (n,k,d)، حيث k رتبة المصفوفة المولّدة. وعليه فإن شيفرة هامينغ $(7,2^4,3)$ تعرف بشيفرة (7,4,3)، أو أحياناً شيفرة (7,4).

5.7 شيفرات من تصاميم، تصاميم من شيفرات

شيفرات هامينغ من القسم الأخير هي شيفرات تصحيح خطأ واحد ثنائية كاملة. في هذا القسم، سنتناول سؤالين أساسيين. **الأول**، هل هناك شيفرات كاملة أخرى؟ **والثاني**، هل هناك أي شيفرات (سواء كانت كاملة أم لا) تصحّح أكثر من خطأ واحد؟ بالإجابة عن هذين السؤالين، سنرى العلاقة الوثيقة بين التصاميم التوافقية وشيفرات تصحيح الخطأ.

لنأخذ مرة أخرى تصميم (7,3,1) المتماثل ولنفترض أن A_1 مصفوفة حدوث والتي بيّناها في بداية القسم 7.2:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

لنكوّن شيفرة $\mathcal{C}_1$ في $\mathbb{B}^7$ بأخذ صفوف هذه المصفوفة ككلمات شيفرة. (لا نعامل A_1 كمصفوفة مولدة؛ بل تكوّن صفوف A_1 لوحدها الشيفرة). لاحظ أن مسافة هامينغ بين أي صفّين من A_1 تساوي 4 تحديداً. وعليه فإن أقل مسافة لـ$\mathcal{C}_1$ تساوي 4 وبذا فهي تصحح لغاية $\left\lfloor \frac{4-1}{2} \right\rfloor = 1$ خطأ حسب المبرهنة 7.4.1.

لا يشكّل هذا تحسيناً لمعرفتنا لأننا نعرف مسبقاً شيفرة تصحيح خطأ واحدة في $\mathbb{B}^7$: شيفرة هامينغ $(7, 2^4, 3)$. لكن لا تدع المصطلح "كامل" يلقي بظلاله على أي

شيفرة غير كاملة. في سياقات محددة، تُفضّل شيفرة $\mathcal{C}_1$- على شيفرة هامينغ. إذا استخدمنا $\mathcal{C}_1$ واستلمنا 1101111، سنعلم أن أكثر من خطأ قد حدث لأن هذه الكلمة ليست ضمن مسافة 1 من أي من كلمات الشيفرة السبع المبينة في A_1. (هندسياً، ليست في أي كرة تقع في منتصف كلمة الشيفرة). في تلك الحالة يمكننا أن نطلب إعادة إرسال[3].

تضع شيفرة هامينغ $(7, 2^4, 3)$ كل كلمة في $\mathbb{B}^7$ ضمن مسافة 1 في كلمة شيفرة فريدة، لأنها كاملة. إذا حدث خطآن أو أكثر، سيتم فك تشفير شيفرة هامينغ بطريقة خاطئة بلا شك. إذا حدث نفس الشيء عند استخدام $\mathcal{C}_1$، فإننا قد نستطيع تحديد الخطأ.

السؤال 309: كم عدد الكلمات في

– القطر نصف كرات ضمن موجودة $\mathbb{B}^7$

A_1 المصفوفة صفوف في المركزة السبع **1**؟ **كم عدد الكلمات غير الموجودة في أي من هذه الكرات؟**

لكن راقب ماذا يحدث عندما ننشئ شيفرة من مصفوفة الحدوث لتصميم أكبر، في هذه الحالة تصميم (13,4,1) المتماثل. توجد هذه الشيفرة في $\mathbb{B}^{13}$ وتتضمن 13

[3] هذا الأمر مطلوب في تطبيقات عديدة كمشغّلات دي في دي وغيرها من الأجهزة الإلكترونية الشخصية حيث، وبخلاف مثال مسبار الفضاء، تعتبر تكاليف إعادة الإرسال منخفضة.

كلمة شيفرة. من دون كتابة مصفوفة الحدوث، يمكننا أن نبيّن أن أقل مسافة لهذه الشيفرة هي 6. لأن التصاميم المتماثلة مرتبطة (راجع المبرهنة 7.2.3)، إن أي صفّين في المصفوفة يتشاركان في 1 في موقع $\lambda = 1$ تحديداً. يحتوي كل صف على أربع واحدات (لأن $r = k = 4$)، إذن هذا يعني أن هناك $k - \lambda = 3$ مواقع حيث الصف الأول فيها يحتوي على 1 والصف الثاني يحتوي على 0. وبناء على ذلك، مسافة هامينغ بين هذين الصفين تساوي $2(k - \lambda) = 6$. وينطبق هذا على أي زوجين من الصفوف وبالتالي على المسافة بين أي كلمتي شيفرة، وعليه إن أقل مسافة تساوي 6. حسب المبرهنة 7.4.1، هذه الشيفرة يمكن أن تصحّح أخطاء لغاية

$$\left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{6-1}{2}\right\rfloor = 2$$

الآن، بدأ يظهر لنا الحل. هذه ليست شيفرة كاملة، لكنها تصحّح خطأً آخر أكثر من شيفرات هامينغ.

ينطبق هذا التحليل نفسه بشكل عام. إن أقل مسافة بين أي صفين في مصفوفة الحدوث في تصميم (v, k, λ) المتماثل تساوي $d \coloneqq 2(k - \lambda)$. تبيّن النظرية 7.4.1 أن الشيفرة تصحح أخطاء لغاية

$$\left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{2\left(k-\lambda\right)-1}{2}\right\rfloor = \left\lfloor k - \lambda - \frac{1}{2}\right\rfloor = k - \lambda - 1$$

المبرهنة 7.5.1: إذا كانت A مصفوفة حدوث للتصميم (v, k, λ) المتماثل، فإن صفوف A تشكّل شيفرة في $\mathbb{B}^v$ تحتوي كلمات شيفرة عددها v ومسافتها الأقل تساوي $2(k - \lambda)$. هذه الشيفرة تصحح لغاية $k - \lambda - 1$ خطأ.

شيفرات ثنائية كاملة تولد تصاميم

الآن وقد رأينا كيف تُنتِج بعض التصاميم شيفرات، سنختبر طريقة يمكن أن تنتج الشيفرات من خلالها تصاميم. في هذه الحالة، نبيّن كيفية بناء نظام شتاينر ثلاثي من شيفرة هامينغ. بما أننا نعرف كيفية استخدام المصفوفات المولّدة لبناء شيفرات هامينغ، فإن هذه النتيجة تعطينا طريقة جديدة لبناء نظم شتاينر الثلاثية. البرهان مبشّر لأنه يبيّن التفاعل بين خاصية التوازن-1 للتصميم وخاصية حزم كرة نصف القطر-1 للشيفرة الثنائية الكاملة.

المبرهنة 7.5.2: إذا كانت $\mathcal{C}$ شيفرة هامينغ $(2^m - 1, 2^{2^m-m-1}, 3)$ حيث $m \geq 3$، وA مصفوفة تحتوي أعمدتها على كلمات الشيفرة ذات الوزن 3 في $\mathcal{C}$، فإن A تكون مصفوفة حدوث لنظام شتاينر الثلاثي على التنويعات $2^m - 1$.

البرهان: افترض أن $\mathcal{C}$ وA كما هما معرفتان في الفرضية، ولتكن $\mathcal{D}$ تصميم. له مصفوفة حدوث A. التصميم $(2^m - 1)$ هو تصميم $(2^m - 1,3,1)$. حالما نوضّح أن التصميم $\mathcal{D}$ غير كامل، وعناصره $v = 2^m - 1, k = 3, \lambda = 1$، فإن البرهان

سيكون كاملاً. وهذا لأن أي تصميم غير مكتمل وموحّد ومتوازن سيكون بالضرورة منتظماً وبالتالي فهو تصميم ذو المجموعات الفرعية المتوازن غير المكتمل. (طالع التمرين 8 في القسم 7.1).

أولاً، نلاحظ أن $\mathcal{D}$ هي عبارة عن تصميم موحد -3 (أي أن $k = 3$) لأن كل عمود في A، وهو كلمات شيفرة وزنها 3، يرتبط بمجموعة فرعية حجمها 3 في $\mathcal{D}$.

تالياً، نرى أن $\mathcal{D}$ غير مكتملة لأن $m \geq 3$ تعني أن $v = 2^m - 1 \geq 7 > 3 = k$. الآن، كل كلمة شيفرة هي عنصر من $\mathbb{B}^{2^m-1}$ إذن تحتوي أعمدة المصفوفة A على المدخلات $2^m - 1$. هذا ليس كافٍ بعد لبيان أن $v = 2^m - 1$ لأنه ينبغي علينا التأكد من أن كل التنويعات موجودة في $\mathcal{D}$. بمعنى آخر، علينا أن نستبعد احتمال وجود صف كل مدخلاته صفر في A. يتبع ذلك، من البرهان، أن $\lambda = 1$. وهو القسم المثير للاهتمام.

لإثبات أن $\lambda = 1$، لتكن i و j تنويعان في التصميم $\mathcal{D}$. علينا إثبات أن i و j يظهران معاً في مجموعة فرعية واحدة تحديداً في $\mathcal{D}$. بصورة مكافئة، علينا أن نبين أن A تحتوي عموداً واحداً يتشارك فيه الصف i والصف j في القيمة 1. لكن كل عمود في A هو عبارة عن كلمة شيفرة من $\mathcal{C}$ وزنها 3، إذن ما علينا سوى بيان أن $\mathcal{C}$ تحتوي كلمة شيفرة واحدة تحديداً تحتوي العنصر 1 في الموقعين i و j.

عرّف $\boldsymbol{v}_{ij}$ لتكون كلمة في $\mathbb{B}^{2^m-1}$ تحتوي على 1 في الموقعين i و j، وعلى 0 في المواقع الأخرى كافة. وهذه الكلمة وزنها 2 إذن هي ليست كلمة شيفرة في $\mathcal{C}$. لكن $\mathcal{C}$ عبارة عن شيفرة كاملة مسافتها الأقل $d = 3$، إذن تقع $\boldsymbol{v}_{ij}$ ضمن كرة نصف القطر 1 لكلمة شيفرة واحدة تحديداً، لنقل c. يجب أن تكون هذه كلمة شيفرة وزنها 3، بالنسبة إلى الكلمة التي وزنها 2 فإنها تكون ضمن مسافة 1 كلمة وزنها 1 أو كلمة وزنها 3، ولا تحتوي $\mathcal{C}$ على أي كلمات شيفرة وزنها 1. إضافة لذلك، يجب أن تحتوي c على 1 في الموقعين i و j، لأن الطريقة الوحيدة لتغيير $\boldsymbol{v}_{ij}$ إلى كلمة وزنها 3 تكون بتغيير 0 إلى 1. وهذا يكمل توضيح أن $\lambda = 1$ وبالتالي يكتمل برهان النظرية. ■

يُعنى التمرين 1 بتعميم هذه النتيجة على شيفرات تصحيح الأخطاء e الثنائية الكاملة.

الشيفرات الثنائية الكاملة الوحيدة هي...

عند هذا الحد، ذكرنا إحدى نتيجتين حصلنا عليهما فيما يتعلق بالشيفرات الكاملة. النتيجة الأولى تُعنَى بالشيفرات الثنائية الكاملة. تتكون شيفرة هامينغ من عائلة من الشيفرات الثنائية الكاملة المصححة لخطأ واحد عناصرها $(2^m - 1, 2^{2^m-m-1}, 3)$. تذكّر حد حزم الكرة (7.7) الذي يضع الحد العلوي على عدد كلمات الشيفرة في شيفرة تصحيح الخطأ e في $\mathbb{B}^n$. تحديداً

$$|\mathcal{C}| \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{e}\binom{n}{i}}$$

الشيفرات الثنائية الكاملة هي تلك الشيفرات التي توافق حد حزم الكرة. لذا عندما تكون m عدداً صحيحاً، $m \geq 2$، يشير الزوج المرتب $(n,e) = (2^m - 1,1)$ إلى أن المقام $\sum_{i=0}^{e}\binom{n}{i}$ هو قوة للعدد 2 وعليه يكون الحد العلوي عدداً صحيحاً.

هل هناك أي أزواج أخرى (n,e) كهذا؟ للمفاجأة، ثمة زوجان آخران هما $(n,e) = (23,3)$ و $(n,e) = (90,2)$

السؤال 310: أكّد صحة أن $\sum_{i=0}^{e}\binom{n}{i}$ يساوي قوة العدد 2 في كل حالة. إذا وجدت شيفرات كاملة مرتبطة، كم عدد كلمات الشيفرة التي تحتويها؟

يتّضح وجود شيفرة فيها المجموعة الأولى من العناصر. نشر هذه الشيفرة مارسيل غولاي (Marcel Golay) عام 1949، وتعرف الآن باسم شيفرة غولاي $(23, 2^{12}, 7)$. لكن، لا يوجد شيفرة تحتوي المجموعة الثانية من العناصر، سنبرر كلاً من هذين التأكيدين، لكن قبل ذلك، سنذكر النتيجة الأولى المفاجئة. وهي تنصّ على أن الموسطات الممكنة الوحيدة للشيفرات الثنائية الكاملة هي شيفرات هامينغ وشيفرات غولاي فحسب.

المبرهنة 7.5.3: الشيفرات الثنائية الكاملة المصححة لخطأ واحد الممكنة هي شيفرات موسطاتها

$$\left(\mathbf{2^m - 1, 2^{2^m - m - 1}, 3}\right)$$

شيفرة هي الممكنة الوحيدة أخطاء لثلاثة المصححة الكاملة الثنائية الشيفرة.

$(23, 2^{12}, 7)$ غولاي). لا يوجد شيفرات ثنائية كاملة مصححة لأخطاء عددها e لأي قيم e.

ثمة ملاحظة للتوضيح في محلها. مجموعة الموسطات $(n, |\mathcal{C}|, d)$ لا تحدّد بالضرورة شيفرة فريدة. ثمة أمثلة على الشيفرات غير الخطية (وهي تلك التي لا يمكن إنشاؤها بمنهج المصفوفة المولدة) ذات نفس الموسطات التي تتضمنها شيفرات هامينغ $(2^m - 1, 2^{2^m-m-1}, 3)$. لكن شيفرة غولاي هي لا شك الشيفرة الثنائية الوحيدة $(23, 2^{12}, 7)$.

لذا فهذه المبرهنة تفيد بأنه يجب أن تتضمن الشيفرة الثنائية الكاملة نفس موسطات شيفرات هامينغ، وبخلاف ذلك فلابدّ أن تكون شيفرة غولاي $(23, 2^{12}, 7)$. ليس ثمة احتمالات أخرى.

شيفرة غولاي $(23, 2^{12}, 7)$

سنرسم الآن منهج بناء واحد ممكن لشيفرة غولاي الثنائية المصححة لثلاثة أخطاء. نبدأ ببناء ما يعرف بشيفرة غولاي الممتدة $\mathcal{G}_{24}$، وهي شيفرة في $\mathbb{B}^{24}$ موسطاتها $(24, 2^{12}, 8)$. هذه الشيفرة، وعلى الرغم من أنها ليست كاملة، إلا أنها مثيرة للاهتمام لأنها تتضمن نظام شتاينر كبير.

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & & & & & & & & & & & 0 & & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & & & & 1 \\
1 & & 1 & & & & & & & & & & 0 & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & & & \\
1 & & & 1 & & & & & & & & & 0 & & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & & & & 1 & & & & & & & & 0 & & & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & \\
1 & & & & & 1 & & & & & & & 0 & & & & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 \\
1 & & & & & & 1 & & & & & & 0 & 1 & & & & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 \\
1 & & & & & & & 1 & & & & & 0 & 1 & 1 & & & & 1 & & 1 & 1 & & 1 \\
1 & & & & & & & & 1 & & & & 0 & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & & 1 & 1 & \\
1 & & & & & & & & & 1 & & & 0 & & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & & 1 & 1 \\
1 & & & & & & & & & & 1 & & 0 & 1 & & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & & 1 \\
1 & & & & & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

الشكل 7.4: المصفوفة المولدة لشيفرة غولاي الممتدة $\mathcal{G}_{24}$.

نعرّف أولاً مصفوفة مولدة لـ $\mathcal{G}_{24}$. وهي المصفوفة 12×24 المبينة في الشكل 7.4 والتي يمكن اختصارها على النحو:

(7.9)

$$G_{24} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & & & \\ \vdots & & I_{11} & \vdots & & A_{11} & \\ 1 & & & 0 & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

حيث I_{11} عبارة عن مصفوفة الوحدة 11×11، وA_{11} عبارة عن مصفوفة الحدوث لتصميم متماثل (11,6,3). الأخيرة هي متممة التصميم المتماثل (11,5,2)؛ راجع التمرين 10 من القسم 7.1.

نحتاج لبعض العمل لبيان أن أقل مسافة تساوي 9 للشيفرة المولَّدة بواسطة المصفوفة G_{24}. باللجوء إلى المبرهنة 7.4.3، يكفي أن نبيّن أن كل كلمة شيفرة غير صفرية لها وزن 8 على الأقل. وبإلقاء نظرة خاطفة على G_{24} نرى أن كل صف من الصفوف الأحد عشر له وزن 8، بينما وزن الصف الأخير يساوي 12. يطلب التمرين 2 إثبات أن مجموع أي صفين له وزن 8 على الأقل. واقعياً، إحدى طرق التصدي لمشكلة تحديد الوزن الأقل تكون بعدّ عدد الكلمات الشيفرة لكل وزن ممكن. يتّضح أنه من بين 2^{12} كلمة شيفرة في $\mathcal{G}_{24}$، يوجد خمسة أوزان مختلفة فقط، كما هو مبيّن في الجدول اللاحق. لإثبات ذلك، وللحصول على نتائج أخرى مذكورة لاحقاً، طالع ماكويليامز وسلون (MacWilliams & Sloane) (1978).

الوزن w	0	8	12	16	24
# كلمات الشيفرة c حيث wt(c)= w		759	2576	759	1

الجدول 7.4: توزيع أوزان كلمات الشيفرة في $\mathcal{G}_{24}$.

السؤال 311: **ما هي صفوف $\mathcal{G}_{24}$ التي ستضيفها لبناء كلمة شيفرة واحدة وزنها 24؟**

الآن وقد بتنا نعرف أن $\mathcal{G}_{24}$ عبارة عن شيفرة ثنائية $(24, 2^{12}, 8)$، سنذكر نتيجتين لكن من دون برهانهما. **أولاً**، إذا حذفنا أي عمود في $\mathcal{G}_{24}$، فإن المصفوفة المتبقية 12×23 هي مصفوفة مولّدة للشيفرة $(23, 2^{12}, 7)$. نعلم أن مثل هذه الشيفرة تكون كاملة حسب النقاش الذي ورد في القسم الأخير. وتعرف هذه بشيفرة غولاي $\mathcal{G}_{23}$. إضافة لذلك، نذكر أنها فريدة.

المبرهنة 7.5.4: شيفرة غولاي $\mathcal{G}_{23}$ هي شيفرة تصحيح 3 أخطاء ثنائية كاملة موسطاتها $(23, 2^{12}, 7)$. إضافة إلى ذلك، أي شيفرة ثنائية أخرى لها نفس هذه الموسطات تكون مكافئة لشيفرة غولاي.

ثانياً، كلمات الشيفرة ذات الوزن 8 في $\mathcal{G}_{24}$ تنتج نظام شتاينر $S(5,8,24)$. تذكّر أن تصميم $S(5,8,24)$ هو تصميم $5-(24,8,1)$، وهكذا تظهر كل مجموعة جزئية من 5 عناصر للتنويعات في مجموعة فرعية واحدة فقط من الـ 759 مجموعة فرعية في هذا التصميم. سيكون بناء هذا التصميم كبيراً ومعقداً من دون مساعدة نظرية الشيفرات.

مبرهنة 7.5.5: إذا كانت A مصفوفة أعمدتها عبارة عن كلمات شيفرة وزنها 8 من شيفرة غولاي $\mathcal{G}_{24}$، فإن A تكون مصفوفة حدوث للتصميم $S(5, 8, 24)$.

لا توجد شيفرة كاملة في $\mathbb{B}^{90}$

على الرغم من أن $(n,e) = (90,2)$ تحقق حد حزمة الكرة، سنثبت الآن أنه لا توجد شيفرة تصحيح خطأين كاملة في$\mathbb{B}^{90}$. لأجل التناقض، افترض أن مثل هذه الشيفرة موجودة وسمّها $\mathcal{C}$. ستكون هذه الشيفرة $(90, 2^{78}, 5)$، لأن حد حزم الكرة ينطبق، فإن الشيفرة تتضمن $\frac{2^{90}}{\sum_{i=0}^{2}\binom{90}{i}} = \frac{2^{90}}{4096} = \frac{2^{90}}{2^{12}} = 2^{78}$ كلمة شيفرة مسافتها الأقل تساوي $d = 2e + 1 = 5$.

من دون فقدان العمومية، افترض أن $\mathbf{0} \in \mathcal{C}$. بما أن المسافة الأقل في $\mathcal{C}$ تساوي 5، كل كلمة شيفرة غير صفرية لها وزن 5 على الأقل. إضافة لذلك، يجب أن تتضمن $\mathcal{C}$ بعض كلمات الشيفرة التي وزنها 5. إن استراتيجيتنا للوصول إلى التناقض تتضمن بناء مجموعة محددة من الكلمات التي وزنها 3 ومن ثم اختبار كيف تُجزئ الكرات المركزة في كلمات الشيفرة ذات الوزن 5 هذه المجموعة.

من أجل ذلك، افترض وجود الكلمات الـ88 التالية في $\mathbb{B}^{90}$:

$$\begin{array}{rcccccccc}
\mathbf{w}^3 := & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\mathbf{w}^4 := & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\mathbf{w}^5 := & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{w}^{89} := & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
\mathbf{w}^{90} := & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}$$

أي أنه لـ $i = 3,4,5, \dots, 90$، تحتوي الكلمة $\boldsymbol{w}^i$ على أصفار فقط باستثناء الواحدات في أول موقعين إضافة إلى الموقع i.

لتكن $W = \{ \boldsymbol{w}^3, \boldsymbol{w}^4, \boldsymbol{w}^5, \dots, \boldsymbol{w}^{90}\}$. افترض وجود كلمتين متكافئتين في W إذا كانتا تنتميان لنفس كرة نصف القطر 2 المركزة عند كلمة شيفرة في $\mathcal{C}$. هذه علاقة تكافؤ على W لأن $\mathcal{C}$ شيفرة كاملة: كل كلمة في $\mathbb{B}^{\mathbf{90}}$ هي كرة واحدة مركزة عند كلمة شيفرة.

السؤال 312: لماذا يجب أن تكون كل كلمة في في كرة مركزة عند كلمة شيفرة وزنها غير 5؟ بكلمات أخرى، لماذا لا تكون أي كلمة في W في كرة مركزة عند كلمة شفيرة وزنها غير 5؟

بما أن كل علاقة تكافؤ تنتج تجزئة، لنختبر كل مجموعة فرعية في هذه التجزئة من W. افترض أن المجموعة الفرعية تتضمن $\boldsymbol{w}^3$. افترض أن $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$ هي كلمة شيفرة وزنها 5 (فريدة)، بحيث تكون $h(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{w}^3) = 2$. بما أن $\mathbf{c}$ وزنها 5 ومسافتها عن $\boldsymbol{w}^3$ تساوي 2، فلابدّ أن $\mathbf{c}$ تحتوي 1 في نفس المواقع التي توجد فيها الواحدات في $\boldsymbol{w}^3$ (تحديداً، المواقع الثلاثة الأولى) ومن ثم فإنه يوجد 1 في الموقعين الآخرين. لأجل التناقض لنقل أنه يوجد 1 في $\mathbf{c}$ في المواقع 10 و56.

السؤال 313: بيّن أن $h(\boldsymbol{c},\boldsymbol{w}^{10}) = 2$ وأن $h(\boldsymbol{c},\boldsymbol{w}^{56}) = 2$. أيضاً وضحّ لماذا تحتوي كل قيم $\boldsymbol{w}^i$ الأخرى على $h(\boldsymbol{c},\boldsymbol{w}^i) > 2$.

يتبع ذلك أن المجموعة الفرعية للتجزئة التي تحتوي$\boldsymbol{w}^3$ يكون حجمها 3. لا تنطبق هذه العبارة على $\boldsymbol{w}^3$ فحسب، بل أيضاً على أي $\boldsymbol{w}^i \in W$، وتبيّن أن كل كلمة في W توجد في مجموعة فرعية حجمها 3 في التجزئة. لكن هنا يكمن التناقض، فالمجموعة التي حجمها 88 المجزأة إلى مجموعات فرعية حجمها 3 ستتضمن 88/ 3 مجموعات فرعية. وهذا يستبعد إمكانية وجود شيفرة ثنائية كاملة $(90, 2^{78}, 5)$.

المبرهنة 7.5.6: **لا يوجد شيفرة ثنائية كاملة $(90, 2^{78}, 5)$**.

الشيفرات الثلاثية والشيفرات الأخرى

ماذا عن الشيفرات غير الثنائية؟ هل يمكننا بناء شيفرات أكبر ذات خصائص تصحيح أخطاء أفضل؟ هل من الممكن وجود شيفرات كاملة أكثر؟ الآن نعمّم فكرة الشيفرات غير الثنائية.

الشيفرات الثلاثية

أولاً لنفترض وجود مثال على **شيفرة ثلاثية**، وهي شيفرة كل خانة فيها إما 0 أو 1 أو 2. خذ المصفوفة المولّدة التالية:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

كما هو الحال في الشيفرة الثنائية، سنبني شيفرة بإيجاد جميع المركبات الخطية الممكنة من صفوف المصفوفة G. سيكون المركب الخطي العام على النحو

$$a(1,0,2,2)\oplus b(0,1,2,1)$$

حيث $a,b \in \{0,1,2\}$. يشير الترميز $a(1,0,2,2)$ إلى ضرب عددي على أساس المكونات، النموذج 3. تشير العملية $\oplus$ إلى عملية جمع لمكونات النموذج 3. على سبيل المثال، عندما $a = 2$ و$b = 1$ نحصل على

$$2(1,0,2,2)\oplus 1(0,1,2,1) = (2,0,1,1)\oplus(0,1,2,1) = (2,1,0,2)$$

السؤال 314: جد كلمات الشيفرة التسع في هذه الشيفرة المولدة بواسطة المصفوفة G.

هذه الشيفرة مثال على الشيفرة الثلاثية $(4,3^2,d)$، حيث d أقل مسافة بين كلمتي شيفرة. مسافة هامينغ بين كلمتين مازالت تساوي عدد المكونات التي تختلف فيها الكلمتان، ووزن كلمة مازال يساوي عدد المدخلات غير الصفرية. على سبيل المثال، $h(1022,0121) = 3$ و $wt(0101) = 2$.

السؤال 315: ما هي أقل مسافة للشيفرة المولّدة من خلال المصفوفة G المبينة أعلاه؟

إضافة لما تقدم، بالنسبة إلى الشيفرة الخطية كتلك المبيّنة في المثال الحالي، فإن أقل مسافة لها لاتزال تساوي أقل وزن بين كلمات الشيفرة غير الصفرية. بالطبع يمكن

توسيع معظم النتائج في القسم الأخير التي تتعلق بالشيفرات الثنائية لتصبح شيفرات ثلاثية (وغيرها) بإجراء القليل من التعديلات.

الحقول المحدودة وشيفرات $q - ary$

للطلاب المطّلعون على الجبر الخطي والجبر التجريدي، تكون الشيفرات الثنائية هي شيفرات من خلال GF(2) والشيفرات الثلاثية من GF(3). بشكل عام، شيفرة $q - ary$ هي مجموعة جزئية من فضاء متّجهي $\mathbb{F}_q^n$ حيث $\mathbb{F}_q \coloneqq GF(q)$ حقل محدود على العناصر q . فضلاً عن ذلك، تكون الشيفرة خطية إذا كانت فضاءً جزئياً لـ$\mathbb{F}_q^n$. من المعلوم جيداً أنه يوجد حقل على عناصر q إذا، وفقط إذا، كان q قوة لعدد أولي. إضافة لذلك، إذا وجد حقل محدود على العناصر q، فإنه يكون فريد لغاية التشاكل. الحقل $GF(q)$ هو **حقل ترتيب غالوا q (Galois Field of Order)**. إذا كان p عدداً أولياً، فإن $GF(p)$ تماثل حول الأعداد الصحيحة نموذج p. إذن على سبيل المثال، تسلك $GF(2)$ و$GF(3)$ سلوك الأعداد الصحيحة نموذج 2 ونموذج 3، على التوالي. عندما نكتب $\mathbb{B}^n$ في هذا القسم والقسم السابق، فإننا نعني $\mathbb{F}_2^n$.

من الممكن توسيع شيفرات هامينغ الثنائية الكاملة المصححة لخطأ واحد التي بنيناها في القسم 7.4 لتصبح شيفرات $q - ary$ كاملة مصححة لخطأ واحد لأي q إذا كان قوة لعدد أولي. تعرف هذه العائلة الكاملة من شيفرات تصحيح خطأ واحد **بشيفرات هامينغ**.

الشيفرات الكاملة الوحيدة هي...

الآن وقد أصبح الباب مفتوحاً للشيفرات غير الثنائية، تصبح هناك إمكانية تناول شيفرات كاملة أكثر من تلك القليلة التي تعرفنا عليها مسبقاً. لكن هنا تأتي النتيجة الثاينة المدهشة. توجد شيفرة كاملة أخرى واحدة فقط، وهي شيفرة ثلاثية عناصرها $(11, 3^6, 5)$ وقد اكتشفها أيضاً غولاي. تلخص المبرهنة التالية أعمال العديد من الباحثين الذين عملوا على أسئلة موجودة وفريدة تتعلق بالشيفرات الكاملة.

المبرهنة 7.5.7: إذا كانت $\mathcal{C}$ شيفرة كاملة على حقل محدود، فإن إحدى هذه العبارات تكون صحيحة حول $\mathcal{C}$.

- هي شيفرة تصحيح خطأ واحد لها نفس موسطات شيفرة هامينغ.
- هي مكافئة لشيفرة غولاي الثلاثية $(11, 3^6, 5)$ المصححة لخطأين.
- هي مكافئة لشيفرة غولاي الثنائية $(23, 2^{12}, 7)$ المصححة لثلاثة أخطاء.

لا يوجد شيفرات كاملة أخرى.

الملخص

قدّم هذا القسم التفاعل بين التصاميم والشيفرات. تعلمنا أولاً أنه يمكن استخدام التصاميم المتماثلة لبناء شيفرات تصحيح الخطأ (غالباً لا تكون شيفرات كاملة). ثم رأينا أن شيفرات هامينغ الثنائية هي مصدر لنظم شتاينر الثلاثية. كلتا النتيجتين مهمتان لأن مناهج بناء التصاميم المتماثلة وشيفرات هامينغ مدروسة جيداً.

ختمنا هذا القسم بالإجابة عن سؤال الوجود الكبير في التوافيقيات ونظرية التشفير. الشيفرات الكاملة نادرة جداً ويمكن أن تصحّح خطأ واحداً أو خطأين أو ثلاثة أخطاء فقط. إذا لم يكن للشيفرة الكاملة نفس موسطات شيفرات هامينغ، فإنها لابدّ أن تكون شيفرة غولاي التي تصحح إما خطأين أو ثلاثة.

التمارين

1. لتكن $\mathcal{C}$ شيفرة تصحيح خطأ e- كاملة في $\mathbb{B}^n$، حيث e عدد فردي. برهن أنه إذا كانت A مصفوفة كل أعمدتها عبارة عن كلمات شيفرة الوزن $(2e+1)$ في $\mathcal{C}$، فإن A هي مصفوفة الحدوث في نظام شتاينر $S(e+1,2e+1,n)$، أي أنها تصميم $(n,2e+1,1)-(e+1)$.

2. لتكن $\boldsymbol{r}$ و $\boldsymbol{s}$ صفّين مختلفين في المصفوفة G_{24}. برهن أن $wr(\boldsymbol{r}\oplus\boldsymbol{s})\geq 8$.

3. برهن أنه إذا كانت $\mathcal{C}$ شيفرة $q-ary$ تحتوي كلمات شيفرة طولها n تصحّح لغاية e خطأ فإن

$$\left|\mathcal{C}\right|\leq\frac{q^n}{\sum_{i=0}^{e}\binom{n}{i}(q-1)^i}$$

(هذا حد حزم الكرة العام).

4. لتكن A مصفوفة 16×7، أعمدتها عبارة عن كلمات شيفرة من شيفرة هامينغ $(7,2^4,3)$. عرّف A' لتكون مصفوفة 16×8 حصلنا عليها من A بمحاذاة صف إضافي، حيث تحدّد مدخلات هذا الصف بحيث يحتوي كل عمود في A' على عدد زوجي من الواحدات. برهن أن A' هي مصفوفة حدوث للتصميم $3-(8,4,1)$.

5. برهن أنه في الشيفرة الثنائية الخطية إما أن يكون وزن كل كلمة شيفرة فيها ذا عدد زوجي أو أن نصف الكلمات الشيفرة لها وزن ذو عدد زوجي والنصف الآخر وزنه ذو عدد فردي.

ملاحظات سريعة

بحلول العقد 1950، أصبحت شيفرات هامينغ وغولاي معروفة، لكن لم يتم إثبات أنها الشيفرات الكاملة الوحيدة الممكنة حتى أوائل عقد 1970. تقدّم المبرهنة 7.5.7 أعمال آخر ثلاثة باحثين: فان لينت (Van Lint)، هو الذي وضع الأعمال الأساسية المهمة؛ و بليس (Pless) (1968) هو الذي أثبت أن شيفرات غولاي فريدة من نوعها، و تيتافينين (Tietavainen) (1973) هو الذي أكمل إثبات أنه، ما من شيفرات كاملة أخرى موجودة. وتعتبر كتب ماكويليامز وسلون (MacWilliams and Sloane, 1978) و بليس (Pless, 1982) كلاسيكية وتتناول مشكلة فك الشيفرة.

الفصل الثامن

المجموعات المرتبة جزئياً

تلعب المجموعات المرتبة جزئياً دوراً في التوحيد للنظرية التوافقية، فقد درسنا سابقاً أفكاراً مثل الإضافة والحذف، وتجزيء المجموعات، والعدّ في حالة التكافؤ، ومتعدد الحدود المتدرج الألوان لمخطط معزول نسبياً. هدفنا في هذا الفصل الأخير دراسة كل ما سبق ذكره باستخدام المجموعات المرتبة جزئياً.

سوف نقوم في البداية بتقديم المجموعات المرتبة جزئياً، والمصطلحات المتعلقة بها، وخصائصها، وبعض الأمثلة المهمة. ومن ثم سوف نثبت نتيجتين توافقيتين قديمتين (مبرهنة سبيرنر (Sperner's Theorem) ومبرهنة ديلوورث (Dilworth's Theorem) وسوف ندرس أيضاً مفهوم الأبعاد لمجموعة مرتبة جزئياً. وفي النهاية، سوف ندرس خلال فصلين نظرية انعكاس موبيوس، وهي النظرية التي توفر الإطار الموحد.

1.8 أمثلة ومفردات حول المجموعات المرتبة جزئياً

المجموعة المرتبة جزئياً هي مجموعة مرتبطة بعلاقة انعكاسية ومتعدية (Transitive) (مثل علاقة التكافؤ) ولكنها غير تماثلية (عكس علاقة التكافؤ).

التعريف 8.1.1 المجموعة المرتبة جزئياً هي زوج مرتب $P = (\mathrm{X}, \leq)$ حيث X هي مجموعة غير فارغة و $\leq$ هي علاقة على X بحيث تكون هذه العلاقة:

- **انعكاسية**: إذا كان $\chi \in \mathrm{X}$، عندها $\chi \leq \chi$
- **غير تماثلية**: إذا كان $\chi, y \in \mathrm{X}$ وأيضاً $\chi \leq y$ وكذلك $y \leq \chi$، عندها $\chi = y$
- **متعدية**: إذا كان $\chi, y, z \in \mathrm{X}$ وكان $\chi \leq y$ وأيضاً $y \leq z$، عندها $\chi \leq z$.

نقول أحياناً إن X مرتبة عن طريق $\leq$ لنعني أن $(\mathrm{X}, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً. وأحياناً يشير إلى X بأنها المجموعة الأساسية للمجموعات المرتبة جزئياً. وحتى نصل القسم 5.8 والقسم 6.8 سوف نعتبر أن المجموعة الأساسية هي مجموعة محدودة.

استخدام الرمز $\leq$ للإشارة إلى العلاقة التي تجعل من المناسب أن نكتب $\chi \leq y$ بدلاً من

$(\chi, y) \in \leq$. ولكن أحياناً يوجد فوائد من التعبير بشكل صريح بالأزواج المرتبة في هذه العلاقة، أي عندها نكتب $P = (\mathrm{X}, R)$ لنشير إلى المجموعة المرتبة جزئياً $\chi \leq y$ بالطريقة

$(\chi, y) \in \mathrm{R}$. وقد نستخدم كلا التعبيرين.

يجب أن نحذر من خطورة الرمز $\leq$. عندما نكتب $\chi < y$ نعني أن $\chi \leq y$ و$\chi \neq y$ ، أي "أصغر من" الاعتيادية، وأيضاً نستخدم $y \geq \chi$ لنعني أن $\chi \leq y$ ، ونستخدم $y > \chi$ والتي تعني أن $\chi < y$. ولكن كتابة $\chi \nleq y$ لا يعني بالضرورة أن

$y > \chi$ ، كما في عملية المقارنة العادية باستخدام أصغر من أو يساوي. $\chi \nleq y$ تعني بكل بساطة أن $\chi \leq y$ غير صحيحة، على سبيل المثال الزوج المرتب (χ, y) ليس في العلاقة. وبالطريقة نفسها، $\chi \nless y$ تعني أن $\chi < y$ خاطئة وليس بالضرورة $\chi \geq y$.

هذا مثال من الحياة اليومية على مجموعة مرتبة جزئياً. تخيل أنك تريد أن ترتب قائمة لمجموعة من المتبارين الذين وصلوا إلى المرحلة النهائية بهدف تحديد أي الأشخاص تختار من أجل وظيفة. في هذه الحالة تكون المجموعة الأساسية X هي مجموعة المتقدمين للوظيفة وتصف العلاقة $\preceq$ تفضيلاتك بينهم. إذا استطعت أن ترتبهم من الأفضل إلى الأسوأ، تكون قد حصلت على ما هو مثالي. أما إذا لم تستطع، عندها يجب أن يكون ترتيبك لهم غير متماثل ومتعدياً. يعني عدم التماثل أنه إذا كان χ و y شخصين مختلفين متقدمين للوظيفة، عندها لا يمكن أن تفضل χ على y وفي الوقت نفسه تفضل y على χ. أما التعدي فيعني أنه إذا قمت بتفصيل χ على y وأيضاً y على z عندها أنت تفضل χ على z. بكلمات أخرى هاتان الخاصيتان تؤكدان المنطق الطبيعي المتماسك بين الخيارات.

المجموعات المرتبة بالتضمين

عند ترتيب أي قائمة من المجموعات بواسطة العلاقة $(\subseteq)$ عندها تكون مجموعات مرتبة جزئياً. على سبيل المثال، افترض المجموعة الكلية لجميع المجموعات الجزئية [2]، والتي هي:

$2^{\{2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\{2, 1\}\}$.

العلاقة ⊆ على هذه المجموعة هي الأزواج التسعة المرتبة التالية:

$$\{(\emptyset,\emptyset), (\emptyset,\{1\}), (\emptyset,\{2\}), (\emptyset,\{1,2\}), (\{1\},\{1\}), (\{1\},\{1,2\}), (\{2\},\{2\}), (\{2\},\{1,2\}), (\{1,2\},\{1,2\})\}$$

أي أن (A , B) هي العلاقة إذا وفقط إذا A ⊆ B

علاقة المجموعة الجزئية هي علاقة إنعكاسية لأن A ⊆ A لأي مجموعة A. وهي غير تماثلية لأنه إذا كان A ⊆ B وكان B ⊆ A ، عندها A = B (هذا في الحقيقة تعريف تساوي المجموعات). وهي أيضاً متعدية لأنه إذا كان A ⊆ B وكان B ⊆ C ، عندها A ⊆ C. أي مجموعة مرتبة جزئياً تتضمن العلاقة ⊆ تعتبر مرتبة بالتضمين (Ordered by Inclusion).

يعتبر 2^n من المجموعات الجزئية في $[n]$ والمرتبة بالتضمين. أي أن $2^n = \left(2^{[n]},\subseteq\right)$. هذه المجموعة المرتبة جزئياً تسمى شبكة مجموعة جزئية (Subset Lattice) سوف نقوم بتعريف الشبكة فيما بعد في هذا القسم.

السؤال 316: كم عدد الأزواج المرتبة التي تمتلكها العلاقة ⊆ في $2^{[3]}$؟

الأعداد الصحيحة المرتبة وفقاً لقابلية القسمة

إذا كان لدينا عدد صحيح موجب n ، شبكة القابلية للقسمة هي مجموعة القواسم الموجبة في n والمرتبة وفقاً لعلاقة قابلية القسمة. نرمز لهذه المجموعة المرتبة جزئياً بالرمز D_n. بكلمات أخرى إذا قمنا بتعريف

$$D_n = \{d \in \mathbb{Z} : d > 0 \ \ and \ \ d|n\}$$

عندها تكون $(D_n, |)$ $= D_n$ على سبيل المثال، $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

وعندها علاقة قابلية القسمة لهذه المجموعة تساوي:

$$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,6), (1,9), (1,18), (2,2), (2,6), (2,18),$$

$$(3,3), (3,6), (3,9), (3,18), (6,6), (6,18), (9,9), (9,18), (18,18)\}$$

السؤال 317: اكتب الأزواج المرتبة لعلاقة قابلية القسمة على D_{15} وعلى D_{16}.

بشكل عام، لتكن χ, y و z أعداد صحيحة موجبة. بما أن $\chi|\chi$ يمكن أن نستنتج أن | انعكاسية. وأيضاً إذا كان $\chi|y$ وكذلك $y|\chi$ ، عندها $\chi = y$. وأخيراً، إذا كان $\chi|y$ وأيضاً $y|z$ ، عندها $\chi|z$ وبالتالي | متعدية. يمكن التحقق من السابق باستخدام تعريف القسمة: $a|b$ تعني $b = \mathrm{k}a$ لبعض الأعداد الصحيحة k.

السؤال 318: هل تحقق خاصية عدم التماثل عندما لا يكون كلا χ و y موجبين؟ أثبت ذلك أو أعط مثالاً ينفي ذلك.

الترتيب الكلي

أي مجموعة أرقام حقيقية مرتبة بالعلاقة أصغر أو يساوي هي مجموعة مرتبة جزئياً وذلك لأن $\chi \leq \chi$ لأي عدد حقيقي χ ، وإذا كان $\chi \leq y$ وكان $y \leq \chi$ عندها $\chi = y$ ، وإذا كان $\chi \leq y$ وكان $y \leq z$ عندها $\chi \leq z$. في الحقيقة لا يوجد

ما هو جزئي في هذه المجموعة المرتبة جزئياً. لأي أعداد حقيقية χ و y إما $y \leq \chi$ أو $\chi \leq y$ يكون صحيحاً.

المجموعة المرتبة كلياً (Totally Ordered Set) هي مجموعة مرتبة جزئياً $(X, \leq)$ بحيث يكون لكل من $\chi, y \in X$ إما $y \leq \chi$ أو $\chi \leq y$ صحيحاً. سوف نعرف $\boldsymbol{n} := ([n], \leq)$ لتكون المجموعة $[n]$ والمرتبة بالعلاقة $\leq$. مثال على ذلك، العلاقة $\leq$ على $[4]$ هي:

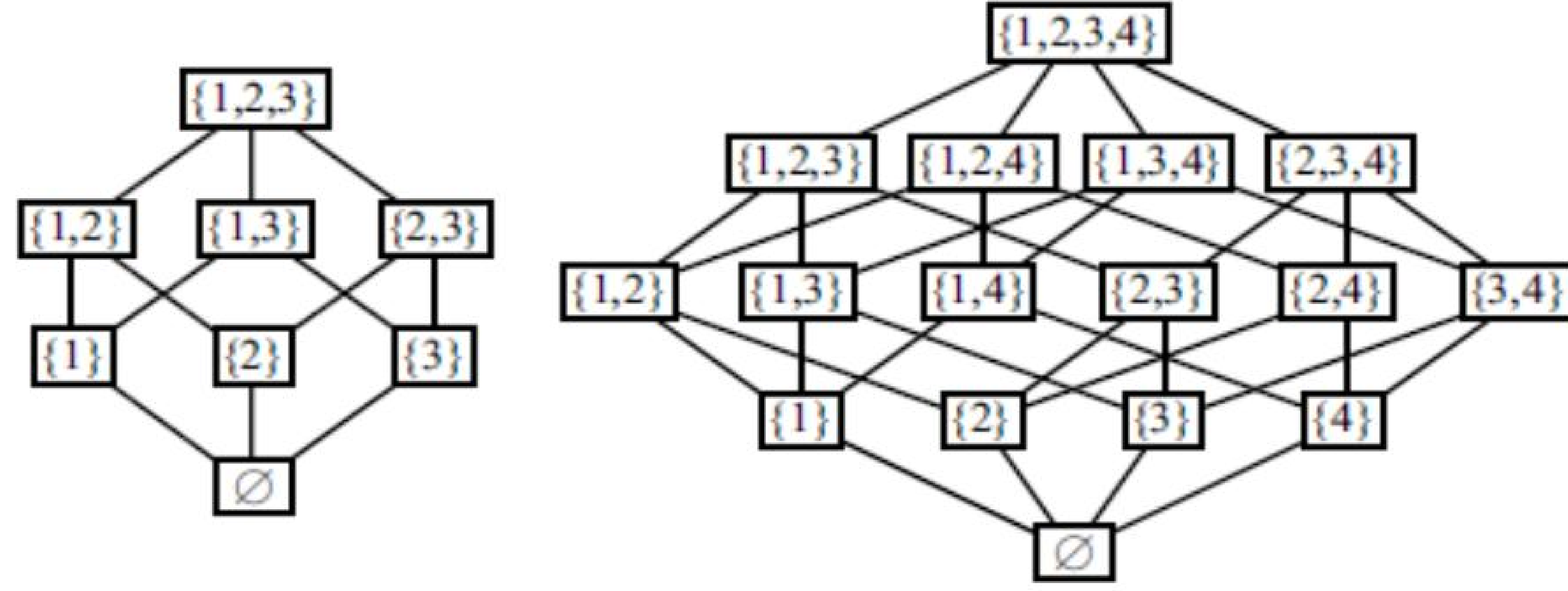
$$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$$

ومثال آخر المجموعات $\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, e\}$ والمرتبة بالتضمين تشكل أيضاً ترتيباً كلياً. المجموعة المرتبة جزئياً 2^3 ليست مرتبة كلياً لأن $\{2, 3\} \nsubseteq \{1\}$ وأيضاً $\{1\} \nsubseteq \{2, 3\}$.

السؤال 319: كم عدد الأزواج المرتبة في العلاقة $\leq$ على $[5]$؟ وعلى $[6]$؟

التغطية ومخطط هاس (Hasse Diagram)

يستخدم مخطط هاس لتمثيل المجموعات المرتبة جزئياً. على سبيل المثال مخطط هاس الشبكي لمجموعتين جزئيتين يظهر في الشكل 8.1، في مخطط هاس قمنا بإعادة تمثيل كل عنصر



الشكل 18.: مخطط هاس الشبكي لمجموعتين جزئيتين 2^3 و 2^4.

في المجموعة الأساس عن طريق رمز ومن ثم رسم خطوط لتمثيل العلاقة. ومن الواضح تكون $y \leq \chi$ هي في العلاقة إذا، وفقط إذا، كان التالي موجوداً في المخطط: **أولاً**، تظهر χ أسفل y في الصفحة، و**ثانياً**، يوجد مسار من χ إلى y باتجاه الأعلى. يجعلنا الشرط السابق قادرين على توفير عدد الخطوط ولن نكون بحاجة إلى رسم خط لكل زوج مرتب في العلاقة.

على سبيل المثال في شبكة المجموعة المرتبة جزئياً 2^4، نعلم أن $\{1\} \subseteq \{1,2,3,4\}$. في مخطط هاس الخاص بها، نحن لسنا بحاجة إلى توصيل هذين العنصرين بخط لأننا نستطيع التنقل للأعلى على الخط $\{1\}$، على سبيل المثال، في المسار $\{1\} \subseteq \{1,2\} \subseteq \{1,2,4\} \subseteq \{1,2,3,4\}$.

تحكم فكرة التغطية أي الخطوط نرسم، نقول إن y تغطي χ، شرط أن $\chi < y$ وأنه لا يوجد z بحيث $\chi < z < y$. يشير التعبير $\chi < y$ إلى أن y تغطي χ . على

سبيل المثال، $\{1,3,4\}$ تغطي $\{1,3\}$ في المجموعة المرتبة جزئياً 2^4 لأنه لا توجد مجموعة A بحيث $\{1,3\} \subset A \subset \{1,3,4\}$. وفي المقابل، $\{1,2,3\}$ لا تغطي $\{2\}$.

خطوط مؤشرة رسم مخطط هاس

حتى نرسم مخطط هاس للمجموعة المرتبة جزئياً $P = (X, \leq)$ اتبع هذه الخطوط العريضة التالية:

1) قم بتمثيل كل عنصر في X برمز.

2) ارسم خطاً يصل بين χ و y فقط إذا كانت $\chi \lessdot y$

3) إذا كانت $\chi \lessdot y$ ، اجعل y فوق (X, R) في الصفحة.

على سبيل المثال افترض وجود المخطط المرتب جزئياً (X, R) الذي له

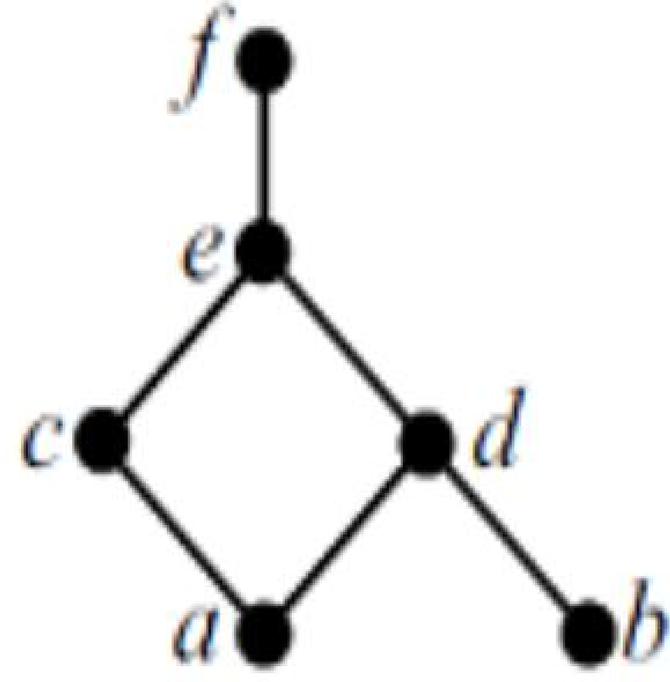
$X = \{a, b, c, d, e, f\}$

$$R = \{(a,a), (a,c), (a,d), (a,e), (a,f), (b,b), (b,d)(b,e), (b,f), (c,c) \\ (c,e), (c,f), (d,d), (d,e), (d,f), (e,e), (e,f), (f,f)\}$$

إذا أردنا رسم خط واحد لكل زوج مرتب (χ, y) بحيث $\chi \neq y$ نحتاج إلى مزيج من 12 خط. بما أنه يوجد ست علاقات تغطية وهي:

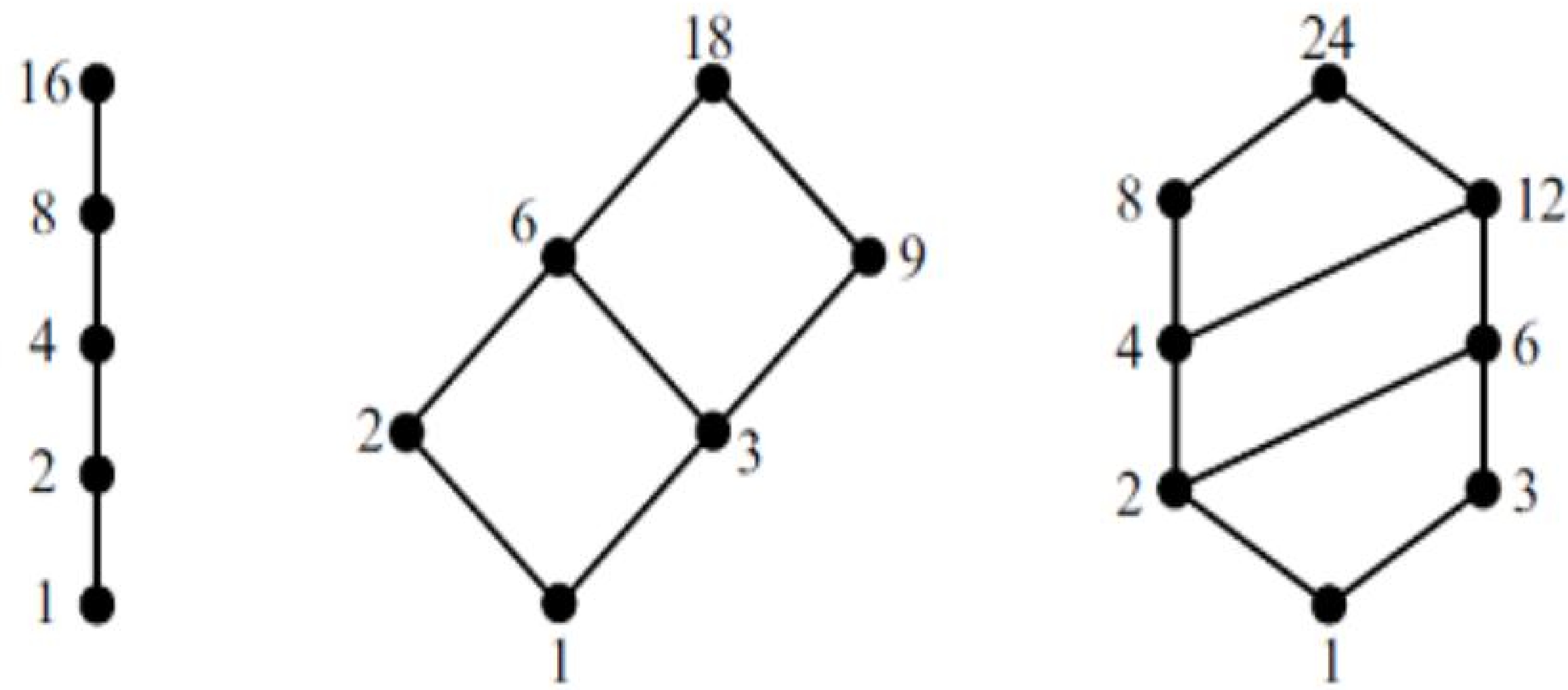
$$a \lessdot c \quad a \lessdot d \quad b \lessdot d \quad c \lessdot e \quad d \lessdot e \quad e \lessdot f$$

بالتالي يحتوي مخطط هاس فقط على ستة خطوط:



السؤال 320: ارسم مخطط هاس للمجموعة المرتبة جزئياً بحيث $X=\{1,2,3,4,5\}$ و R تحتوي (i,i) لكل $i=1,2,\dots,5$ وأيضاً $(1,2),(1,4),(2,4),(3,2),(3,4)$ و $(4,5)$.

يظهر مخطط هاس لشبكات القسمة الثلاث D_{16} و D_{18} و D_{24} في الشكل 8.2، لاحظ أن D_{16} مرتب كلي.

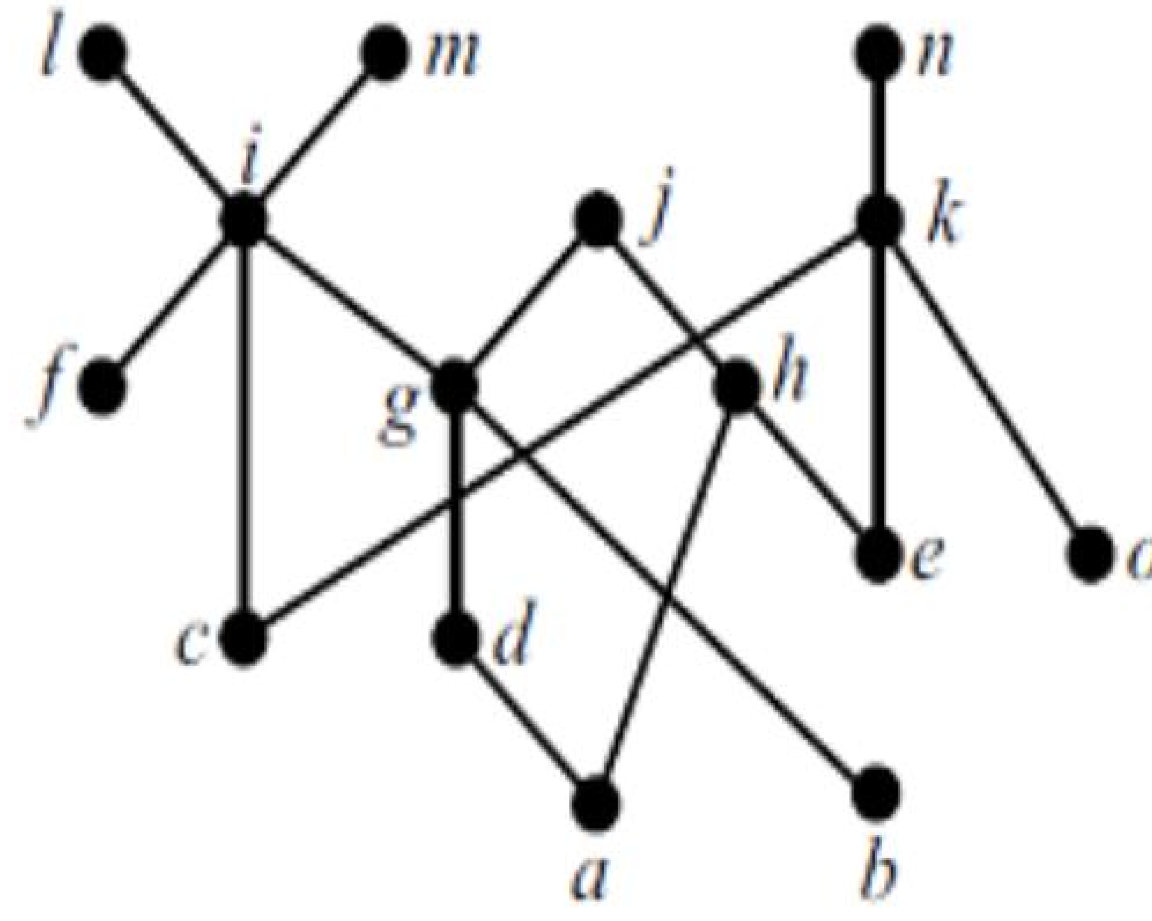


الشكل 8.2: شبكة قابلة القسمة D_{16} و D_{18} و D_{24}.

السؤال 321: جد شبكة القسمة التي لها مخطط هاس مطابق بالضرورة لـ D_{18}.

مصطلحات متعلقة بالمجموعة المرتبة جزئياً

من أجل تقديم المصطلحات والترميزات المتعلقة بالمجموعات المرتبة جزئياً سوف نستخدم المجموعة المرتبة جزئياً التي يظهر مخطط هاس لها في الشكل 8.3.



شكل 38.: مخطط هاس للمجموعات المرتبة جزئياً.

قابل وغير قابل للمقارنة

لتكن $P = (X, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً. إذا قلنا إن χ و y قابلان للمقارنة ذلك يعني أن إما $\chi \leq y$ أو $y \leq \chi$. وبالعكس إذا كانا غير قابلين للمقارنة في هذه الحالة نكتب $\chi \| y$. إن أي عنصرين في المجموعة المرتبة جزئياً يكونان قابلين أو غير

قابلين للمقارنة. بما أن المجموعات المرتبة جزئياً انعكاسية، يكون كل عنصر قابلاً للمقارنة بنفسه. في الترتيب الكلي يكون أي عنصرين قابلين للمقارنة.

قابل للمقارنة، يعني، يمكن مقارنته ولا يعني "مساوٍ" أو "مشابه" كما في اللغة العادية. وغير قابل للمقارنة يعني "لا يمكن مقارنته".

في المجموعة المرتبة جزئياً في الشكل 8.3 يجب أن تتحقق أن كل عبارة من العبارات العشر التالية صحيحة:

$$c \leq n \qquad b \leq j \qquad a \parallel b \qquad g \parallel n \qquad f < i$$

$$f \lessdot i \qquad j > b \qquad b \nless k \qquad e \leq e \qquad e \geq e$$

السلسلة والارتفاع

السلسلة في $P = (X, \leq)$ هي مجموعة جزئية غير فارغة من X تحتوي أزواجاً من العناصر القابلة للمقارنة. أي أنه، إذا كانت C سلسلة فيP فإن $\emptyset \subset C \subseteq X$ وطالما كانت $\chi, y \in C$ ينتج عن ذلك إما $\chi \leq y$ أو $y \leq \chi$. في كل السلاسل المحتملة لـ P ، وإذا كانت C^* أي سلسلة بأكبر طول، عندها نعرّف ارتفاع المجموعة المرتبة جزئياً لتكون$|C^*|$.

للمجموعة المرتبة جزئياً في الشكل 8.3 كل من المجموعات التالية تعتبر سلسلة.

$C_1 = \{h\}$
$C_2 = \{a, d, g, i, l\}$
$C_3 = \{c, n\}$

بما أن C_2 هي سلسلة ذات الحجم الأكبر الممكن، يكون الارتفاع $(P) = |C_2| = 5$. لاحظ أن $\{a, d, g, i, m\}$ هي أيضاً أكبر سلسلة ممكنة. المجموعة $\{f, i, l, m\}$ ليست سلسلة لأن $l \parallel m$.

مضاد السلسلة والعرض

مضاد السلسلة (Antichain) لـ $P = (X, \leq)$ هي مجموعة جزئية غير فارغة في X تحتوي على أزواج غير قابلة للمقارنة (مع إهمال قابلية الانعكاس). أي أنه إذا كانت A مضاداً تبقى كما هي سلسلة للمجموعة المرتبة جزئياً P ينتج عن ذلك $\emptyset \subset A \subseteq X$ طالما $\chi, y \in A$ بحيث $\chi \neq y$، ينتج عن ذلك $\chi \| y$. في كل مضادات السلسلة الممكنة لـ P، إذا كانت A^* مضاد سلسلة لها أكبر قيمة ممكنة، عندها يمكن تعريف عرض المجموعة المرتبة جزئياً ليكون $|A^*|$.

كل من المجموعات التالية هي مضادات سلسلة للمجموعة المرتبة جزئياً في الشكل 8.3:

$A_1 = \{h\}$

$A_2 = \{f, g, h, o\}$

$A_3 = \{c, f, g, h, o\}$

$A_4 = \{b, c, d, e, f, o\}$

بما أن A_4 هي مضادة سلسلة بأكبر حجم يكون عرض $(P) = |A_4| = 6$.

لاحظ أن $\{a, b, c, d, e, f, o\}$ هي مضاد سلسلة بأكبر حجم أيضاً. المجموعة $\{e, f, g, h, o\}$ ليست مضاد سلسلة لأن $e \leq h$.

لاحظ أن أي مجموعة جزئية مفردة من X يمكن اعتبارها سلسلة أو مضاد سلسلة.

السؤال 322: جد طول وعرض المجموعات المرتبة جزئياً 2^3 و 2^4. كم عدد السلاسل ذات الحجم الأقصى يوجد في كل مجموعة مرتبة جزئياً؟

العناصر القصوى

إذا كان العنصر $\chi \in X$ قيمة عظمى فإنه لا يوجد $y \in X$ بحيث $\chi < y$. بلغة مبسطة، لا يوجد عنصر يعلو العنصر ذا القيمة العظمى. وبالطريقة نفسها يمكن تعريف العنصر ذي القيمة الصغرى. للمجموعة المرتبة جزئياً في الشكل 8.3،

العناصر ذات القيمة العظمى هي $j, l, m,$ و n. والعناصر ذات القيمة الصغرى هي a, b, c, d, e, f و o.

يكون العنصر $\chi \in X$ هو الأكبر قيمة شرط أن $y \leq \chi$ لجميع قيم $y \in X$. وبلغة بسيطة جميع العناصر تكون أدنى أكبر قيمة. يمكن تعريف العنصر أصغر قيمة بالطريقة نفسها. لاحظ أن وجود عنصر أكبر قيمة يتضمن أن كل عنصر في المجوعة المرتبة جزئياً هو قابل للمقارنة مع ذلك العنصر. وهذا ينطبق على العنصر الأصغر قيمة.

المجموعة المرتبة جزئياً في الشكل 8.3 لها العديد من العناصر ذات القيم العظمى والصغرى ولكن ليس لها عنصر بأكبر قيمة أو أصغر قيمة. يجب التمييز بين عظمى وصغرى وبين أكبر قيمة وأصغر قيمة.

السؤال 323: ارسم مخطط هاس لمجموعة مرتبة جزئياً ليست ذات ترتيب كلي وتحتوي على العنصر χ والذي له الخصائص التالية: χ قابل للمقارنة بكل عنصر من عناصر المجموعة المرتبة جزئياً، ولكنه χ ليس أكبر قيمة أو أصغر قيمة.

إذا كان للمجموعة المرتبة جزئياً عنصر ذو أكبر قيمة عندها يكون هذا العنصر فريداً. لتوضيح ذلك، لتكن $P = (X, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً وافترض χ_1 و χ_2 عنصرين ذوي أكبر قيمة، بما أن χ_1 لها أكبر قيمة، عندها $y \leq \chi_1$ لجميع قيم $y \in X$

أي أن $\chi_1 \leq \chi_2$. وبما أن χ_2 لها أكبر قيمة، إذن $y \leq \chi_2$ لجميع قيم $y \in X$. ذلك يعني، $\chi_2 \leq \chi_1$. عن طريق عدم التماثل لـ P ، $\chi_1 \leq \chi_2$، و $\chi_2 \leq \chi_1$ تتضمن أن $\chi_1 = \chi_2$. لذلك إذا وجدت أكبر قيمة يجب أن تكون فريدة. والشيء نفسه ينطبق على أصغر قيمة.

المبرهنة 8.1.2: إذا احتوت مجموعة مرتبة جزئياً على عنصر ذي أكبر قيمة، عندها يكون هذا العنصر وحيداً. وهذا ينطبق على عنصر أقل قيمة.

ليس بالضرورة أن تحتوي المجموعة المرتبة جزئياً على عنصر له أكبر قيمة أو عنصر له أصغر قيمة، ولكن يجب أن تحتوي على الأقل على عنصر قيمة عظمى وعلى عنصر قيمة صغرى. سوف نثبت ذلك باستخدام الطريقة البنائية.

المبرهنة 8.1.3: إذا كان $P = (X, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً، عندها تحتوي على الأقل على عنصراً واحداً ذا قيمة عظمى وعنصراً واحداً على الأقل ذا قيمة صغرى.

البرهان

سوف نثبت فقط وجود عنصر قيمة عظمى لأن القيمة الصغرى ستكون بالطريقة نفسها. لتكن $P = (X, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً ولتكن $\chi \in X$. يوجد حالتان:

• لا يوجد $y \in X$ بحيث $\chi < y$ ، وإذا كان ذلك صحيحاً عندها χ هي عنصر قيمة عظمى بالتعريف. انتهى.

• يوجد $y \in X$ بحيث $\chi < y$ ، إذا كان ذلك صحيحاً، عندها χ ليس قيمة عظمى ولكن y يمكن أن تكون، عندها نعيد مراحل الإثبات على y.

■

في النهاية سوف تنتهي إعادة المراحل لأن P لها عدد محدود من القيم. وآخر قيمة نتوقف عندها تكون هي القيمة العظمى.

المجموعات الجزئية المرتبة جزئياً

في المجموعة المرتبة جزئياً P (Subposet) في الشكل 8.3، تعتبر المجموعة الجزئية المرتبة جزئياً التي تحتوي a, g, h و j مجموعة مرتبة جزئياً مجموعتها الأساسية $\{a, g, h, j\}$ وتحتوي علاقتها على الأزواج المرتبة التي تظهر في P والتي تحوي فقط على a, g, h و j والتي هي

$$\{(a,a)\ ,(a,g),(a,h),(a,j),(g,g),(g,j),(h,h),(h,j)\ ,(j,j)\}$$

نرمز إلى المجموعة الجزئية المرتبة جزئياً بـ $P[Y]$ حيث $Y = \{a, g, h, j\}$

بشكل عام لتكن $P = (X\,, R)$ مجموعة مرتبة جزئياً ولتكن $Y \subseteq X$. عندها نعرف

$$P\ [Y] := \{(y,z): y,z \in Y\ and\ (y,z) \in R\}$$

عندها $P\,[Y]\ =\ (Y, R[Y])$ مجموعة جزئية مرتبة جزئياً في P تحتوي على عناصر Y. لم نقم بإثبات أن $P\,[Y]$ هي بالتأكيد مجموعة مرتبة جزئياً لكن ذلك سهل (التمرين 8).

السؤال 324: في المجموعة المرتبة جزئياً بالشكل 8.3، ارسم مخطط هاس للمجموعة الجزئية المرتبة جزئياً والتي تحتوي على العناصر $\{c, f, g, i,, k, n\}$.

مثال آخر مهم: التقسيمات المرتبة بالتصفية

تذكر من القسم 23. أن تقسيماً من المجموعة S هو حزمة من مجموعات غير فارغة وغير متصلة ينتج عن اتحادها S. لتكن Π_n تعبر عن مجموعة التقسيمات في $[n]$ على سبيل المثال.

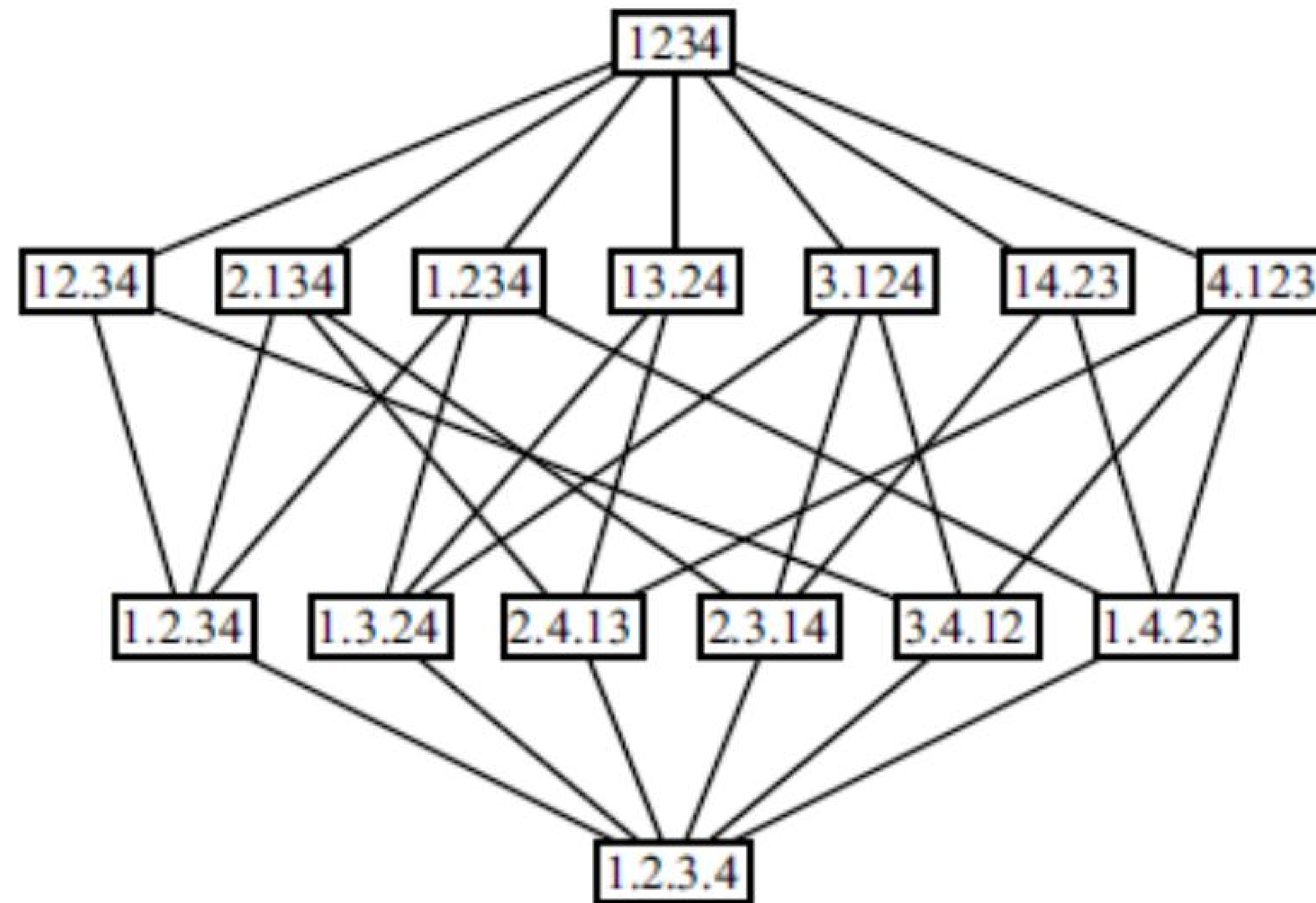
$$\Pi_3 = \{123, 1.23, 2.13, 3.12, 1.2.3\}$$

$$\Pi_4 = \{1234, 1.234, 2.134, 3.124, 4.123, 12.34, 13.24, 14.23, 1.2.34, 1.3.24, 1.4.23, 2.3.14, 2.4.13, 3.4.12, 1.2.3.4\}$$

التعبير 2.4.13 هو اختصار للتقسيم $\{\{1,3\},\{4\},\{2\}\}$. الترتيب غير مهم في التقسيم، تمثل 2.4.13 و 2.13.4 و 31.4.2 التقسيم نفسه في $[4]$. وأيضاً، تذكر أن رقم بيل $B(n)$ يقوم بحساب العدد الكلي للتقسيمات في المجموعة n لذلك $|\Pi_3|\ = B(3) = 5$ وأيضاً $|\Pi_4| = B(4) = 15$.

قولنا إن التقسيم مصفى أكثر من تقسيم آخر يعني أن كل كتلة في التقسيم الأول هي مجموعة جزئية من كتلة واحدة في التقسيم الثاني. على سبيل المثال 2.4.13 مصفاة أكثر من 24.13، وكذلك 2.4.13 مصفاة أكثر من 2.134. عند كتابة 24.13 ≼ 2.4.13 و 2.134 ≼ 2.4.13 نشير إلى الأكثر تصفية. كل تقسيم في [4] أكثر تصفية من 1234، و1.2.3.4 أكثر تقسيماً من أي جزء في [4]. بكلمات أخرى، 1234 هو العنصر أكبر قيمة و 1.2.3.4 هو العنصر أصغر قيمة في العلاقة "أكثر تصفية" في Π_4.

السؤال 325: هل 4.123 أكثر تصفية من 14.23 ؟ وهل 14.23 أكثر تصفية من 4.123؟



الشكل 8.4: المجموعة المرتبة جزئياً Π_4 للتقسيمات في [4] مرتبة بالتصفية.

بشكل عام، لتكن S مجموعة ولتكن P_1 و P_2 أجزاء في S،

$$p_1 = \{B_1, \dots, B_r\}$$

$$p_2 = \{C_1, \dots, C_s\}$$

أي أن P_1 لها عدداً من الكتل r و P_2 لها عدداً من الكتل s. عند قولنا إن P_1 أكثر تصفية من P_2 وكتابة ذلك $P_1 \preccurlyeq P_2$، ذلك يعني أن لكل كتلة B_i في P_1، يوجد كتلة C_j في P_2 بحيث $B_i \subseteq C_j$. المجموعة المرتبة جزئياً $\Pi_n := (\Pi_n, \preccurlyeq)$ هي مجموعة التقسيمات في $[n]$ والمرتبة بالتصفية. يطلب التمرين 9 إثبات أن Π_n هي بالتأكيد مجموعة مرتبة جزئياً. يظهر في الشكل 8.4 مخطط هاس لـ Π_4.

السؤال 326: ارسم مخطط هاس لـ Π_3.

الشبكات

تحدثنا سابقاً عن شبكات المجموعات وعن شبكات قابلية القسمة، والآن سوف نعرّف مفهوم الشبكة. هي مجموعة مرتبة جزئياً بحيث يكون لكل زوج من العناصر في الوقت نفسه أقل حد أعلى وأعلى حد أدنى. والشرح التالي يبين ماذا تعني هذه الأفكار.

لتكن $P = (X, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً، إذا كان لدينا العنصران χ و y ، إذا قلنا إن العنصر u هو حد أعلى لـ χ و y، ذلك يعني $\chi \leq u$ و $y \leq u$. أقل حد أعلى

في χ و y هو الحد الأعلى u^* بحيث $u^* \leq u$ لجميع الحدود العليا u في χ و y . إذا وجد أقل حد أعلى في χ و y عندها من الواضح أنه فريد. ويدعى "الواصل بين χ و y" ويرمز له بالرمز $\chi \vee y$.

في المجموعة المرتبة جزئياً في الشكل 8.3، افترض وجود العنصرين d و f . كل من i, l و m هي حدود عليا لـ d و f وبما أن $i \leq l$ و $i \leq m$ ، يمكن أن نستنتج أن i هي أقل حد أعلى لـ d و f. وبالتالي ه $= d \vee f$.

السؤال 327: ارسم مخطط هاس للمجموعة المرتبة جزئياً التي تحتوي على العناصر χ و y بحيث يكون لهذه العناصر على الأقل حداً أعلى واحداً، وبين أن $\chi \vee y$ غير موجودة

إذا كان العنصر l هو حد أدنى في χ و y فإن $l \leq \chi$ و $l \leq y$ ، أكبر حد أدنى لـ χ و y هو الحد الأدنى l^* بحيث $l \leq l^*$ لجميع الحدود الدنيا l في χ و y.

إذا وجد أكبر حد فإنه يكون فريداً، ويدعى "ملاقي χ و y " ويرمز له $\chi \wedge y$.

في المجموعة المرتبة جزئياً في الشكل 8.3، يوجد $g \wedge h = a$ بينما $g \wedge e$ غير موجود.

السؤال 328: في المجموعة المرتبة جزئياً نفسها، جد $d \wedge i$ و $i \wedge h$ $b \wedge c$ ، إذا وجد.

بشكل رسمي، الشبكة هي المجموعة المرتبة جزئياً $P = (X, \leq)$ بحيث لكل من $\chi, y \in X$ يكون كلا $\chi \vee y$ و $\chi \wedge y$ معرّفين. الشبكة مهمة في الهيكلية أكثر من المجموعات المرتبة جزئياً العادية وهي مهمة في الكثير مجالات علم الرياضيات.

الشبكات المعروفة

المجموعة المرتبة جزئياً 2^n والتي تدعى شبكة مجموعة جزئية، بالتأكيد لا تحقق تعريف الشبكة. في الحقيقة أن شغل الواصل $(\vee)$ والملاقي $(\wedge)$ هو الاتحاد $(\cup)$ والتقاطع $(\cap)$. على سبيل المثال، في 2^4 لدينا $\{1, 3, 4\} \vee \{2, 3\} = \{1,3,4\} \cup$ و $\{2, 3\} = \{1,2,3,4\}$

$\{1, 3, 4\} \wedge \{2, 3\} = \{1,3,4\} \cap \{2, 3\} = \{3\}$. وكذلك، $\{1, 3, 4\} \wedge$ $\{2\} = \emptyset$.

وهذا أيضاً صحيح للمجموعة المرتبة جزئياً D_n لقواسم n الموجبة والمرتبة بالقسمة. في هذه الحالة يكون شغل الواصل والملاقي هو أصغر مضاعف مشترك وأكبر قاسم مشترك بالترتيب، على سبيل المثال، في D_{24}.

$$3 \vee 6 = 1\text{cm}(3, 6) = 6$$

$$4 \vee 6 = 1\text{cm}(4, 6) = 12$$

$$8 \wedge 3 = \gcd(8, 3) = 1$$

$$12 \wedge 8 = \gcd(12, 8) = 4$$

خصائص الشبكة

في شبكة هناك عنصر أكبر وعنصر أصغر، بالإضافة إلى ذلك، يكون شغل الواصل والملاقي تحقيق خصائص عدة.

النظرية 8.1.4: إذا كانت $P = (X, \leq)$ شبكة، عندها تمتلك P عنصراً أكبر وعنصراً أصغر، بالإضافة إلى ذلك يحقق تشغيل $\vee$ و $\wedge$ الخصائص التالية لكل من $\chi, y, z \in X$،

- **تجميعي**: $\chi \vee (y \vee z) = (\chi \vee y) \vee z$ و $\chi \wedge (y \wedge z) = (\chi \wedge y) \wedge z$
- **تبديلي**: $\chi \vee y = y \vee \chi$ و $\chi \wedge y = y \wedge \chi$
- **لا تؤثر على نفسها**: $\chi \vee \chi = \chi$ و $\chi \wedge \chi = \chi$
- **الامتصاص**: $\chi \vee (\chi \wedge y) = \chi$ و $\chi \wedge (\chi \vee y) = \chi$

البرهان: لتكن $P = (X, \leq)$ شبكة. سوف نثبت وجود عنصر أكبر والجزء الأول من قانون الامتصاص، وسوف نترك الباقي للأسئلة والتمارين.

لتكن χ^* أي عنصر قيمة عظمى بشكل مؤكد وفقاً للمبرهنة 8.1.3. سوف نثبت أن χ^* هو في الحقيقة عنصر أكبر قيمة عن طريق إثبات أن $y \leq \chi^*$ لجميع قيم $y \in X$. لتكن $y \in X$ ، بما أن P هي شبكة يكون الواصل $y \vee \chi^*$ معرّفاً. قم بتعريف $u := y \vee \chi^*$، بما أن u هي حد أعلى لـ y و χ^*، نحصل على أن $y \leq u$ و

$u \leq \chi^*$. في الحقيقة، سوف ينتج عن ذلك $\chi^* = u$ لأنه إذا كان $\chi^* < u$ عندها χ^* لن يكون قيمة عظمى. بما أن $y \leq u$ و $u = \chi^*$ إذا $y \leq \chi^*$. وبالتالي χ^* هو عنصر أكبر قيمة.

سوف نثبت الآن قانون الامتصاص، لإثبات أن $\chi \vee (\chi \wedge y) = \chi$، سوف نعرف أولاً $l =: \chi \wedge y$ ومن ثم نثبت $\chi \vee l = \chi$. بما أن l هو حد أدنى لـ χ و y، ينتج أن $l \leq \chi$ و $l \leq y$ ، الآن، χ هي بالتأكيد حد أعلى لـ χ و l ، لأن $\chi \leq \chi$ و $l \leq \chi$. هل يمكن أن يكون لـ χ و l حد أعلى u يحقق $\chi < u$ ؟ لا، لأن هذا الحد الأعلى سوف يحقق $u \leq \chi$ والذي ينتج عنه $\chi < u \leq \chi$ او $\chi < \chi$ وهذا تعارض. وبناء على ذلك $\chi \vee l = \chi$ وبالتالي $\chi \vee (\chi \wedge y) = \chi$.

السؤال 329: أثبت أن الشبكة لها عنصر أكبر قيمة، وأثبت أيضاً قانون الامتصاص الثاني.

الملخص

المجموعة المرتبة جزئياً هي مجموعة مع علاقة انعكاسية غير تماثلية ومتعدية. تظهر المجموعة المرتبة جزئياً بشكل متكرر لأنه يوجد علاقات مثل "أصغر من أو يساوي"، "مجموعة جزئية من" و"القسمة" تمتلك الخصائص الثلاث السابقة. من المجموعات المرتبة جزئياً المهمة والتي لها غايات توافقية هي الرتبة الكلية n، شبكة المجموعات الجزئية 2^n، شبكة قابلية القسمة D_n، والأقسام المرتبة بالتصفية Π_n.

التمارين

1) ارسم مخطط هاس لـ D_{60}

2) جد مع البرهان، ارتفاع شبكة المجموعة الجزئية 2^n، ثم قم بعدّ طول أكبر سلسلة في المجموعة المرتبة جزئياً.

3) حدد الحالات الضرورية والمناسبة لشبكة القسمة D_n لتكون مجموعة مرتبة كلياً. أثبت أن ما قمت به صحيحاً.

4) لتكن $P = (X, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً، قم بإنشاء مجموعة مرتبة جزئية جديدة عن طريق إضافة عنصر جديد χ^* إلى X والزوج المرتب (χ^*, χ^*) إلى العلاقة. حدد مع البرهان، تأثير ذلك على ارتفاع وعرض ومجموعة القيم العظمى ومجموعة القيم الصغرى ووجود أكبر قيمة ووجود أصغر قيمة.

5) لتكن $P = (X, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً. قم بتعريف المجموعة المرتبة جزئياً $\hat{P}$ عن طريق إضافة عنصرين جديدين $\hat{0}$ و $\hat{1}$ إلى X ، وأيضاً الزوجين المرتبين $(\hat{0}, \hat{0})$ و $(\hat{1}, \hat{1})$، وكذلك $(\hat{0}, \chi)$ و $(\chi, \hat{1})$ لجميع قيم $\chi \in X$.

أ) أثبت أن $\hat{P}$ هي بالتأكيد مجموعة مرتبة جزئياً.

ب) جد مع البرهان، ارتفاع $(\hat{P})$ وعرض $(\hat{P})$ بالنسبة إلى ارتفاع (P) وعرض (P).

6) افترض أن P مجموعة مرتبة جزئياً لها n من العناصر. وأنها ليست مرتبة كلياً، ما هو أكبر عدد من الأزواج المرتبة في العلاقة؟ أثبت أن حلك صحيح.

7) جد عدد الأزواج المرتبة في علاقة المجموعة الجزئية في 2^n.

8) أثبت أن $P = [Y]$، والتي هي المجموعة الجزئية المرتبة جزئياً لـ P والتي تحتوي على العناصر Y ، عبارة عن مجموعة مرتبة جزئياً.

9) أثبت أن Π_n، والتي هي أجزاء [n] والمرتبة بالتصفية، هي مجموعة مرتبة جزئياً، وأيضاً هل هي شبكة؟

10) لتكن $P = (X, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً. افترض A مجموعة جميع العناصر ذات القيمة الصغرى وB مجموعة جميع العناصر ذات القيمة العظمى.

أ) هل A وB دائماً غير متصلين؟ أثبت ذلك أو أعطِ مثالاً ينفي ذلك.

ب) أثبت أن كلاً من A و B هي مضاد للسلسلة.

11) أكمل إثبات المبرهنة 8.1.4.

12) أثبت فيما يخص الشبكة، العبارات التالية متماثلة: $(1)\chi \leq y$ ، $(2)\, \chi \vee y = y$ $(3)\, \chi \wedge y = \chi$.

13) أثبت أو اِنفِ: في الشبكة، أي سلسلة قيمة عظمى هي أكبر سلسلة (الشبكة ذات القيمة العظمى هي الشبكة التي لا يمكن جعلها أكبر بإضافة أي عنصر، السلسلة الأكبر هي السلسلة ذات أكبر طول ممكن).

14) لتكن $P = (X, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً ولها عنصر أكبر بحيث يكون كل زوج من العناصر معرفاً. أثبت أن P عبارة عن شبكة.

ملاحظات سريعة

المصطلحات الخاصة بالمجموعات المرتبة جزئياً هي ثابتة نسبياً، ولكن الرموز الخاصة بها ليست كذلك. قمنا بالتمييز بين المجموعة الأساسية X والعلاقة $\leq$، ولكن يستخدم الكثير من المؤلفين حرفاً واحداً لكل من المجموعة المرتبة جزئياً والعلاقة.

2.8 التماثل ومبرهنة سبيرنر

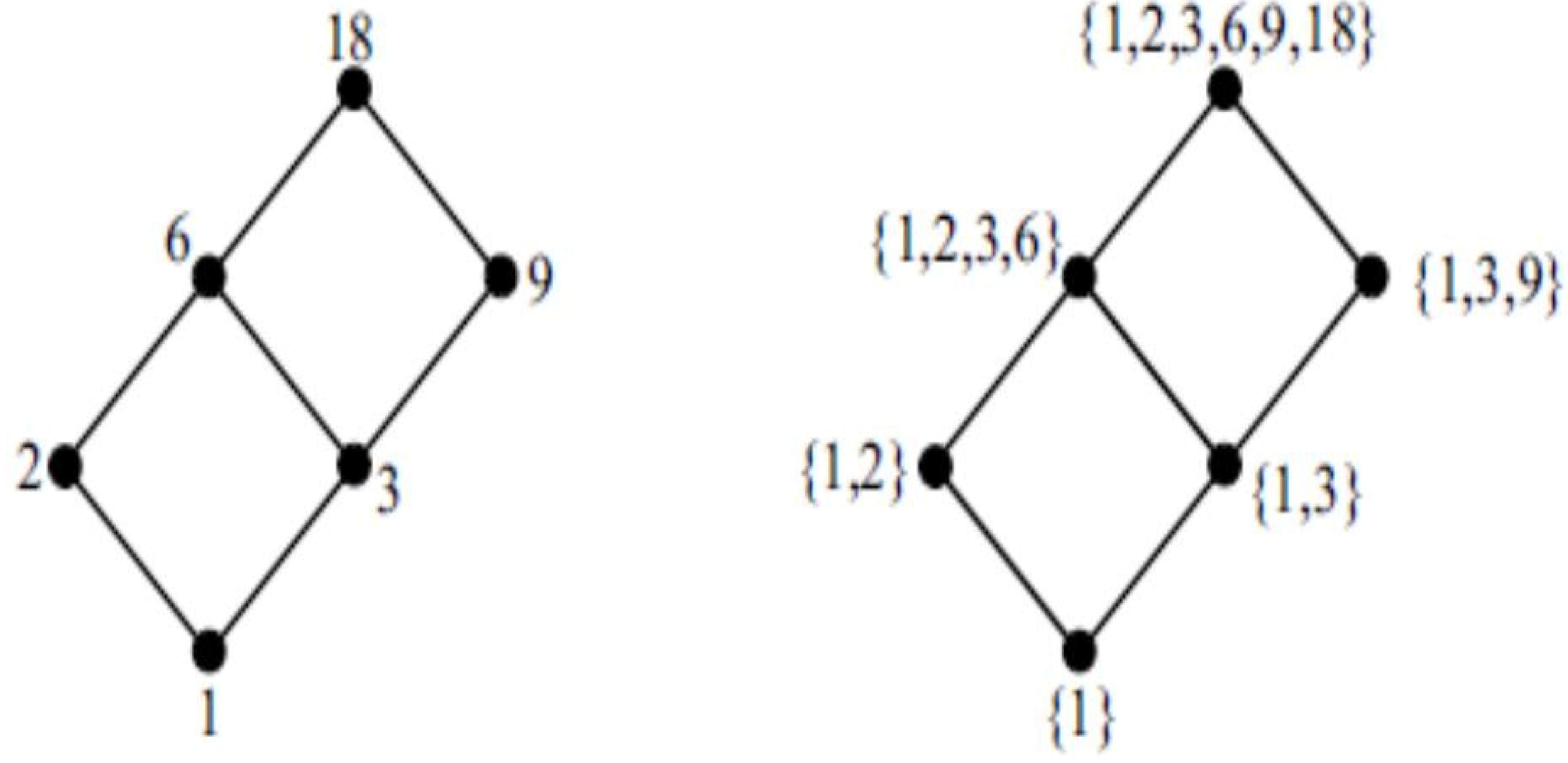
في هذا القسم سوف نقوم باختبار مفهوم تطابق مجموعتين مرتبتين جزئياً. هذا المفهوم للتماثل منتشر في علم الرياضيات. في الفصل السادس بيّنا معنى تماثل مخططين، وسوف نوضح ذلك الآن على المجموعات المرتبة جزئياً. ومن ثم سوف نقوم بإثبات مبرهنة سبيرنر التي من خلالها نجد عرض شبكة المجموعة الجزئية 2^n.

التماثل

افترض وجود المجموعتين المرتبتين جزئياً التاليتين. الأولى هي: شبكة قابلية القسمة D_{18} والثانية هي المجموعة

$$\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1,3\}, \{1, 3, 9\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1,2, 3, 6, 9, 18\}\}$$

والمرتبة بالتضمين، يظهر الشكل 8.5 مخطط هاس لهما



الشكل 8.5: مجموعتان مرتبتان جزئياً متماثلتان.

هاتان المجموعتان المرتبتان جزئياً متطابقتان باستثناء العلامة على كل عنصر. بشكل دقيق أكثر إذا كانت ϕ الدالة التالية

$$\phi(1) = \{1\} \qquad \phi(6) = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$\phi(2) = \{1, 2\} \qquad \phi(9) = \{1, 3, 9\}$$

$$\phi(3) = \{1, 3\} \qquad \phi(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

عندها $x|y$ في المجموعة المرتبة جزئياً الأولى إذا، وفقط إذا، $\phi = (X) \subseteq$ (y) ϕ في المجموعة المرتبة جزئياً الثانية، هاتان المجموعتان المرتبتان جزئياً متماثلتان وتسمى ϕ دالة التماثل.

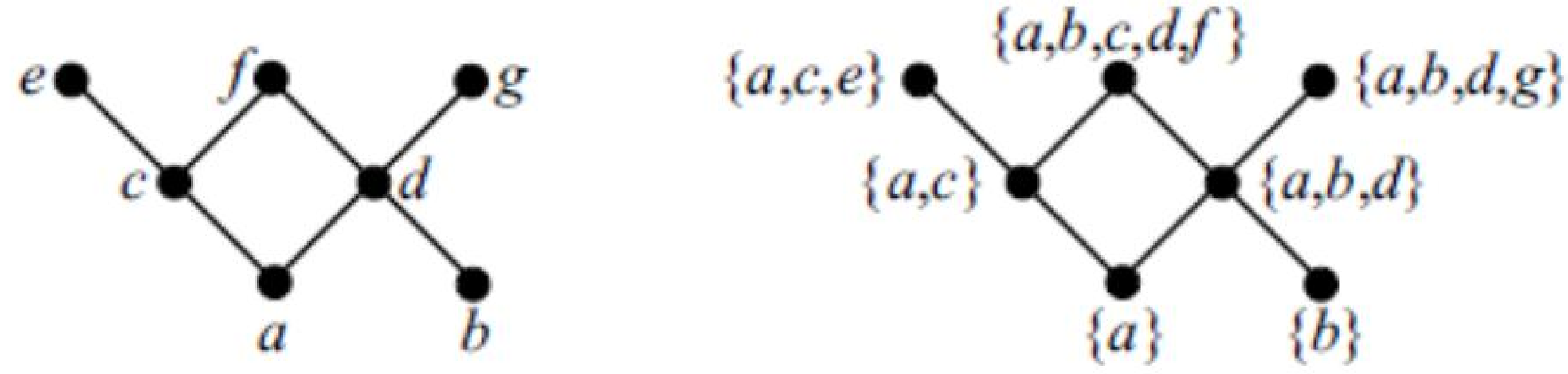
التعريف 8.2.1: لتكن $P = (X, \leq)$ و $Q = (Y, \preccurlyeq)$ مجموعات مرتبة جزئياً، عندها نقول إن P متماثلة مع Q ، ونكتب ذلك $Q \cong P$، ذلك يعني أنه يوجد

علاقة واحد لواحد $X \rightarrow Y$ لها الخصائص التالية: لكل من $\chi_1, \chi_2 \in \chi$، نحصل على $\chi_1 \leq \chi_2$ إذا، وفقط إذا،

$\phi(\chi_1) \preccurlyeq \phi\,(\chi_2)$. علاقة الواحد لواحد ϕ تسمى تماثل.

التماثل والترتيب بالتضمين

سوف نثبت الآن أن أي مجموعة مرتبة جزئياً يمكن التعبير عنها بالعلاقة "هي مجموعة جزئية من". ذلك يعني، أي مجموعة مرتبة جزئياً تكون متماثلة مع حزمة من المجموعات المرتبة بالتضمين. الشكل 8.5 يعتبر مثالاً على ذلك، وهذا مثال آخر:



يوجد لدينا الآن تصور حول كيفية بناء التوافق، المفتاح للحل هو عن طريق العمل على "المجموعات السفلية" للمجموعة المرتبة جزئياً. إذا أعطيت المجموعة المرتبة جزئياً $P = (X, \leq)$ والعنصر $\chi \in X$، المجموعة السفلية لـ χ هي مجموعة العناصر التي "بمحاذاة أو أسفل" χ ، أي،

$$D(\chi) := \{y \in X : y \leq \chi\}$$

في المثال السابق المجموعات السفلية هي

$D(\mathrm{a}) = \{a\}$ $\quad$ $D(\mathrm{e}) = \{a, c, e\}$

$D(\mathrm{b}) = \{b\}$ $\quad$ $D(\mathrm{f}) = \{a, b, c, d, f\}$

$D(\mathrm{c}) = \{a, c\}$ $\quad$ $D(\mathrm{g}) = \{a, b, d, g\}$

$D(\mathrm{d}) = \{a, b, d\}$

السؤال 330: اكتب المجموعة السفلية لكل عنصر في D_{24}. ووفقاً لمفهوم علاقة القسمة، كيف يمكنك أن تصف ما تحتويه كل مجموعة سفلية؟

بشكل عام، الدالة التي تربط كل عنصر بمجموعته السفلية هي التي تحقق التماثل.

المبرهنة 8.2.2: أي مجموعة مرتبة جزئياً تكون متماثلة لحزمة من المجموعات المرتبة بالتضمين. أي، إذا كانت P مجموعة مرتبة جزئياً، عندها تكون P متماثلة مع المجموعات السفلية لـ P والمرتبة بالتضمين.

البرهان: افترض $P = (\mathrm{X}, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً لتكن $\mathcal{D}$ هي حزمة المجموعات السفلية لـ P ولتكن $Q = (\mathcal{D}, \subseteq)$ المجموعات السفلية لـ P والمرتبة بالتضمين. قم بتعريف $\phi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathcal{D}$ عن طريق $\phi(\chi) = D(\chi)$. سوف نثبت أن ϕ هي تماثل.

لإثبات أن ϕ هي علاقة واحد لواحد، افترض أن $\phi(\chi) = \phi(y)$، أي، $D(\chi) = D(y)$. وبالتأكيد $\chi \in D(\chi)$، وينتج عن ذلك $\chi \in D(y)$ لأن

$D\ (\chi) = D(y)$. ذلك يعني أن $\chi \leq y$ ، وبما أن $y \in D(y)$، يمكن استخدام الأسلوب نفسه لاستنتاج أن $y \leq \chi$. عن طريق عدم التماثل، $\chi = y$ ، لذلك ϕ هي علاقة واحد لواحد.

سوف نثبت الآن أن $\chi \leq y$ إذا، وفقط إذا، $\phi\ (\chi) \subseteq \phi\ (y)$، أي، $\chi \leq y$ في P إذا، وفقط إذا، $D\ (\chi) \subseteq D\ (y)$ في Q. افترض في البداية أن $\chi \leq y$ ، لتكن $z \in D(\chi)$. ذلك يعني أن $z \leq \chi$ ؛ وبالتالي ينتج عن علاقة التعدي أن $z \leq y$ ، لذلك $z \in D(y)$. وبالتالي $D(\chi) \subseteq D(y)$.

وفي النهاية افترض أن $D(\chi) \subseteq D(y)$، وبما أن $\chi \in D(\chi)$، ينتج عن ذلك $\chi \in D(y)$. وبالتالي $\chi \leq y$ ، وهذا ينهي إثبات أن ϕ هي تماثل.

التماثل والترتيب الكلي

أي ترتيب كلي لعدد n من العناصر يكون متماثلاً مع المجموعة المرتبة جزئياً n التي تحتوي على المجموعة [n] والمرتبة بالعلاقة العادية أصغر من أو يساوي. على سبيل المثال، المجموعات

$$\{2\}, \{2, 5, 6\}, \{2, 4, 5, 6, 7\}, \{2, 5\}$$

والمرتبة بالتضمين هي ترتيب كلي متماثل مع 4

المبرهنة 8.2.3: إذا كانت P ترتيباً كلياً على عدد من العناصر n ، عندها $P \cong n$

بالرغم من أن هذه النتيجة تبدو طبيعية، يجب إثبات ذلك بشكل دقيق التمرين 6.

السؤال 331: أعط مثالاً على شبكة قابلية القسمة D_n متماثلة مع 10. أي، جد قيمة n بحيث $D_n \cong 10$.

مبرهنة سبيرنر

مخططات هاس لشبكات المجموعات المرتبة جزئياً 2^3 و 2^4 تظهر في الشكل 8.1. المجموعة المرتبة جزئياً السابقة عرضها 6 وطول أكبر مضاد سلسلة هو

$$\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$$

وهي تحتوي المجموعات الجزئية $\binom{4}{2}$ التي طولها 2 لـ [4]. المجموعة المرتبة جزئياً 2^3 عرضها 3 ولها اثنان من مضاد سلسلة لهما أكبر طول

$$\{\{1\},\{2\},\{3\}\} \text{ و } \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$$

الأولى تحتوي المجموعات الجزئية $\binom{3}{1}$ التي طولها 1 والثانية تحتوي المجموعات الجزئية $\binom{3}{2}$ والتي طولها 2.

يظهر أنه في أي شبكة مجموعة جزئية 2^n، تشكل جميع المجموعات الجزئية لـ $[n]$ والتي لها حجم ثابت مضاد سلسلة ذات قيمة عظمى أي مضاد السلسلة التي لا يمكن جعلها أكبر عن طريق إضافة أي عنصر آخر. على سبيل المثال، إذا أخذنا مضاد

السلسلة الذي طوله 6 والمبين في الأعلى لـ 2^4 وأضفنا إليه في مجموعة جزئية حجمها ,3 ,1 ,0 او 4 ، سوف لا تكون النتيجة مضاد سلسلة.

لذلك عند البحث عن مضاد سلسلة لـ 2^n بأكبر طول ممكن، من الأفضل البدء بالبحث بالمجموعة الجزئية $\binom{n}{k}$ التي حجمها k لـ $[n]$. قيمة k التي تجعل ذلك أكبر ما يمكن هي $k = \lfloor n / 2 \rfloor$. مضاد السلسلة هذه هي قيمة عظمى، لكن هل هي أكبر قيمة؟ تقول مبرهنة سبيرنر التي تم نشرها في العام 1928 أنها كذلك. تم نشر البرهان الذي سوف نقدمه عن طريق لوبل (1966) (Lubell).

دعنا نأخذ لحظة لنوضح مسألة العدّ التي تتطلبها الخطوة الأهم في هذا البرهان. في شبكة المجموعة الجزئية 2^5, كم عدد السلاسل ذات القيمة الأكبر التي تحتوي $\{2,4,5\}$؟ لاحظ أن هذه السلسلة تبدأ بـ $\emptyset$ وتنتهي بـ $[5]$، على سبيل المثال،

$$\underbrace{\emptyset \subseteq \{4\} \subseteq \{4,5\}}_{below\{2,4,5\}}, \subseteq \{2,4,5\} \subseteq \underbrace{\{2,3,4,5\}, \subseteq \{1,2,3,4,5\}}_{above\{2,4,5\}}$$

الإجابة عن السؤال المتعلق بالعدّ نحدد عدد الطرق التي يمكن بها تحديد الجزء من السلسلة الذي يكون أسفل $\{2,4,5\}$ والجزء من السلسلة الذي يكون أعلى من $\{2,4,5\}$. يوجد $3!$ طرق لتحديد الجزء الأسفل و $2!$ طرق لتحديد الجزء الأعلى. لذلك يوجد عدد من السلاسل $3!\,2!$ لها أكبر قيمة تحتوي $\{2,4,5\}$.

السؤال 332: قم بتبرير آخر جملتين. لتكن S مجموعة جزئية حجمها k لـ $[n]$. في شبكة المجموعة الجزئية 2^n، كم عدد السلاسل ذات أكبر قيمة تحتوي S؟

بشكل عام يوجد $n!$ من السلاسل ذات القيمة الأكبر في 2^n. يمكننا الآن إثبات مبرهنة سبيرنر.

المبرهنة 8.2.4: (سبيرنر) عرض شبكة المجموعة الجزئية 2^n هي $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

البرهان: لتكن $\omega :=$ عرض (2^n). سوف نثبت أولاً أنه توجد مضاد سلسلة طولها $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ ومن ثم نثبت أنه لا توجد مضاد سلسلة أكبر من ذلك. أي سوف نثبت أن $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \geq \omega$ ومن ثم نثبت أن $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq \omega$.

افترض المجموعات الجزئية $\binom{n}{k}$ التي حجمهاk لـ $[n]$. هه تشكل مضاد سلسلة لأنه إذا كانت S_1 و S_2 مجموعتين جزئيتين غير متساويتين، وكل منهما تحتوي على عدد k من العناصر، عندها $S_2 \not\subseteq S_1$ و$S_1 \not\subseteq S_2$. بالتحديد عندما تكون $k = \lfloor n / 2 \rfloor$ سوف نحصل على مضاد سلسلة طولها $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. لذلك $\omega \geq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

الآن افترض أن $\{S_1, S_2, \ldots, S_\omega\}$ هي أكبر سلسلة في 2^n . لكل من $i \in [\omega]$ ، لتكن $\mathcal{C}_i$ هي مجموعة جميع السلاسل الكبرى التي تحتوي S_i. لاحظ أن

$$\left|\mathcal{C}_i\right| = |S_i|!\,.\,(n - |S_i|)!,$$

لأنه يوجد عدد من الطرق يساوي $|S_i|!$ لتحديد الجزء من السلسلة أسفل S_i و عدد من الطرق يساوي $(n - |S_i|)!$ لتحديد الجزء من السلسلة فوق S_i .

المجموعات $\mathcal{C}_i$ غير مرتبط وبالتالي مجموع أحجامها على الأغلب هو العدد الكلي للسلاسل الكبرى في 2^n :

$$\sum_{i=1}^{\omega}\left|\mathcal{C}_i\right| = \sum_{i=1}^{\omega}|s_i|!\,. = (n - |S_i|)! \le n!$$

أو

$$\sum_{i=1}^{\omega}\frac{|S_i|!\,.\,(n - |S_i|)!}{n!} \le 1$$

بإعادة كتابة الحد i للمجموع على اليمين نحصل على

$$\sum_{i=1}^{\omega}\frac{1}{\binom{n}{|S_i|}} \le 1$$

نعلم أن $\binom{n}{k}$ يكون لها أكبر قيمة عندما $k = \lfloor n / 2\rfloor$، لذلك

$\binom{n}{|S_i|} \le \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ او $\frac{1}{\binom{n}{|S_i|}} \le \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}}$ لجميع قيم i

ويمكن استخدام هذه المتباينة للحصول على

$$\sum_{i=1}^{\omega} \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \leq 1$$

والتي ينتج عنها $1 \leq \frac{\omega}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}$ او $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq \omega$. وهذا يكمل البرهان.

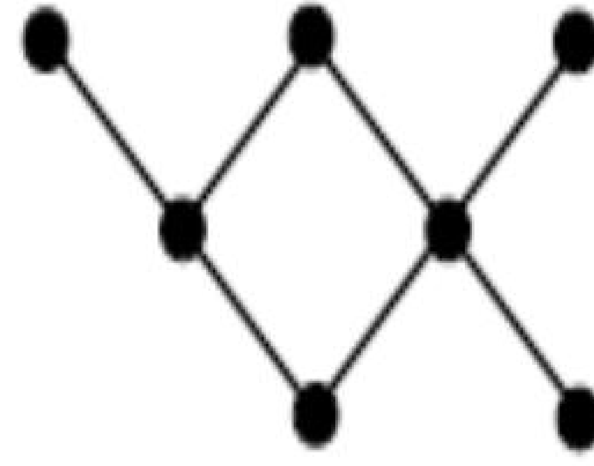
هل يوجد مضادات سلسلة غير تلك التي تحتوي جميع المجموعات الجزئية التي حجمها $n / 2$ (عندما تكون n زوجية) أو تلك التي حجمها $(n-1) / 2$ أو $(n+1) / 2$ (عندما تكون n فردية)؟ لقد تم إثبات ذلك (انظر إلى الفصل 3 في كتاب (Erickson (1996) والجواب هو لا: مضادات السلسلة الوحيدة التي لها أكبر قيمة في 2^n هي تلك التي تكون طبيعية فقط. انظر التمرين 8 من أجل البرهان عندما n زوجية.

الملخص

تماثل المجموعات المرتبة جزئياً يوضح تماماً فكرة تكافؤ مجموعتين مرتبتين جزئياً حتى مرحلة إعادة ترميز العناصر في مجموعتها الأساس. لقد استخدمنا ذلك لإثبات أن أي مجموعة مرتبة جزئياً يمكن تمثيلها كحزمة من المجموعات المرتبة بالتضمين. ومن ثم استخدمنا طريقة العدّ لإثبات مبرهنة سبيرنر، التي تنص على أن عرض $(2^n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. ■

التمارين

1) جد مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة X بحيث تكون قيم X المرتبة بقابلية القسمة متماثلة مع المجموعة المرتبة جزئياً في الشكل أسفل، أو أثبت أنه لا يوجد X تحقق ذلك.



2) أي مجموعة مرتبة جزئياً لها ثلاثة عناصر يجب أن تكون متماثلة مع إحدى المجموعات المرتبة جزئياً التالية:



حدد عدد الشبكات غير المتماثلة التي لها أربعة عناصر عن طريق رسم مخطط هاس لها.

3) حدد عدد الشبكات غير المتماثلة التي لها خمسة عناصر عن طريق رسم مخطط هاس لها.

4) أثبت أن تماثل المجموعات المرتبة جزئياً $\cong$ هي علاقة تكافؤ.

5) افترض أن $n = p^k$ لبعض الأعداد الأولية p وبعض الأعداد الصحيحة الموجبة k. أثبت أن $D_n \cong k + 1$.

6) أثبت المبرهنة 8.2.3 بالاستقراء على n.

7) لتكن $\mathbb{B}^n$ هي مجموعة جميع الأعداد الثنائية التي تتكون من n مرتبة. لعددين مثل χ و y، عند قولنا إن $\chi \leq y$ ذلك يعني أن $\chi_i \leq y_i$ لجميع قيم $i = 1, 2, \ldots, n$. على سبيل المثال في $\mathbb{B}^4$، يكون لدينا $0101 \leq 0100$ و $1111 \leq 0110$ لكن

$1110 \nleq 0101$.

أ) أثبت أن $(\mathbb{B}^n, \leq)$ هي مجموعة مرتبة جزئياً.

ب) جد مجموعة مرتبة جزئياً معروفة متماثلة مع $(\mathbb{B}^n, \leq)$ وأثبت أن حلك صحيح.

8) هدف هذا التمرين إثبات أن مضاد السلسلة الأكبر الوحيد في 2^n عندما تكون n زوجية هي تلك التي تحتوي المجموعات الجزئية التي حجمها $\frac{n}{2}$ في $[n]$. قم بتحليل إثبات مبرهنة سبيرنر لتحدد متى يحصل التساوي في الحد الأعلى على

ω، ومن ثم استخدم هذا الأسلوب لتفسر لماذا يجب أن يحتوي مضاد السلسلة الأكبر $\{S_1, S_2, \dots, S_\omega\}$ على المجموعة الجزئية التي حجمها $n / 2$ لـ $[n]$.

ملاحظات سريعة

يجب عدم الخلط بين مبرهنة سبيرنر ومسلّمة سبيرنر المساعدة، التي تهتم بالتثليث ومرتبطة ارتباطاً كبيراً بمبرهنة النقطة الثابتة لبراور في علم الأبعاد (التوبولوجيا).

مبرهنة سبيرنر هي نتيجة أساسية في حقل مجموعات القيم العظمى، المسألة الأساسية هي إيجاد أكبر حزمة ممكنة من المجموعات تحقق شروطاً معينة. يمكن إعادة كتابة المبرهنة وفقاً لذلك كما يلي: إذا كانت $S_1, S_2, \dots, S_r$ هي حزمة من المجموعات الجزئية لـ $[n]$ بحيث $S_i \nsubseteq S_j$ لجميع قيم $i \neq j$، عندها $r \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

مثال آخر كنتيجة لنظرية المجموعة القصوى هي نظرية إيردوس- كو - رادو (Erdös-Ko-Rado): إذا كانت $S_1, S_2, \dots, S_r$ هي حزمة من مجموعات جزئية حجمها k لـ $[n]$ بحيث تكون مختلفة ومتقاطعة على شكل أزواج، حيث $k \leq n / 2$ ، عندها $r \leq \binom{n-1}{k-1}$. متقاطعة بشكل زوجي تعني أن $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ لجميع قيم i و j.

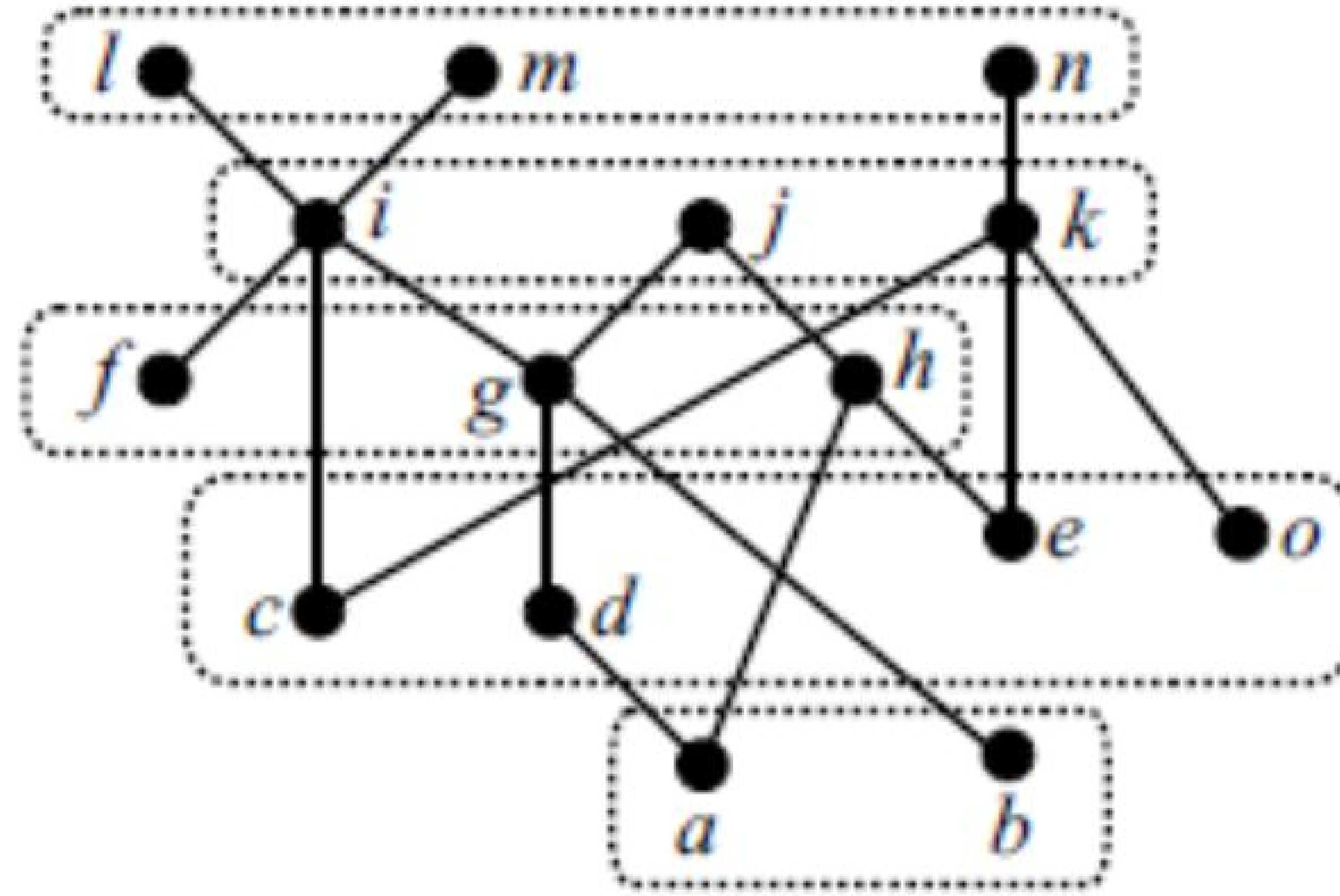
3.8 مبرهنة ديلوورث

بعد مبرهنة سبيرنر، مبرهنة ديلوورث هي المبرهنة الثانية في نواتج النظرية التوافقية الكلاسيكية حول المجموعات المرتبة جزئياً التي قمنا بدراستها. تنص مبرهنة ديلوورث على أنه عند تقسيم المجموعة الأساس لمجموعة مرتبة جزئياً إلى

سلاسل أو مضادات سلاسل، يكون أقل عدد من الكتل في هذا التقسيم مساوياً للعرض في السلسلة أو الارتفاع في مضادّ السلسة.

أغطية مضاد السلسة ومبرهنة ديلوورث، الجزء الأول

عند تقسيم العناصر الـ 15 للمجموعة المرتبة جزئياً في الشكل 8.3 (وأيضاً موجودة في الشكل أسفل) تكون كل كتلة في التقسيم عبارة عن مضاد سلسلة. يمكننا أن نضع كل عنصر من العناصر الـ 15 في كتلته ولكن بالطبع نحن نريد استخدام أقل عدد من الكتل. يبين المخطط التالي عملية التقسيم إلى خمس كتل بحيث تكون كل كتلة عبارة عن مضاد سلسلة.



هذا التقسيم للمجموعة الأساسية $X = \{a, b, c, \dots, o\}$ إلى مضادات سلسلة

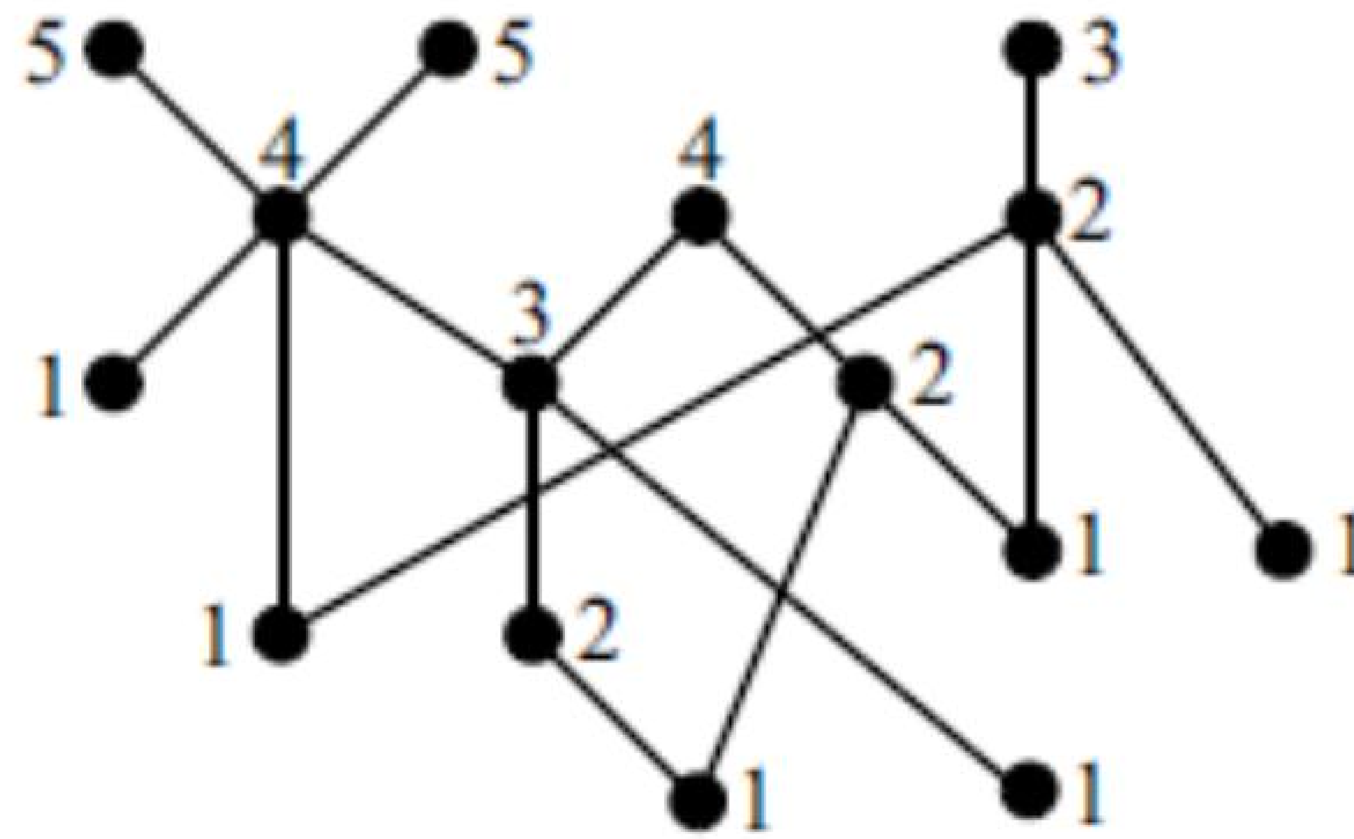
هو

$$\mathcal{A} = \big\{\{a, b\}, \{c, d, e, o\}, \{f, g, h\}\{i, j, k\}, \{l, m, n\}\big\}$$

ويعرف باسم غطاء مضاد السلسلة. لأي مجموعة مرتبة جزئياً، غطاء مضاد السلسلة يكون تقسيماً في المجموعة الأساس بحيث تكون كل كتلة فيه مضاد سلسلة.

السؤال 333: جد غطاء مضاد السلسلة بأقل عدد ممكن من الكتل لشبكات المجموعات الجزئية 2^3 و 2^4 .

ما هو أقل طول ممكن لغطاء مضاد السلسلة؟ الطريقة التي تم رسم بها الصناديق المنقطة في مخطط هاس الموجود في الأعلى تظهر أنه قد تكون هناك طريقة لوضع العناصر في المجموعة الأساس بحيث يمكن إظهار مضاد السلسلة بسهولة. لنقم بتعريف ارتفاع العنصر بأنه ارتفاع أكبر سلسلة في المجموعة المرتبة جزئياً والتي يكون فيها هذا العنصر أكبر عنصر ممكن. عن طريق ترميز كل عنصر في المثال السابق بارتفاعه ينتج



سوف ينتج عن هذا تقسيم مختلف للمجموعة الأساس عن ذلك الموجود في السابق، لكنه يحتوي العدد نفسه من مضادات السلسلة:

$$\acute{A} = \{\{a, b, c, e, f, o\}, \{d, h, k\}, \{g, n\}\{i, j\}, \{l, m\}\}$$

هل يمكن إيجاد غطاء مضاد سلسلة لهذه المجموعة المرتبة جزئياً باستخدام عدد أقل من خمسة مضادات سلسلة؟ لا، لأن ارتفاع المجموعة المرتبة جزئياً تحدد الحد الأدنى لعدد مضادات السلسلة المطلوبة لتغطية المجموعة الأساسية. ارتفاع المجموعة المرتبة جزئياً الحالية يساوي خمسة، وأيضاً

$$a < d < g < i < m$$

هي أكبر سلسلة ممكنة، بما أنه يمكن مقارنة أي عنصرين من هذه العناصر، يجب أن يضع أي غطاء مضاد سلسلة كلاً من هذه العناصر الخمسة في كتلة مختلفة.

هذا يتطلب إثباتاً بنائياً لأول نتيجة حول التغطية. سوف نعتبر ذلك جزءاً من مبرهنة ديلوورث بالرغم من أن مبرهنته الأصلية تربط بين غطاء السلسلة بالعرض وليس غطاء مضاد السلسلة بالارتفاع.

المبرهنة 8.3.1: إذا كانت P مجموعة مرتبة جزئياً، عندها يوجد تقسيم للمجموعة الأساس إلى كتل ارتفاعها (P) ، وكل منها يعتبر مضاد سلسلة، وهذا يعتبر الأفضل الممكن.

البرهان: افترض أن $P = (X, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً بارتفاع $h = (P)$.
لاحظ أن غطاء مضاد السلسلة يتطلب على الأقل h من مضادات السلسلة، لأي

عنصرين في أكبر سلسلة قابلين للمقارنة لا يمكن أن يتواجدا في الكتلة نفسها في الجزء من مضاد السلسلة.

سوف نثبت الآن أنه يوجد غطاء مضاد سلسلة طولها h. لكل من $i \in [h]$ ، قم بتعريفA_i ليكون مجموعة العناصر التي ارتفاعها i. أي،

$$A_i := \{\chi \in \mathrm{X} : \text{height}\ (\chi) = i\}$$

تذكر أن ارتفاع العنصر χ هو ارتفاع أكبر سلسلة في P والتي العنصر الأكبر فيها هو χ.

سوف نبين الآن أن $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_h\}$ هو غطاء مضاد سلسلة. لإثبات أن $\mathcal{A}$ هو جزء من X افترض وجود أي سلسلة ارتفاعها h، لتكن

$$\chi_1 < \cdots < \chi_h$$

لاحظ أن $\chi_i \in A_i$، لقيم $i \in [h]$، بما أن السلسلة التي ارتفاعها h هي بالضرورة أكبر سلسلة، لذلك كل كتلة في $\mathcal{A}$ لا تكون فارغة. بالإضافة إلى ذلك، كل عنصر في X يجب أن يكون في كتلة ما لأن ارتفاع كل عنصر χ معرف بشكل جيد وإذا كان $i =$ ارتفاع(χ) عندها $\chi \in A_i$.

يبقى أن نثبت أن كل كتلة في $\mathcal{A}$ هي مضاد سلسلة. وفي أسلوب التعارض، افترض كتلة ما A_i ليست مضاد سلسلة، عندها سوف يكون هناك عناصر $\chi, y \in A_i$ بحيث $\chi < y$. بما أن $\chi \in A_i$ ، بالتعريف $i =$ ارتفاع(χ) لذلك يوجد سلسلة

$$\chi_1 < \cdots < \chi$$

ارتفاعها i في P. وبما أن $y \in A_i$ إذن يوجد $i =$ ارتفاع(y) ، لكن عندها

$$\chi_1 < \cdots < \chi < y$$

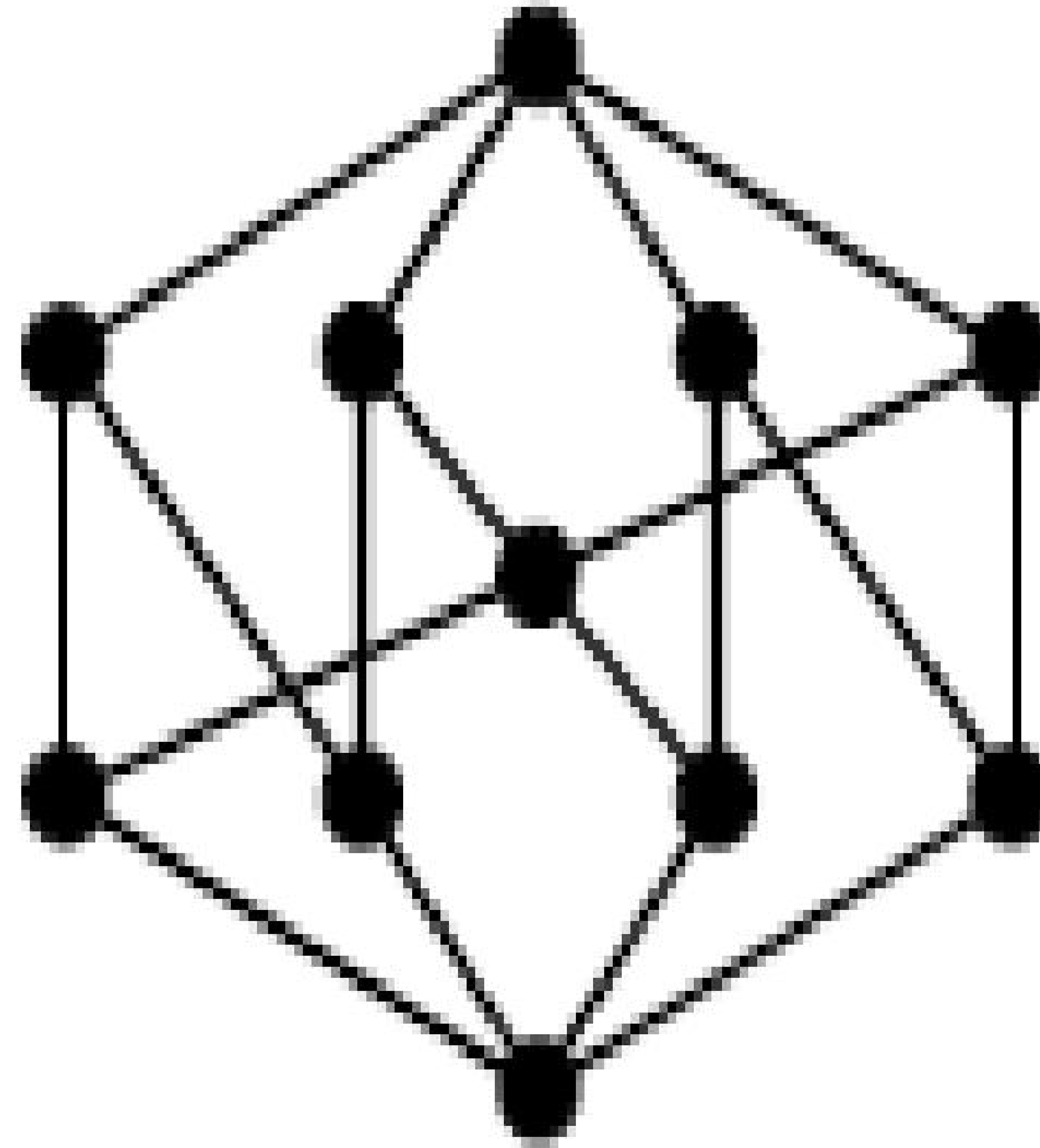
هي سلسلة في P ارتفاعها $i + 1$ وهذا يتناقص مع $i =$ ارتفاع (y). لذلك كل من A_i هو مضاد سلسلة، وهذا يكمل البرهان

■

مثال: تحديد الارتفاع

توفر المبرهنة طريقة محكمة لإثبات أن ارتفاع المجموعة المرتبة جزئياً هو h. وبالتحديد تظهر سلسلة ارتفاعها h وأيضاً غطاء مضاد السلسلة بالارتفاع نفسه.

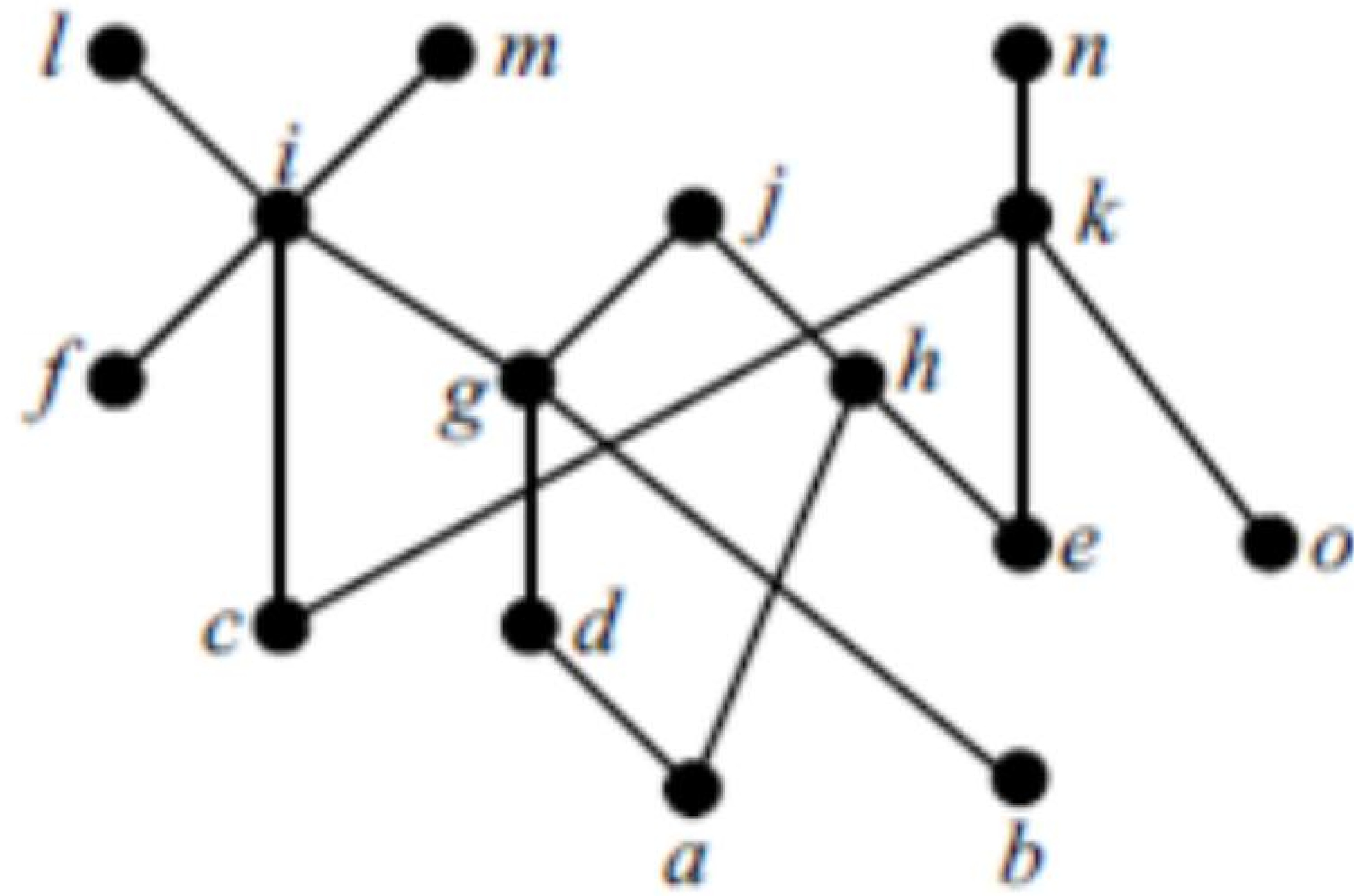
السؤال 334: استخدم هذه الطريقة لإيجاد ارتفاع المجموعة المرتبة جزئياً المبين في الشكل أدناه



أغطية السلسلة ومبرهنة ديلوورث، الجزء الثاني

كما في ارتفاع المجموعة المرتبة جزئياً التي تحدد أصغر طول لغطاء مضاد السلسلة، عرض المجموعة المرتبة جزئياً يحدد أصغر طول لغطاء السلسلة. هذه النتيجة هي المبرهنة الأصلية لديلوورث.

مرة أخرى، قم باختبار المجموعة المرتبة جزئياً في الشكل 8.3، لكن في هذه المرة حاول تقسيم المجموعة الأساس إلى سلاسل. هذه طريقة عمل ذلك:



في هذه المرة عرض المجموعة المرتبة جزئياً الذي يساوي 6 يجبرنا أن نستخدم على الأقل ست سلاسل. هذا لأنه أي مضاد سلسلة تحتوي على أزواج من العناصر غير قابلة للمقارنة. لذلك، لا يوجد عنصران في مضاد السلسلة نفسه يمكن أن يكونا في السلسلة نفسها.

وعن طريق استبدال الارتفاع بالعرض ومضاد السلسلة بالسلسلة في المبرهنة 8.3.1 ينتج عنه مبرهنة ديلورث الأصلية، والتي إثباتها أكثر صعوبة.

المبرهنة 8.3.2 (ديلوورث): إذا كانت P مجموعة مرتبة جزئياً، عندها يوجد تقسيم في المجموعة الأساس عرضه (P) كتل، وكل منها هي سلسلة. بالإضافة إلى ذلك، هذا أكبر طول ممكن.

البرهان: سيكون البرهان باستخدام الاستقراء على حجم المجموعة الأساس. عندما تمتلك المجموعة الأساس عنصراً أو اثنين، يمكنك أن تتحقق من أن نتيجة المبرهنة صحيحة لهكذا مجموعة مرتبة جزئياً.

الآن افترض أن n هو عدد صحيح، $n \geq 2$ ، وأن نتيجة المبرهنة صحيحة لأي مجموعة مرتبة جزئياً على n أو أقل من ذلك من العناصر. لتكن $P = (X, R)$ هي المجموعة المرتبة جزئياً التي لها $|X| = n + 1$. لتكن C هي أي سلسلة قصوى في P. سوف نقوم بتقسيم التحليل إلى حالتين وفقاً لعرض المجموعة المرتبة جزئياً الناتجة من إلغاء C من P.

حالة (1): استدللنا المجموعة الجزئية المرتبة جزئياً الناتجة $\acute{P}$ من P عن طريق إلغاء السلسلة C، حيث عرض(P) > عرض$(\acute{P})$. بما أن $\acute{P} := (X -$

$C, R\ [X - C])$ هي مجموعة مرتبة جزئياً عدد عناصرها n أو أقل، فرضية الاستقراء تؤدي إلى أنه يوجد تقسيم لمجموعتها الأساس إلى السلاسل $\acute{\omega}$

$$X - C = C_1 \cup \ldots \cup C_{\acute{\omega}}$$

حيث عرض$(\acute{P}) =: \acute{\omega}$. ولكن عندها

$$X = C_1 \cup \ldots \cup C_{\acute{\omega}} \cup C$$

هي تقسيم لـ X إلى السلاسل $\acute{\omega} + 1$. إذا كان $\acute{\omega} + 1 =$ عرض(P)، عندها أكملنا في هذه الحالة، حيث نكون قد أوجدنا تقسيماً لـ X إلى العدد المطلوب من السلاسل. أي تقسيماً لـ X إلى سلاسل يتطلب على الأقل سلاسل عرضها (P). وبما أننا أوجدنا تقسيماً إلى عدد من السلاسل يساوي $\acute{\omega} + 1$، نكون حصلنا على $\acute{\omega} + 1 \leq$ عرض$(\acute{P})$. وأيضاً، لقد افترضنا في هذه الحالة أن عرض(P) $>$ عرض$(\acute{P})$، أي عرض$(P) > \acute{\omega}$ أو عرض$(P) \leq \acute{\omega} + 1$. وبدمج ذلك، ينتج عن هاتين المتباينتين $\acute{\omega} + 1 =$عرض(P). هذا يكمل الخطوة الاستقرائية في هذه الحالة.

حالة (2): المجموعة الجزئية المرتبة جزئياً المستحثة $\acute{P}$ والتي حصلنا عليها من P عن طريق إلغاء السلسلة C، لها عرض$(\acute{P})$ = عرض(P). دعنا نلاحظ في البداية أنه في هذه الحالة ستكون $|C| \geq 2$، إذ لو كانت C لها عنصر واحد فقط، فكون C سلسلة

كبرى سوف يعني أنها "نقطة معزولة" (تخيل مخطط هاس). ولكن عندها عرض(P) > عرض$(\acute{P})$، وهذا تعارض مع فرضيتنا.

في المجموعة المرتبة جزئياً P ، لتكن χ^{+} و χ^{-} هما العنصرين أكبر قيمة وأصغر قيمة في C. قم بتعريف P^{*} لتكون المجموعة الجزئية المرتبة جزئياً المستحثة من P عن طريق إلغاء χ^{+} و χ^{-}. لاحظ لأن P^{*} ليست فارغة لأن P لها عدداً من العناصر $n+1$ وأننا افترضنا أن $n \geq 2$. ولها أيضاً عرض(P) = عرض(P^{*}) وفقاً لفرضيتنا. لتكن A مضاد سلسلة في P^{*} طولها ω ، حيث عرض(P) =: ω.

$$A = \{a_1, \dots, a_\omega\}$$

وبالتأكيد A هي أيضاً مضاد سلسلة في P.

قم بتعريف D لتكون المجموعة الجزئية المرتبة جزئياً في P والمستحثة من العناصر التي هي على مستوى أو أسفل مضاد السلسلة A. أي،

$$D := (D(A), \mathrm{R}\,[D(A)])$$

حيث D(A) هي المجموعة السفلية لـ A:

$$D(A) := \left\{\chi \in \mathrm{X} : \chi \leq \text{على الأقل واحدة } a \in A\right\}$$

وبشكل مشابه لنقم بتعريف

$$U := (U(A), \mathrm{R}\,[U(A)])$$

لتكن المجموعة الجزئية المرتبة جزئياً في P المستحثة من المجموعة التي أعلى A:

$$U(A) := \{\chi \in \mathrm{X} : a \leq \chi \text{ على الأقل واحدة } a \in A\}$$

سوف نثبت تالياً أنه يمكن تقسيم X إلى ثلاث كتل كما يلي:

$$\mathrm{X} = A \cup (D(A) - A) \cup (U(A) - A)$$

من الواضح أن A ليست فارغة، لأن $\chi^- \in D(A) - A$ و $\chi^+ \in U(A) -$ A.

السؤال 335: تحقق من هذه النتائج.

أيضاً، المجموعات الثلاث غير متصلة بشكل زوجي. ومن الواضح أن الزوج A و$D(A) - A$ والزوج A و $U(A) - A$ هما غير متصلين. أما بالنسبة إلى الأزواج الأخرى، افترض $\chi \in D(A) - A$ و $\chi \in U(A) - A$ ، عندها $\chi \leq a$ لبعض قيم $a \in A$ و $b \leq \chi$ لبعض قيم $b \in A$. لكن عندها $b \leq a$، وهذا يتعارض مع حقيقة أن A هي مضاد سلسلة.

باقي البرهان يتضمن أولاً تطبيق فرضية الاستقراء على المجموعات الجزئية المستحثة $D(A)$ و$U(A)$ ومن ثم دمج تقسيمات السلسلة الناتجة في تقسيم للسلسلة في P.

قم بتعريف المجموعات المرتبة جزئياً

$$P^{-} := (D(A), \mathrm{R}\,[D(A)])$$

$$P^{+} := (U(A), \mathrm{R}\,[U(A)])$$

تذكر أن P لها عدداً من العناصر $n+1$. كل من المجموعتين المرتبتين جزئياً في الأعلى لها على الأكثر عدداً من العناصر n لأن $\chi^{+} \notin D(A)$ و $\chi^{-} \notin U(A)$. لذلك وفقاً لفرضية الاستقراء يوجد تقسيمات للسلسلة

$$D(A) = \mathrm{C}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{C}_\omega$$

$$U(A) = \mathrm{D}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{D}_\omega$$

لاحظ أن A مضاد سلسلة لكل من المجموعات الجزئية المرتبة جزئياً السابقة لذلك كل منها عرضه ω. ومن الممكن عن طريق إعادة فهرسة كتل كل تقسيم، يمكن أن نفترض أن $a_i \in C_i \cap D_i$ لجميع قيم $i \in [\omega]$. ذلك لأن A هي سلسلة أكبر قيمة لكل من P^{-} و P^{+}، وكذلك كل من $a_i \in A$ يجب أن تظهر في كتلة مختلفة لكل من التقسيمين. ولاحظ أيضاً أنه لجميع قيم $i \in [\omega]$ المجموعة $C_i \cup D_i$ هي سلسلة.

أخيراً، قم بتصميغ هذه التقسيمات للسلسلة بقسم السلسلة في X في كتل بعرض$(P) = \acute{\omega}$ ، وكل منها هي سلسلة

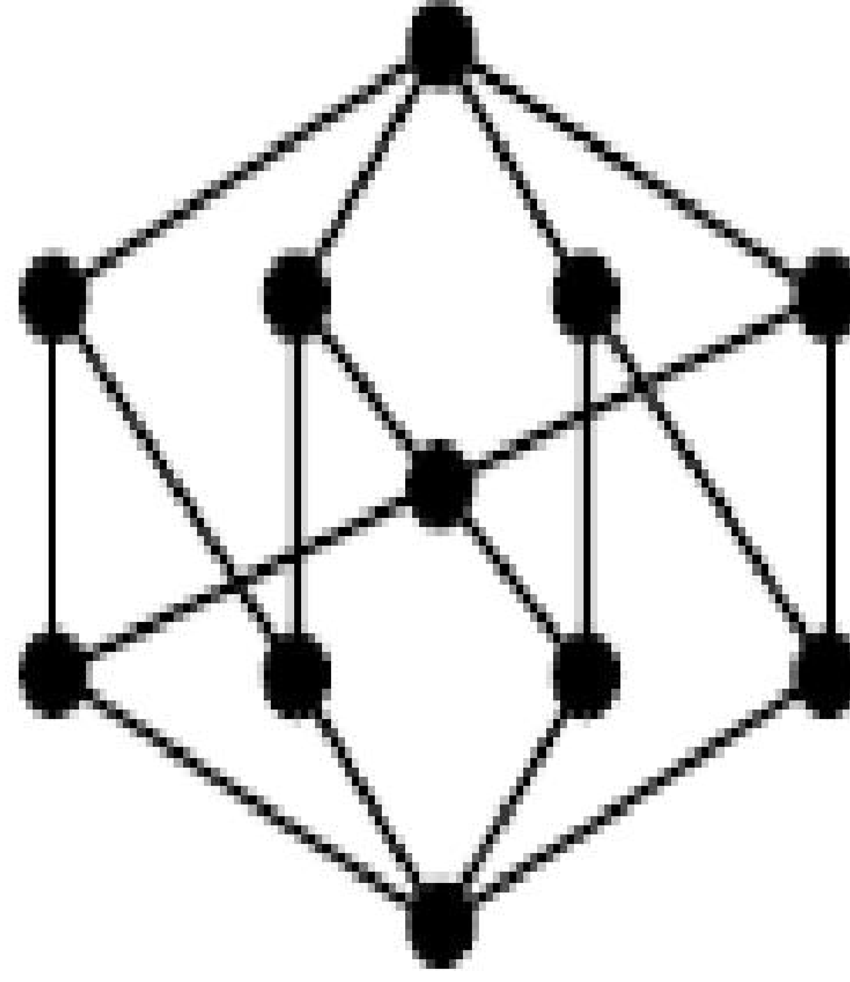
$$\mathrm{X} = (\mathrm{C}_1 \cup \mathrm{D}_1) \cup \ldots \cup (\mathrm{C}_\omega \cup \mathrm{D}_\omega)$$

هذا يكمل الخطوة الاستقرائية في هذه الحالة وإثبات النظرية.

مثال: تحديد العرض

كما في المبرهنة 8.3.1، يمكن استخدام مبرهنة ديلوورث لتأكيد عرض مجموعة مرتبة جزئياً.

السؤال 336: استخدم مبرهنة ديلوورث لتحديد عرض المجموعة المرتبة جزئياً في الأسفل.



الملخص

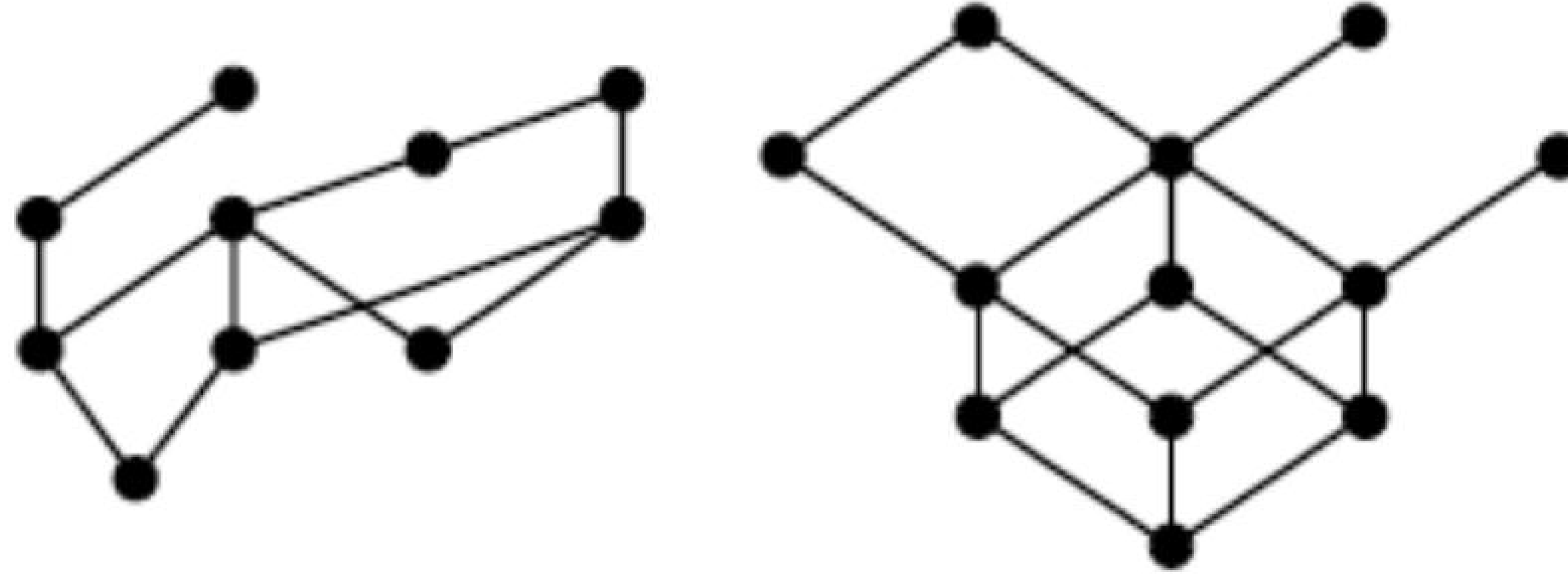
قمنا في هذا القسم بإثبات نتيجتين صحيحتين لأي مجموعة مرتبة جزئياً: (1) أقل عدد من مضادات السلسلة تلزم لتقسيم المجموعة الأساس يساوي الارتفاع، (2) أقل عدد ممكن من السلاسل تلزم لتقسيم المجموعة الأساس يساوي العرض. ويمكن استخدام كل منها لتحديد ارتفاع أو عرض المجموعة المرتبة جزئياً.

التمارين

1) جد ارتفاع وعرض المجموعات المرتبة جزئياً التالية: 10، D_{24}, و Π_4, استخدم النسخة المناسبة من مبرهنة ديلوورث لإيجاد الحل.

2) ارسم مخطط هاس لمجموعة مرتبة جزئياً ارتفاعها 2 وعرضها 8 والتي تحتوي عنصراً أكبر قيمة. ارسم مخطط هاس لمجموعة مرتبة جزئياً ارتفاعها 8 وعرضها 2 ولا تحتوي على عناصر أكبر أو أصغر قيمة. ارسم مخطط هاس لشبكة ارتفاعها 4 وعرضها 2.

3) استخدم مبرهنة ديلوورث لتحديد ارتفاع وعرض كل من المجموعات الجزئية التالية:



4) جد مثالاً على مجموعة مرتبة جزئياً P بحيث يكون $(P -$ عرض(P) = عرض$(C$ لجميع السلاسل غير الفارغة C في P.

5) ليكن m و n عددين صحيحين موجبين. أعط مثالاً على مجموعة مرتبة جزئياً ارتفاعها m وعرضها n على عدد من العناصر mn .

6) أثبت النتيجة التالية والتي تعرف بأنها مسلمة ديلوورث: إذا كانت P مجموعة مرتبة جزئياً على $mn + 1$ من العناصر، عندها إما تحتوي P على سلسلة طولها $m + 1$ أو على مضاد سلسلة طوله $n + 1$. (مساعدة هل يمكنك أن تربط ذلك مبرهنة إيردوس – سيكريس (Erdös- Szekeres) وإثباتها في القسم 1.5؟).

ملاحظات سريعة

ظهرت إثباتات عدة على مبرهنة ديلوورث منذ أن نشرت في العام 1950. المبرهنة 8.3.1 وهي النصف الأسهل تم اكتشافها بعد 21 سنة عن طريق ميرسكي (Mirsky) (1971). يعتبر كتاب أندرسون (Anderson) (2002) من المراجع الجيدة حول المجموعات المرتبة جزئياً المحدودة بشكل عام وحول مبرهنة ديلوورث بشكل خاص.

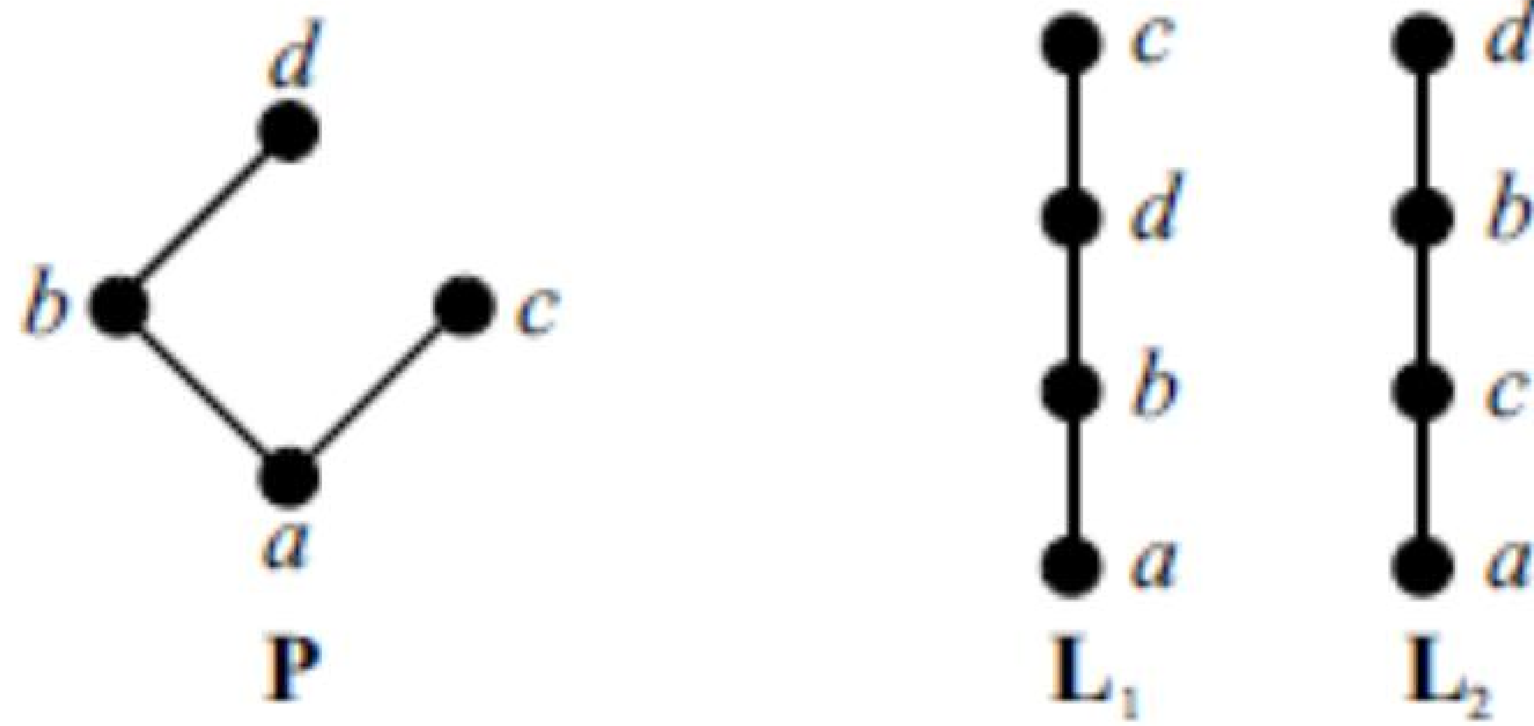
المبرهنتان 8.3.1 و 8.3.2 يعرفان باسم "النتائج الثنائية" (Dual Results). هي منتشرة بشكل واسع في الرياضيات. توجد نظريتان مرتبطتان بشكل كبير مع مبرهنة ديلوورث، الأولى هي مبرهنة الثنائية في البرمجة الخطية والثانية تعظيم السيلان

وتصغير القطع (Min-Cut Max-Flow) في الشبكات. ويمكن استخدام كل منهما لإثبات مبرهنة ديلوورث.

4.8 البعد

في القسم السابق قمنا بتحليل المجموعة المرتبة جزئياً بتمزيقها؛ عن طريق تقسيم المجموعة الأساس إلى قطع بسيطة الهيكلية، أي إلى سلاسل ومضاد السلاسل. في هذا القسم سوف نقوم بدل ذلك، باختبار كيف يمكن بناء مجموعة مرتبة جزئياً من مجموعات مرتبة جزئياً أبسط. سيستخدم الترتيب الكلي ككتل بناء ويقوم تشغيل تقاطع المجموعة بعملية البناء.

كمثال أول، افترض المجموعة المرتبة جزئياً P في الأسفل وكذلك الترتيبات الكلية L_1 و L_2 وجميعها لها المجموعة الأساس نفسها:



تمثل المجموعة المرتبة جزئياً L_1 ما يسمى امتداد P إلى الترتيب الكلي أو باختصار الامتداد الخطي لـ P. ونعني بذلك أنه طالما $y \leq \chi$ في P، تكون $y \leq \chi$ في

L_1. وبالتحديد، الأزواج الانعكاسية $a \leq a,\ b \leq b,\ c \leq c$ و $d \leq d$ وأيضاً الأزواج

$$a < b \qquad a < d \qquad a < c \qquad b < d$$

جميعها في كل من P وL_1. وهذا صحيح أيضاً لـ L_2 لذلك هي أيضاً امتداد خطي لـ P.

نتيجة لذلك من الطبيعي أن نكتب $P \subseteq L_1$ و $P \subseteq L_2$، وأيضاً أن نعتبر أن P هي مجموعة جزئية مرتبة جزئياً لكل من امتداداتها الخطية. وبالطبع صحيح أيضاً أن كل امتداد خطي يحتوي أزواجاً أكثر من P. ونرى أن $b \parallel c$ في P بينما $b < c$ في L_1 و $c < b$ في L_2. أيضاً، نلاحظ أن $d \parallel c$ في P بينما $d < c$ في L_1 و $c < d$ في L_2 .

على كل حال، الأزواج المرتبة المشتركة بين L_1 و L_2 هي نفسها الموجودة في P. ربما رؤية العلاقات على شكل مجموعات يجعل ذلك بديهياً(*).

$$L_1 = \{(a,a)\ ,(a,b),(a,d),(a,c),(b,b),(b,d),(b,c),(d,d),(d,c),(c,c)\}$$

$$L_2 = \{(a,a)\ ,(a,c),(a,b),(a,d),(c,c),(c,b),(c,d),(b,b),(b,d),(d,d)\}$$

$$L_1 \cap L_2 = \{(a,a)\ ,(a,b),(a,c),(a,d),(b,b)(b,d),(c,c),(d,d)\}$$

(*) قد يكون هناك إفراط في الترميز في القول إن مجموعة جزئية تساوي علاقتها لكن يجب أن يكون المعنى هنا واضحاً حيث إن المجموعة الأساس X= (a,b,c,d) مفهومة (المترجمة).

المجموعة $\{L_1,\ L_2\}$ هي المحقق (Realizer) لـ P ، وتمت تسميتها كذلك لأن تقاطع المجموعتين الجزئيتين التابعتين لها تساوي P. يجب أن يكون واضحاً أنه من غير الممكن تحقيق P عن طريق امتداد خطي واحد لأن P ليست ترتيباً كلياً، لذلك يجب أن نقول إن بعد P هو 2 لأن: (1) من الممكن تحقيق P عن طريق امتدادين خطيين، و(2) لا يمكن تحقيقها باستخدام عدد أقل.

السؤال 337: أعد نسخ مخطط هاس لـ P، ومن ثم قم برسم خط يصل بين c و d. جد المحقق للمجموعة المرتبة جزئياً الناتجة.

ينتج عن المفاهيم الثلاثة، الامتداد الخطي والمحقق والبعد العديد من الأسئلة. من أين أتت الامتدادات الخطية L_1 و L_2 ؟ هل يجب أن يكون لكل مجموعة مرتبة جزئياً امتداد خطي؟ هل مفهوم البعد معرف جيداً؟

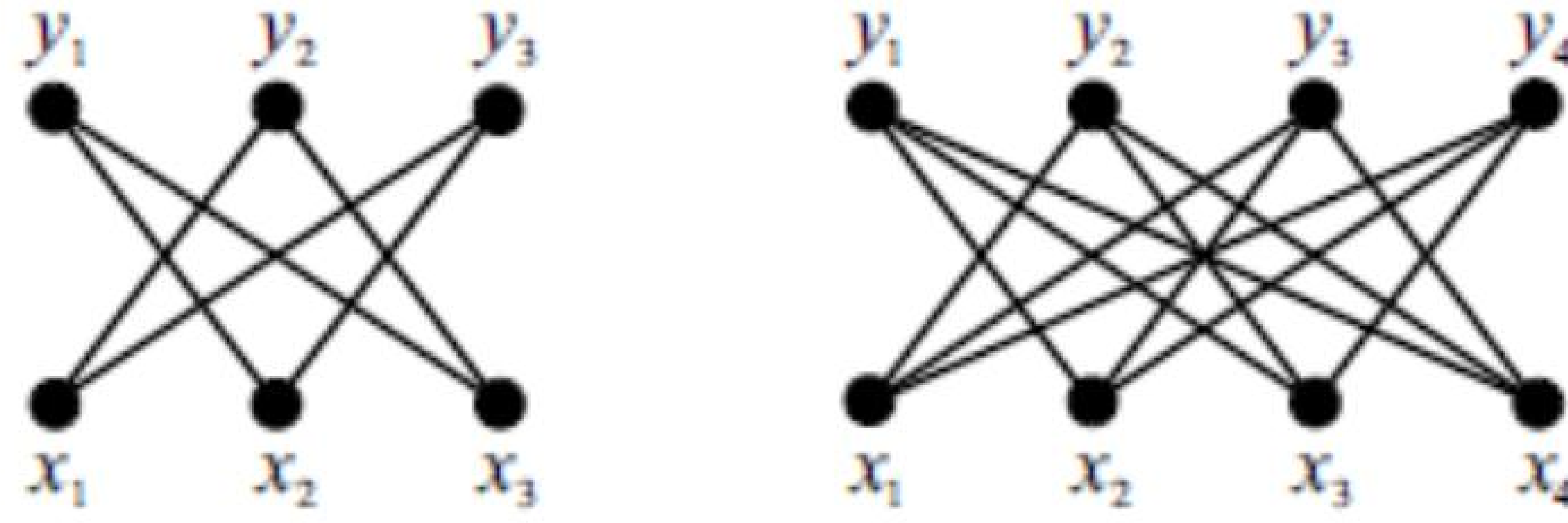
أفضل إجابة ممكن أن نحصل عليها على السؤال الأول هي عن طريق التجربة والخطأ، يحتاج بناء المحققات عادة طرقاً عشوائية وفقاً للمجموعة المرتبة جزئياً. الإجابة على السؤالين الثاني والثالث هي نعم، وسوف نؤجل مناقشتهما حتى آخر هذا القسم.

نوعان جديدان من المجموعات المرتبة جزئياً

قبل أن نعطي تعريفاً رسمياً للبعد، سوف نقدم مجموعتين مرتبتين جزئياً سوف نستخدمهما في هذا القسم.

S_n : المثل المعياري (Standard Example) للمجموعة المرتبة جزئياً ذات عدد الأبعاد n.

يظهر في الشكل في الأسفل مخطط هاس للمثالين المتتاليين المعيارين S_3 و S_4 :



بشكل عام، لكل $n \geq 2$ لتكن

$$X = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n\}$$

$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

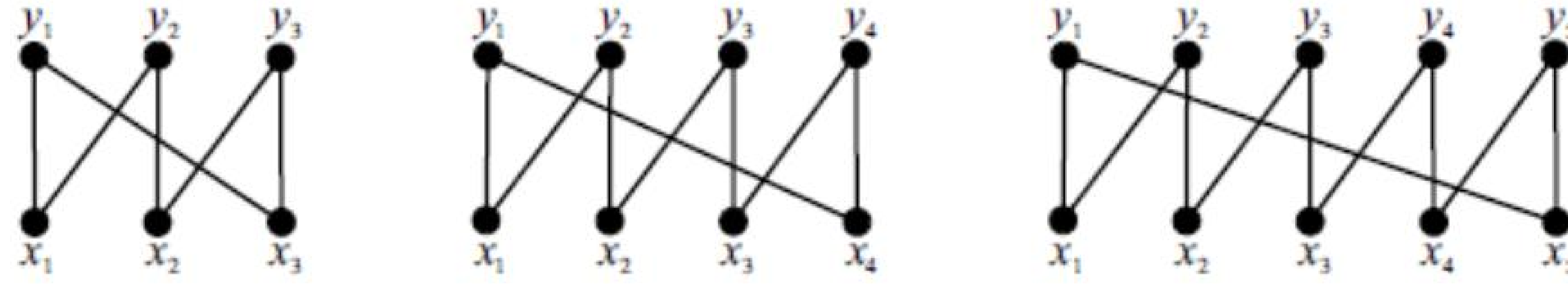
ومن ثم قم بتعريف $S_n := (X \cup Y, \leq)$ بحيث فقط الأزواج المرتبة في العلاقة $\leq$ هي تلك التي على الصيغة $\chi_i \leq y_i$ لجميع قيم $i \neq j$، باستثناء تلك اللازمة لجعلها انعكاسية. ربما من الأسهل أن نرى البناء على شكل مخطط هاس: ضع $\chi_1, \chi_2, \dots . \chi_n$ على خط أفقي، ضع $y_1, y_2, \dots, y_n$ على خط أفقي مباشرة فوق الخط السابق، ومن ثم قم بوصل كل عنصر في الخط الأسفل بكل عنصر في الخط الأعلى باستثناء ذلك العنصر الذي فوقه مباشرة.

السؤال 338: كم عدد الأزواج المرتبة في العلاقة الخاصة بـ S_n ؟

فيما بعد، سوف نقوم بإثبات أن بعد S_n هو n.

C_n : التاج

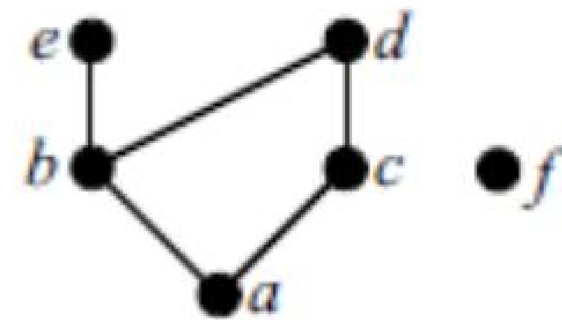
لبناء التاج C_n (Crown) ، استخدم المجموعة نفسها X ∪ Y لمثل معياري للمجموعة المرتبة جزئياً التي تم وصفها للتو، ولكن قم بوصل χ_i فقط مع عنصرين: y_i و $y_i + 1$ (سوف يحدث التفاف عند النهاية لأن العنصر χ_n يتم توصيله مع y_n و y_1). هذه مخططات هاس للتيجان C_3, C_4 و C_5.



الامتداد الخطي، المحقق والبعد

لتكن $P = (X, R)$ مجموعة مرتبة جزئياً. بقولنا امتداداً خطياً لـ P نعني مجموعة مرتبة كلياً على الشكل $L = (X, \acute{R})$ حيث $R \subseteq \acute{R}$. ذلك يعني، الامتداد الخطي لمجموعة مرتبة جزئياً هو: (1) هي نفسها مجموعة مرتبة جزئياً لها المجموعة الأساس نفسها، (2) ترتيب كلي، و(3) حافظة للعلاقة بمعنى أن أي زوج مرتب في المجموعة المرتبة جزئياً الأصلية موجود أيضاً في الامتداد الخطي.

السؤال 339: هل $a \leq f \leq b \leq$
$d \leq e \leq c$



امتداد خطي للمجموعة المرتبة جزئياً المبينة في الشكل؟

هل $d \leq e \leq c \leq b \leq a \leq f$ كذلك أيضاً؟

المحقق لـ P هو مجموعة من الامتدادات الخطية التي ينتج عن تقاطعها P. المحقق- n هو محقق حجمه n. وبعد P هو أقل قيمة لـ n بحيث يكون المحقق- n موجوداً. نكتب $dim(P) = n$ لنشير إلى أن بعد P هو n.

يتطلب أي إثبات أن عدد بعد مجموعة مرتبة جزئياً هو n أمرين: (1) مثل على محقق- n ، (2) إثبات أنه لا يوجد محقق أصغر. سوف نعطي الآن أمثلة عدة على هذه الأنواع.

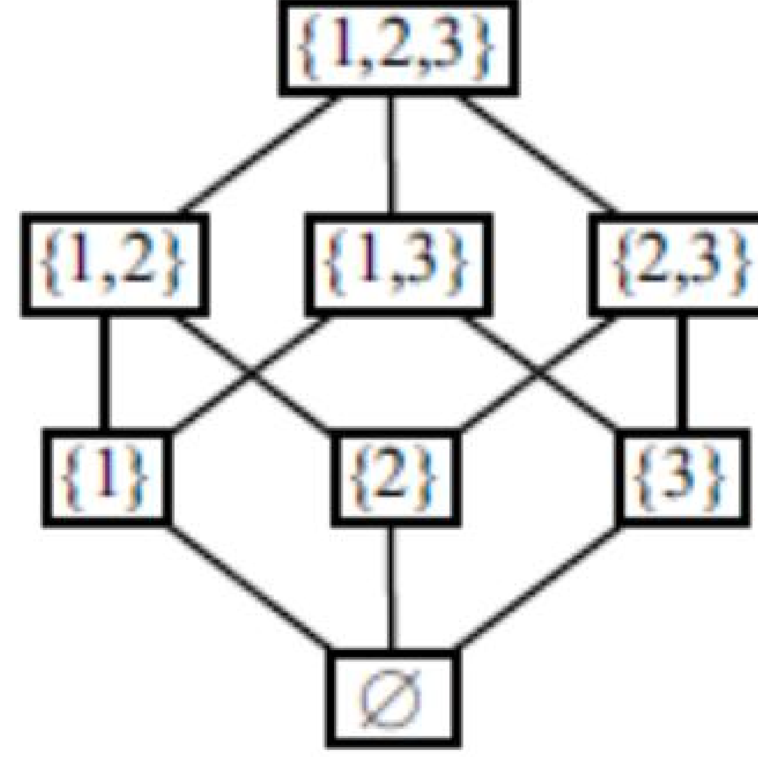
المثل الأول على عدد الأبعاد

يجب أن أن نلاحظ أولاً أن $dim(P) = n$ إذا، وفقط إذا، P هو ترتيب كلي، هذا النوع من المجموعات المرتبة جزئياً هي محقق ذاتها. في الترتيب الكلي، يكون كل زوج من العناصر قابلاً للمقارنة. هل من الممكن للمجموعة المرتبة جزئياً التي يكون كل زوج متميز من العناصر فيها غير قابل للمقارنة (غير مرتب أبداً) أن تمتلك عدداً كبيراً من الأبعاد؟

السؤال 340: جد البعد لمضاد سلسلة طولها 4. ثم اجعل إجابتك أكثر تعميماً لإيجاد بعد مضاد السلسلة طولها n لكل $n \geq 2$.

مثال: شبكة المجموعة الجزئية 2^3

دعنا الآن نختبر شبكة المجموعة الجزئية 2^3:



بالتأكيد $dim(2^3) \geq 2$، لكن هل عدد بعدها هو 2 أم أكثر من ذلك؟

دعنا نبدأ بأن نفرض أنه يوجد محقق-2 (لذلك $dim(2^3) = 2$) ونرى ما يحدث. لتكن

$\mathcal{R} = \{L_1, L_2\}$ محقق-2. إبدأ بملاحظة أن $\{1\} \parallel 2,3$ في 2^3. بما أن تقاطع الامتدادين الخطيين يساوي 2^3، وبما أن $\{1\}$ و$\{2,3\}$ غير قابلين للمقارنة في المجموعة المرتبة جزئياً، عندها يجب أن نضع في أحد الامتدادين الخطيين $\{1\}$ أسفل $\{2,3\}$ والآخر يجب أن نضع فيه $\{2,3\}$ أسفل $\{1\}$.

دعنا نأخذ حالة خاصة، لنفرض أن $\{1\} <_1 \{2,3\}$ و $\{2,3\} <_2 \{1\}$ ، حيث استخدمنا $\leq_1$ للإشارة إلى علاقة L_1 واستخدمنا $\leq_2$ للإشارة إلى علاقة L_2 منعاً للالتباس.

سوف نثبت في البداية أن $\{1\}\ {}_2\!> \{2,3\}$ يجب أن ينتج عنها $\{1,3\}\ {}_2\!> \{2\}$، ذلك لأن

$$\{2\} <_2 \{1,3\} <_2 \{1\} <_2 \{1,3\}$$

(نتجت المتباينتان الأولى والثالثة لأنها صحيحتان في 2^3 وبالتالي صحيحتان في أي امتدادات خطية). بالطريقة نفسها، $\{1,2\}\ {}_2\!> \{3\}$.

السؤال 341: اكتب التفاصيل التي تثبت أن $\{1,2\}\ {}_2\!> \{3\}$.

الآن، لأن $\{1,3\} \,||\, \{2\}$ و $\{1,2\} \,||\, \{3\}$ في 2^3، ينتج عن ذلك $\{2\}\ {}_1\!> \{2,3\}$ و$\{3\}\ {}_1\!> \{1,2\}$. ولكن هذا بدوره ينتج عنه

$$\{1,2\} <_1 \{3\} <_1 \{1,3\} \text{ و } \{1,3\} <_1 \{2\} <_1 \{1,2\}$$

أي، $\{1,2\}\ {}_1\!> \{1,3\}$ و $\{1,3\}\ {}_1\!> \{1,2\}$ وهذا يتعارض مع عدم التماثل للمجموعة المرتبة جزئياً L_1. لذلك، لا يوجد محقق-2 لـ 2^3.

لقد أثبتنا أن $dim(2^3) \geq 3$. حتى نستنتج أن $dim(2^3) = 3$ يجب أن نجد محقق-3. وهذا واحد:

$$L_1:\quad \emptyset < \{1\} < \{2\} < \{1,2\} < \{3\} < \{1,3\} < \{2,3\} < \{1,2,3\}$$

$$L_2:\quad \emptyset < \{1\} < \{3\} < \{1,3\} < \{2\} < \{1,2\} < \{2,3\} < \{1,2,3\}$$

$$L_3:\quad \emptyset < \{2\} < \{3\} < \{2,3\} < \{1\} < \{1,2\} < \{1,3\} < \{1,2,3\}$$

لإثبات أن $\{L_1, L_2, L_3\}$ بالتأكيد يتطلب فحصاً دقيقاً ومملاً للحقيقتين التاليتين:

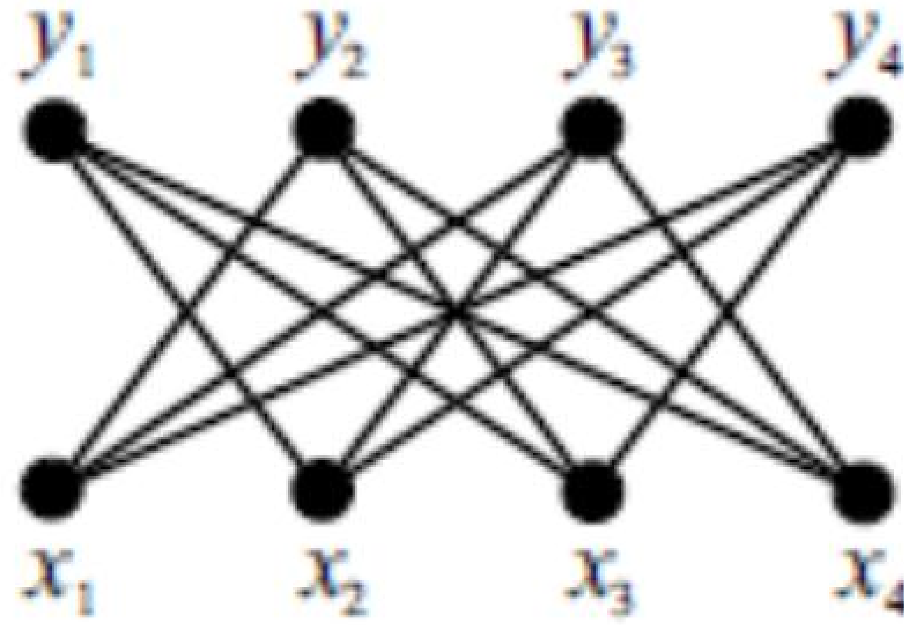
- إذا كانت $A \subset B$ في 2^3، عندها $A \leq B$ موجودة في جميع الامتدادات الخطية الثلاثة.
- إذا كانت $A \parallel B$ في 2^3، عندها يوجد بعض الامتدادات الخطية بحيث $A < B$ وامتدادات خطية أخرى بحيث $B < A$.

السؤال 342: تحقق من أن هذه العبارات صحيحة.

هذا يكمل إظهار أن $dim(2^3) = 3$.

بعد المثل المعياري S_n

تالياً سوف نثبت أن المثل المعياري للمجموعة المرتبة جزئياً التي بعدها n هو بالتأكيد يستحق اسمه، طالما فهمت إثبات الحالة الخاصة (وهي هنا $n = 4$) من السهل القيام بذلك. الشكل في الأسفل يظهر المثل المعياري S_4:



سوف نثبت في البداية أن المحقق يجب أن يحتوي على أربعة امتدادات خطية على الأقل، ومن ثم سوف نعطي محقق-4 معين.

افترض أي محقق لـ S_4. بما أن $\chi_1 \parallel y_1$، نحن نعلم أن أي محقق يجب أن يحتوي على امتداد خطي L_1 له $y_1 < \chi_1$. دعنا ننظر بتمعن في ماذا يجب أن يحدث في هذا الامتداد الخطي، في S_4 لدينا $\chi_2 < y_1$ و $\chi_1 < y_2$، لذلك يجب أن تكون هذه العلاقات موجودة في أي امتداد خطي. ذلك يعني أنه في L_1 لدينا $\chi_2 < y_1 < \chi_1 < y_2$، أي، $\chi_2 < y_2$. وبالطريقة نفسها يمكن أن نظهر أن $\chi_3 < y_3$ و $\chi_4 < y_4$ في L_1 أيضاً.

لقد أثبتنا أن أي امتداد خطي لـ S_4 له $y_1 < \chi_1$ يجب أن يكون له أيضاً $\chi_i < y_i$ لكل $i = 2, 3,4$. بكلمات أخرى، عند وضع $y_1 < \chi_1$ في امتداد خطي لا نستطيع وضع $y_i < \chi_i$ لأي قيمة أخرى من i. والنتيجة نفسها تنطبق على أزواج أخرى وهي: أي امتداد خطي لـ S_4 له $y_j < \chi_j$ يجب أن يكون له أيضاً $\chi_i < y_i$ لجميع قيم i بحيث $i \neq j$.

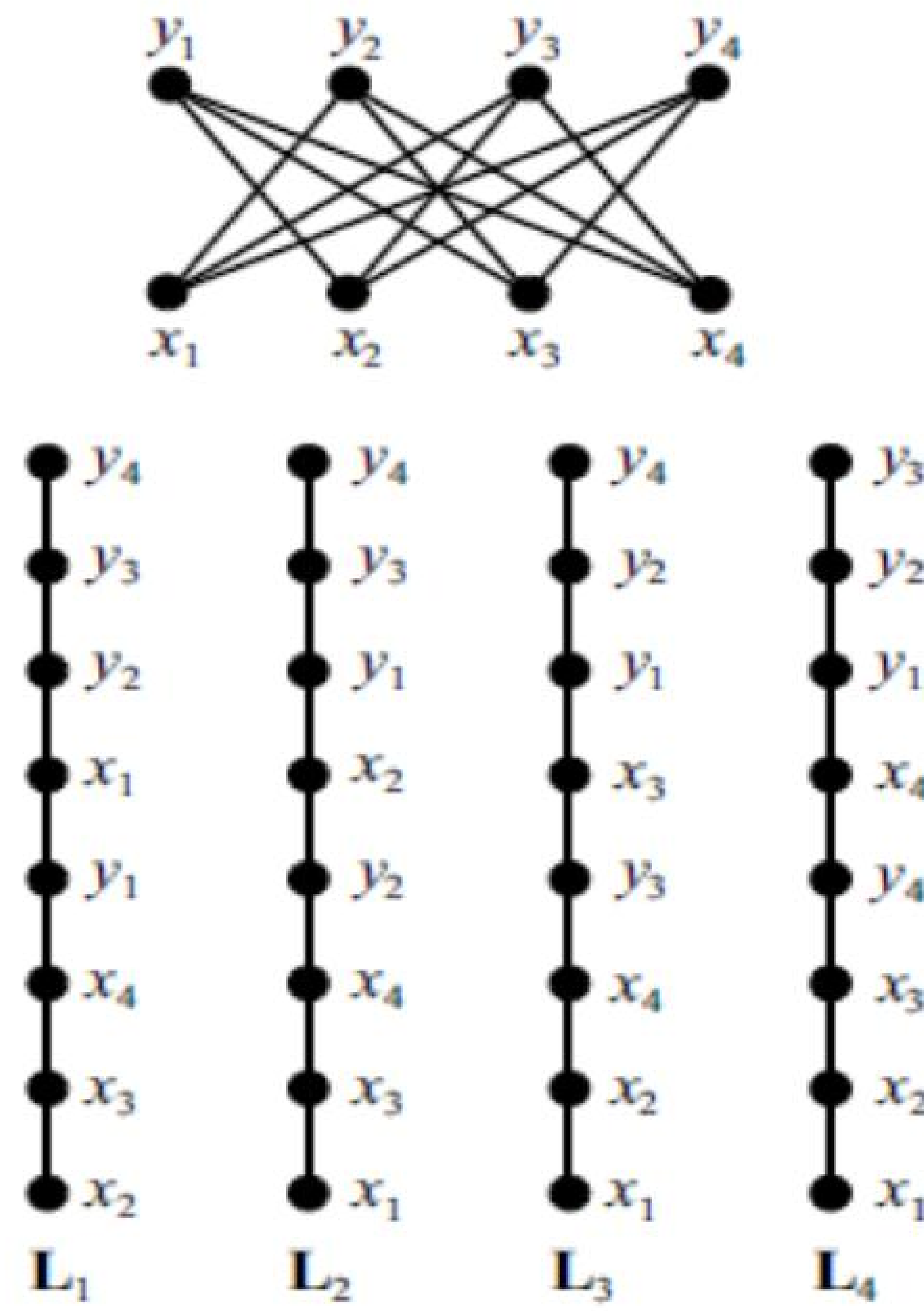
لذلك ، أي محقق لـ S_4 يجب أن يحتوي بالضرورة الامتداد الخطي L_1 الذي له $y_1 < \chi_1$، وامتداداً خطياً مختلفاً L_2 له $y_2 < \chi_2$، وهكذا لـ L_3 و L_4 ، بكلمات أخرى، يحتاج أي محقق على الأقل أربعة امتدادات خطية وبالتالي $dim(S_4) \geq 4$.

والسؤال المتبقي: هل يوجد محقق-4؟ نعم، وهو موجود في الشكل 8.6. تقاطع هذه المحققات الأربعة. هو S_4 للأسباب التالية:

• الأزواج القابلة للمقارنة $\chi_i < y_j$: لاحظ أن $\chi_1 < y_j$ لكل $j = 2, 3,4$ في جميع الامتدادات الخطية الأربعة. بالطريقة نفسها، $\chi_2 < y_j$ لكل $j = 1, 3,4$ و $\chi_3 < y_j$ لكل $j = 1, 2,4$ و $\chi_4 < y_j$ لكل $j = 1, 2, 3$ في جميع الامتدادات الخطية الأربعة.

• الأزواج غير القابلة للمقارنة $\chi_i \parallel y_i$: لاحظ أن $y_1 < \chi_1$ في L_1 بينما $\chi_1 < y_1$ في الامتدادات الخطية الأخرى. بالطريقة نفسها، $y_2 < \chi_2$ في L_2 بينما $\chi_2 < y_2$ في جميع الامتدادات الخطية الأخرى، وهكذا.

• الأزواج غير القابلة للمقارنة $\chi_i \parallel \chi_j$: خذ عنصرين مختلفين χ_i و χ_j وافترض أن $i < j$، الامتداد الخطي L_i له $\chi_i < \chi_j$: بينما جميع الامتدادات الخطية الأخرى $\chi_j < \chi_i$.



الشكل 8.6: المحقق-4 لـ S_4.

• الأزواج غير القابلة للمقارنة $y_i \| y_j$: خذ عنصرين مختلفين y_i و y_j وافترض أن $i < j$. الامتداد الخطي L_j له $y_j < y_i$ بينما جميع الامتدادات الخطية الأخرى لها $y_i < y_j$.

لذلك، $\{L_1, L_2, L_3, L_4\}$ هي محقق-4 لـ S_4 وبالتالي $dim(S_4) \leq 4$. وهذا يكمل إثبات أن $dim(S_4) = 4$.

عملية إثبات أن أي محقق يجب أن يكون حجمه على الأقل 4 وعملية بناء المحقق-4 يمكن تعميمها لـ S_n لأي $n \geq 2$. يطلب منك التمرين 6 تفاصيل ذلك.

المبرهنة 8.4.1 لأي $n \geq 2$، عدد أبعاد المثل المعياري S_n هو n.

بعد التاج C_n

التاج C_3 هو المجموعة المرتبة جزئياً التي لها مخطط هاس الظاهر في قمة الشكل 8.7 . في الأسفل يظهر محقق-3، وعلى الجهة اليمنى يوجد توضيح بأن الامتدادات الخطية الثلاثة هي بالتأكيد محقق. أول ثلاثة صفوف في الجدول تثبت أن الأزواج الستة القابلة للمقارنة التي تظهر في C_3 موجودة أيضاً في كل امتداد خطي. الصفوف التسعة الأخيرة تثبت أنه لكل زوج غير قابل للمقارنة $\chi \| y$ في C_3، يوجد امتداد خطي يحتوي $y < \chi$ وامتداد خطي آخر يحتوي $\chi < y$.

وهذا فقط نصف الحل لأنه يثبت فقط أن $dim(C_3) \leq 3$. سوف نثبت الآن أنه لا يوجد محقق-2. من باب التعارض، افترض أن $\{M_1, M_2\}$ هي محقق لـ C_3. بما

أن $y_3 \parallel \chi_1$ في C_3، سوف نفترض في هذه الحالة أن $\chi_1 <_1 y_3$ في M_1 و $y_3 <_2 \chi_1$ في M_2.

في M_2 لدينا $\chi_3 <_2 y_2$ و $\chi_2 <_2 y_1$ لأن

$$\chi_2 < y_3 <_2 \chi_1 < y_1 \quad و \quad \chi_3 < y_3 <_2 \chi_1 < y_2$$

تثبت هاتان المتباينتان أيضاً أن $y_3 <_2 y_1$ و $y_3 <_2 y_2$ في M_2. وبما أن $y_1 \parallel y_3$ و $y_2 \parallel y_3$ في C_3، ينتج عن ذلك أن هذه الأزواج يجب أن يتم عكسها في أي امتداد خطي آخر:

In C_3	In L_1	In L_2	In L_3
$x_1 < y_1$	yes	yes	yes
$x_1 < y_2$	yes	yes	yes
$x_2 < y_2$	yes	yes	yes
$x_2 < y_3$	yes	yes	yes
$x_3 < y_3$	yes	yes	yes
$x_3 < y_1$	yes	yes	yes
$x_1 \parallel x_2$	$x_1 < x_2$	$x_2 < x_1$	
$x_1 \parallel x_3$	$x_1 < x_3$	$x_3 < x_1$	
$x_2 \parallel x_3$	$x_3 < x_2$	$x_2 < x_3$	
$y_1 \parallel y_2$	$y_1 < y_2$	$y_2 < y_1$	
$y_1 \parallel y_3$	$y_1 < y_3$	$y_3 < y_1$	
$y_2 \parallel y_3$	$y_2 < y_3$	$y_3 < y_2$	
$x_1 \parallel y_3$	$x_1 < y_3$	$y_3 < x_1$	
$x_2 \parallel y_1$	$y_1 < x_2$	$x_2 < y_1$	
$x_3 \parallel y_2$	$x_3 < y_2$		$y_2 < x_3$

الشكل 7.8: محقق-3 للتاج C_3.

$y_3 <_1 y_1$ و $y_3 <_1 y_1$ في M_1 . بالطريقة نفسها، لدينا $x_2 <_1 y_1$ في M_1،
وينتج عن ذلك

$$x_3 < y_1 <_1 x_2 < y_2$$

ذلك يعني أن $y_2 <_1 x_3$ في M_1. وهذا يثبت أن $y_2 <_1 x_3$ و $y_2 <_2 x_3$،
والذي ينتج عنه أن $y_2 < x_3$ في C_3. لكن $y_2 \| x_3$ في C_3، وهذا تعارض. بالتالي لا
يوجد محقق-2 لـ C_3.

المثير في الاهتمام، والمختلف عن الحالة لـ S_n، هو أن بُعد التاج هو دائماً 3.
يمكن توسيع الطريقة التي استخدمناها لـ C_3 للحصول على النتيجة التالية. انظر
التمرين 7 و 8.

المبرهنة 8.4.2 لكل $n \geq 3$، بُعد التاج C_n هو 3.

وجود الامتدادت الخطية

لإنهاء هذا القسم، سنقوم بمناقشة ثلاث نتائج تثبت أن بُعد المجموعة المرتبة
جزئياً معرف جيداً.

الأولى نقول إن أي مجموعة مرتبة جزئياً لها امتداد خطي. وهذه طريقة بنائية
لنثبت ذلك. لتكن x_1 أي عنصر قيمة صغرى للمجموعة المرتبة جزئياً. قم بإلغاء x_1
من المجموعة المرتبة جزئياً، ثم اجعل x_2 العنصر ذا القيمة الصغرى للمجموعة المرتبة

جزئياً الناتجة. قم بإلغاء χ_2 من المجموعة المرتبة جزئياً الجديدة، ثم اجعل χ_3 هي العنصر ذا القيمة الصغرى المرتبة جزئياً الناتجة. استمر في ذلك حتى يتم استخدام جميع عناصر المجموعة المرتبة جزئياً الأصلية، عندها يكون الامتداد الخطي المطلوب هو $\chi_n \leq \cdots \leq \chi_2 \leq \chi_1$. تمرين 5 يسأل عن البرهان الدقيق لذلك.

النتيجة الثانية أقوى من الأولى. هي تؤكد أنه من الممكن إنشاء امتدادات خطية تضع أزواجاً غير مرتبة في مواقع معينة. في عملية إنشاء محقق نعلم أنه إذا كان χ وy غير قابلين للمقارنة، عندها يجب أن نجد امتداداً خطياً بحيث $\chi < y$ وامتداداً خطياً آخر بحيث $y < \chi$ على سبيل المثال، في شبكة المجموعة الجزئية 2^3 من الممكن إيجاد امتداد خطي بحيث $\{1, 3\} < \{2\}$ وامتداد خطي آخر بحيث $\{2\} < \{1, 3\}$.

المبرهنة 8.4.3 إذا كانت $P = (X, \leq)$ هي مجموعة مرتبة جزئياً وكان $\acute{\chi}$ و$\acute{y}$ عنصرين غير قابلين للمقارنة، عندها يوجد امتداد خطي لـ P بحيث $\acute{y} < \acute{\chi}$.

انظر التمرين (9) حول الإطار العام للإثبات.

النتيجة الثالثة هي ناتجة عن المبرهنة السابقة: أي مجموعة مرتبة جزئياً تساوي تقاطع جميع امتداداتها الخطية.

السؤال 343: أعط إثباتاً سريعاً باستخدام المبرهنة السابقة.

بالتالي أي مجموعة مرتبة جزئياً لها محدد، فقط قم باستخدام جميع امتداداتها الخطية. لذلك عدد الأبعاد، ويساوي أصغر محدد، يكون معرفاً جيداً.

الملخص

يوجد امتداد خطي لأي مجموعة مرتبة جزئياً، وهذا الامتداد هو ترتيب كلي ويحتوي جميع العلاقات الموجودة في المجموعة المرتبة جزئياً الأصلية. المحقق هو مجموعة من الامتدادات الخطية التي ينتج عن تقاطعها المجموعة المرتبة جزئياً الأصلية، وبعد المجموعة المرتبة جزئياً هو أصغر محقق.

التمارين

1) افترض المجموعة $X = \{a, b, c, d, e\}$ والمرتبة بالعلاقة التالية:

$$R = \{(a,a), (a,c), (a,d), (a,e), (b,b), (b,c), (b,d), (b,e), (c,c), (c,d), (c,e), (d,d), (e,e)\}$$

كم عدد الامتدادات الخطية المختلفة تمتلك هذه المجموعة المرتبة جزئياً؟

2) افترض $n \geq 3$ وافترض أن X هي مجموعة العنصر 1 والعنصر $(n-1)$ للمجموعات الجزئية $[n]$. جد مجموعة مرتبة جزئياً "معلومة" متماثلة مع $(X, \subseteq)$ وأثبت أن حلك صحيحاً.

3) جد بعد Π_3، مجموعة التقسيمات [3] المرتبة بالتصفية.

4) جد بعد 2^4.

5) أثبت أن أي مجموعة مرتبة جزئياً لها امتداد خطي، قم بذلك عن طريق إثبات أن الخوارزمية التي تمت مناقشتها في نهاية القسم هي صحيحة.

6) قم بتوسيع الطريقة الواردة في هذا القسم لإثبات أن بعد S_n هو n.

7) بين أن الامتدادات الخطية الثلاثة التالية تشكل محققاً لـ C_4:

$$L_1:\ \chi_4 < \chi_3 < y_4 < \chi_2 < y_3 < \chi_1 < y_2 < y_1$$

$$L_2:\ \chi_4 < \chi_1 < y_1 < \chi_2 < y_2 < \chi_3 < y_3 < y_4$$

$$L_3:\ \chi_3 < \chi_2 < \chi_1 < y_3 < y_2 < \chi_4 < y_4 < y_1$$

ومن ثم أكمل إثبات أن $dim(C_4) = 3$ عن طريق إثبات أن لا يوجد محقق-2.

8) أثبت المبرهنة 8.4.2 عن طريق تعميم الطريقة المستخدمة لـ C_3 و C_4.

9) هذه هي الخطوط العريضة لإثبات المبرهنة 8.4.3 .

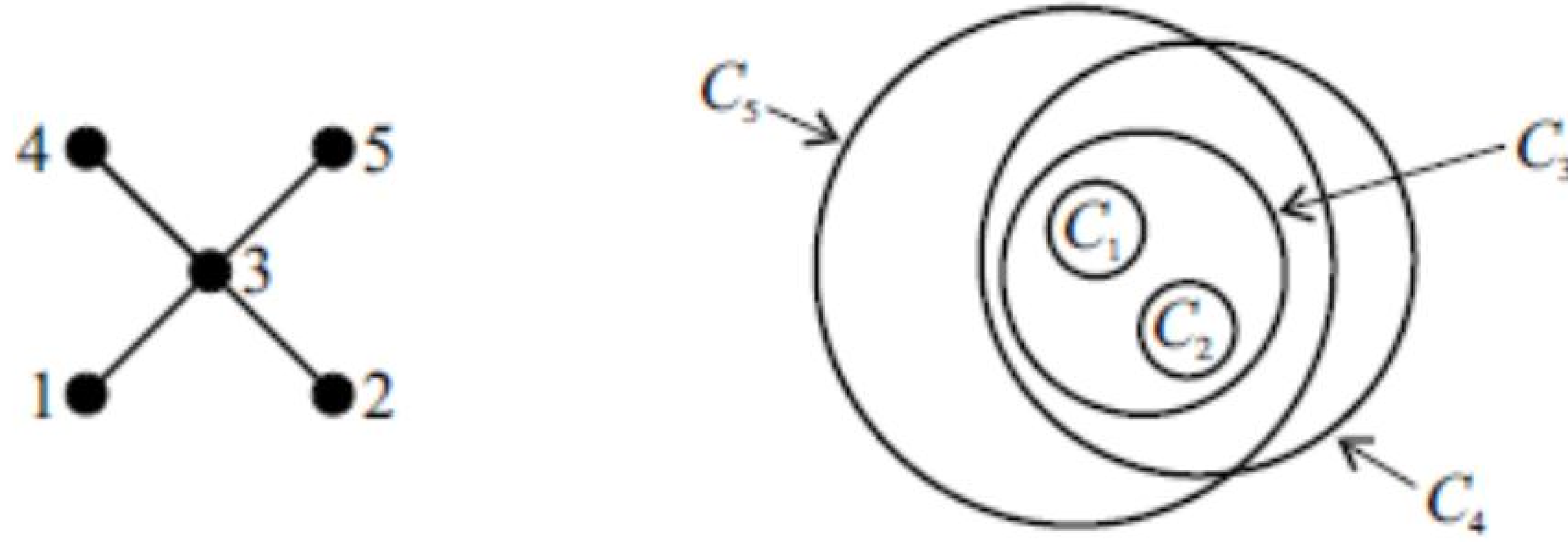
أ) لتكن $P = (X, R)$ مجموعة مرتبة جزئياً، وافترض أن $\acute{\chi} \parallel \acute{y}$. قم بإنشاء علاقة جديدة $\acute{R}$ على X بإضافة الزوج المرتب $(\acute{\chi}, \acute{y})$ إلى R وإضافة أزواج مرتبة أخرى للتأكد من أن $\acute{R}$ يبقى انعكاسياً، غير مماثل، ومتعد. ما هي الأزواج المرتبة التي تعتقد أنه يجب إضافتها؟

ب) أثبت أن $\acute{P} = \left(X, \acute{R}\right)$ هي بالتأكيد مجموعة مرتبة جزئياً، حيث $\acute{R}$ هي العلاقة من (أ).

ج) وضح كيف يمكن إثبات المبرهنة (مساعدة: ماذا لو كانت $\acute{P}$ ترتيب كلي؟ وماذ لو لم تكن؟).

10) أثبت أنه إذا كانت P مجموعة مرتبة جزئياً تحتوي قاعدتها الأساس خمسة عناصر على الأكثر، عندها $dim(P) \leq 2$.

11) الترتيب الدائري هي مجموعة مرتبة جزئياً تحتوي مجموعتها الأساس على أقراص دائرية (دوائر وما بداخلها) في المسطح χy ومرتبة بالتضمين. هذا مثال على مجموعة مرتبة جزئياً يعتبر ترتيب دائرة.



بكلمات أخرى $i \leq j$ في المجموعة المرتبة جزئياً على اليسار إذا وفقط إذا $C_i \subseteq C_j$ صحيحة في مجموعة الدوائر على اليمين.

أثبت: إذا $dim(P) \leq 2$، عندها P يمكن التعبير عنها كترتيب دائرة.

12) ترتيب الصندوق مشابه لفكرة ترتيب الدائرة الموجودة في التمرين السابق، ولكن مع صناديق مستطيلة (المستطيل وما داخله) بدلاً من الأقراص الدائرية.

أ) قم بتمثيل كل من 2^4 و 5 على شكل ترتيب الصندوق.

ب) أثبت إذا $dim(P) \leq 4$، عندها P يمكن تمثيله كترتيب صندوق.

13) هذا التمرين يوضح لماذا "البعد" هو اسم جيد للمفهوم الذي تمت دراسته في هذا القسم. لتكن X أي مجموعة من النقاط في $\mathbb{R}^n$. قم بتعريف الترتيب $\preccurlyeq$ على X عن طريق $\chi \preccurlyeq y$ طالما $\chi_i \leq y_i$ لجميع قيم i. على سبيل المثال، عندما $\chi = (-4,1.5,13)$ و $y = (0,100,13)$ في $\mathbb{R}^3$، يكون لدينا $\chi \preccurlyeq y$ لأن $-4 \leq 0$ و $1.5 \leq 100$ و $13 \leq 13$. ومن ناحية أخرى $(0,0,15) \not\preccurlyeq (-4,1.5,13)$ لأن $1.5 \not\leq 0$.

إذا كانت المجموعة المرتبة جزئياً مضمنة في $\mathbb{R}^n$ ذلك يعني أنها متماثلة مع مجموعة من النقاط في $\mathbb{R}^n$ مرتبة عن طريق العلاقة المبينة سابقاً.

أ) أثبت أن المجموعة المرتبة جزئياً ذات أربعة العناصر الموجودة في بداية القسم مضمنة في $\mathbb{R}^2$. أثبت أن 2^3 مضمنة في $\mathbb{R}^3$.

ب) أثبت أن P مضمنة في $\mathbb{R}^2$ إذا وفقط إذا $dim(P) \leq 2$، وأيضاً P مضمنة في $\mathbb{R}^3$ إذا وفقط إذا $dim(P) \leq 3$.

ج) قم بتعميم ذلك وأثبت أن P مضمنة في $\mathbb{R}^n$ إذا وفقط إذا $dim(P) \leq n$.

بكلمات أخرى، بعد P هو أقل قيمة لـ n بحيث P مضمنة في الفضاء $\mathbb{R}^n$ الذي بعده n.

ملاحظات سريعة

قام كل من دشنك وميللر (1941) (Dushnik & Miller) بتقديم مفهوم البعد، وبالبحث نفسه قاما بتقديم المثال المعياري للمجموعة المرتبة جزئياً التي بعدها n. المرجع (Trotter, 1992) هو المرجع الأساسي لنظرية الأبعاد للمجموعات المرتبة جزئياً المحدودة.

ترتيبات الدائرة والصندوق هي أمثلة على ما يسمى ترتيبات الاحتواء الهندسي. يوجد بعض الأسئلة المحيرة التي لم يتم الإجابة عليها تتعلق بهذه المجموعات المرتبة جزئياً، يبين التمرين 11 أن المجموعات المرتبة جزئياً التي لها بعدان هي عبارة عن ترتيبات دائرة؛ ماذا بالنسبة إلى المجموعات المرتبة جزئياً ذات ثلاثة الأبعاد؟ إذا سمحنا بوجود المجموعات المرتبة جزئياً اللامتناهية، عندها يكون الجواب هو لا، لأنه يوجد مثال لمجموعة مرتبة جزئياً لها ثلاثة أبعاد ولا تمثل ترتيب دائرة. ولكن في حالة المجموعات المرتبة جزئياً المحدودة ليس من المعروف فيما إذا كانت كل مجموعة مرتبة جزئياً لها ثلاثة أبعاد هي ترتيب دائرة. بالإضافة إلى ذلك يوجد نتيجة مؤلمة جداً: كل مجموعة مرتبة جزئياً لها ثلاثة أبعاد هي ترتيب هندسي عدد أضلاعه n لجميع قيم $n \geq 3$. المضلع الذي له 100 مليار ضلع يمكن اعتباره دائرة، هل يمكن اعتباره دائرة فعلاً؟!

5.8 تحويل موبيوس العكسي الجزء (1)

في آخر قسمين في هذا الكتاب سوف ندرس نظرية موبيوس (Möbius Theory) والتطبيقات عليها من أجل توحيد بعض العناوين التي تبدو مختلفة، وأيضاً من أجل تهيئة القارىء لدراسة أوسع حول موضوع التوافق. في هذا القسم سوف نستخدم مثال التضمين والحذف لاستيعاب مفاهيم دالة زيتا، ودالة موبيوس، وصيغة تحويل موبيوس العكسي.

سيعتمد الشرح على البحث الذي قدمه كل من روتا وبِندر (1964) (Bender) وغولدمن (1975) (Goldman). ورقة روتا هي نقطة ارتكاز في موضوع التوافق، والورقة الثانية هي ملخص جيد لتطبيقات توافقية عدة على تحويل موبيوس. يفترض هذا القسم أن القارىء لديه خلفية جيدة عن ضرب المصفوفات، عكس المصفوفات، ومحدداتها. في الحقيقة يمكن فهم مبدأ تحويل موبيوس العكسي من دون استخدام المصفوفات ولكن استخدامها يعطي توضيحاً أفضل.

دراسة التضمين والإقصاء مرة أخرى

يتعلق أول مثال في القسم 31. بعدّ الأعداد الصحيحة في [100] التي لا تقبل القسمة على أي من 2، 3، 5. قمنا بتعريف الكون $\mathcal{U}$ ليكون المجموعة [100] ، ومن ثم قمنا بتعريف الخاصية d_i لتكون "العدد الصحيح قابلاً للقسمة على i " لكل من $i = 2,3,5$. جواب هذه المسألة هو $N = (\emptyset)$، والذي هو عدد الأعداد الصحيحة

في $\mathcal{U}$ والتي لا تمتلك أياً من الخصائص الثلاث. صيغة التضمين والإقصاء المبرهنة (النظرية 3.1.2) تقول:

(81.)

$$N = (\emptyset) = N_{\geq}(\emptyset) - N_{\geq}(d_2) - N_{\geq}(d_3) - N_{\geq}(d_5) + N_{\geq}(d_2 d_3) + N_{\geq}(d_2 d_5) + N_{\geq}(d_3 d_5) + N_{\geq}(d_2 d_3 d_5)$$

تذكر أن التعبير، على سبيل المثال، $N_{\geq}(d_2 d_3)$ يشير إلى عدد الأعداد الصحيحة في [100] التي لها الخصائص d_2 و d_3 – عدد الأعداد الصحيحة في [100] القابلة للقسمة على 2، 3، وممكن أيضاً على 5. هذه الصيغة الخاصة بـ $N = (\emptyset)$ كانت مفيدة لأننا استطعنا حساب جميع قيم $N_{\geq}$ بسهولة.

لعدّ الأعداد الصحيحة في [100] القابلة للقسمة على 2 وليست قابلة للقسمة على 3 ولا 5 يمكن تطبيق الصيغة العامة للتضمين والإقصاء (المبرهنة 3.1.5) للحصول على

(82.)

$$N_{=}(d_2) = N_{\geq}(d_2) - N_{\geq}(d_2 d_3) - N_{\geq}(d_2 d_5) + N \geq (d_2 d_3 d_5)$$

الأنظمة الخطية

يمكن اشتقاق صيغتي المعادلتين (8.1) و (8.2) عن طريق حل نظام خطي. اعتبر أن قيم $N_{\geq}$ هي القيم "المعلومة" والقيم $N_{=}$ بأنها القيم "المجهولة". المعادلة التالية تربط بين القيم المعلومة $N_{\geq}(d_2)$ مع بعض القيم المجهولة.

(83.)

$$N_{\geq}(d_2) = N_{=}(d_2) + N_{=}(d_2 d_3) + N_{=}(d_2 d_5) + N_{=}(d_2 d_3 d_5)$$

وبالتالي، في عملية عدّ الأعداد الصحيحة في [100] القابلة للقسمة على 2 (ويمكن أن تكون قابلة للقسمة على 3 وعلى 5)، يمكن تجزئة التحليل إلى أربع حالات غير مترابطة: تلك القابلة للقسمة على 2 فقط، وتلك القابلة للقسمة على 2 و 3 فقط، وتلك القابلة للقسمة على 2 و 5 فقط، وتلك القابلة للقسمة على 2، و 3 و 5. بالطريقة نفسها، نحصل على

(84.)

$$N_{\geq}(d_2 d_5) = N_{=}(d_2 d_5) + N_{=}(d_2 d_3 d_5).$$

هاتان معادلتان فقط من ثمان معادلات يمكن كتابتها، واحدة لكل مجموعة جزئية ممكنة للخصائص الثلاث. في المصفوفات يظهر النظام الخطي كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{=}(\emptyset) \\ N_{=}(d_2) \\ N_{=}(d_3) \\ N_{=}(d_5) \\ N_{=}(d_2 d_3) \\ N_{=}(d_2 d_5) \\ N_{=}(d_3 d_5) \\ N_{=}(d_2 d_3 d_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{\geq}(\emptyset) \\ N_{\geq}(d_2) \\ N_{\geq}(d_3) \\ N_{\geq}(d_5) \\ N_{\geq}(d_2 d_3) \\ N_{\geq}(d_2 d_5) \\ N_{\geq}(d_3 d_5) \\ N_{\geq}(d_2 d_3 d_5) \end{pmatrix}.$$

لاحظ أن المعادلات (8.3) و (8.4) تظهر في الصف الثاني والسادس، بالترتيب.

السؤال 344: يوجد في الصف الأخير $N_{\geq}(d_2d_3d_5)$ $N_{=}(d_2d_3d_5)$. لماذا هذه؟ صحيح؟

يمكن اختصار معادلة المصفوفة هذه بـ $N_{\geq}\ =\ ZN_{=}$ حيث Z هي المصفوفة 8×8 على اليسار نحتاج إلى حل المصفوفة العمودية $N_{=}$.

للنظام الخطي حل وحيد لأن المصفوفة Z يمكن عكسها: كون جميع القيم أسفل القطر الرئيسي تساوي 0، فإن محددها يساوي حاصل ضرب قيم قطرها، التي تساوي 1، وكون المحدد غير صفري يعني أنه يمكن عكسه. الحل هو $N_{=}\ =$ $Z^{-1}\ N_{\geq}$، أو

$$
\begin{pmatrix} N_{=}(\emptyset) \\ N_{=}(d_2) \\ N_{=}(d_3) \\ N_{=}(d_5) \\ N_{=}(d_2d_3) \\ N_{=}(d_2d_5) \\ N_{=}(d_3d_5) \\ N_{=}(d_2d_3d_5) \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} N_{\geq}(\emptyset) \\ N_{\geq}(d_2) \\ N_{\geq}(d_3) \\ N_{\geq}(d_5) \\ N_{\geq}(d_2d_3) \\ N_{\geq}(d_2d_5) \\ N_{\geq}(d_3d_5) \\ N_{\geq}(d_2d_3d_5) \end{pmatrix}.
$$

ربما من الأفضل استخدام الحاسوب لحساب Z^{-1}.

لاحظ أن جميع صيغ التضمين والإقصاء الناتجة عن المبرهنة 3.1.2 والمبرهنة 3.1.5 حالياً موجودة. المعادلة (8.1) هي الصف الأول في هذه المصفوفة، والمعادلة (8.2) هي الصف الثاني... إلخ.

الملاحظة الأخيرة والمهمة من هذا المثال هي أن المصفوفة Z هي ناتجة عن مجموعة مرتبة جزئياً. وبالتحديد، هي ناتجة عن المجموعات المرتبة جزئياً $\{d_2, d_3, d_5\}$ والمرتبة بالتضمين. إذا قمنا بفهرسة الصفوف والأعمدة للمصفوفة Z وفقاً للامتداد الخطي

$$\emptyset < \{d_2\} < \{d_3\} < \{d_5\} < \{d_2, d_3\} < \{d_2, d_5\} < \{d_3, d_5\} < \{d_2, d_3, d_5\}.$$

للمجموعة المرتبة جزئياً، عندها Z_{ij} تساوي 1 عندما تكون مجموعة الصف i هي مجموعة جزئية من المجموعة العمود j الجزئية وتكون Z_{ij} تساوي 0 بخلاف ذلك.

$$\begin{array}{l} \\ \emptyset \\ d_2 \\ d_3 \\ d_5 \\ d_2d_3 \\ d_2d_5 \\ d_3d_5 \\ d_2d_3d_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \emptyset & d_2 & d_3 & d_5 & d_2d_3 & d_2d_5 & d_3d_5 & d_2d_3d_5 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right) \end{array} = Z.$$

(نكتب d_3d_5، على سبيل المثال، بدلاً من $\{d_3, d_5\}$ من أجل الاختصار)

مصفوفة زيتا ومصفوفة موبيوس

تسمى المصفوفة موبيوس في الأعلى بمصفوفة زيتا (Zeta Matrix). إذا كان لدينا المجموعة المرتبة جزئياً $P = (X, \leq)$ والتي عدد عناصرها n ، ولنقل إننا قمنا بتعليم عناصر X بترتيب معين مثل $\chi_1, \chi_2 \dots, \chi_n$. عندها مصفوفة زيتا لـ P هي المصفوفة $n \times n$ والتي رمزها Z حيث

$$Z_{ij} = \begin{cases} 1 & \chi_i \leq \chi_j \\ 0 & otherwise \end{cases}.$$

إذا قمت بترتيب عناصر X وفقاً للامتداد الخطي لـ P ، كما فعلنا في مثال التضمين والإقصاء السابق، عندها بالتأكيد Z هي مصفوفة صفرية القيم للعناصر أسفل قطرها وقيم القطر تساوي 1. (انظر التمرين7). مصفوفة موبيوس لـ P يمكن تعريفها عندها بـ Z^{-1}، "معكوس المصفوفة Z".

السؤال 345: جد مصفوفة زيتا لشبكة قابلية القسمة D_{18}. علّم الصفوف والأعمدة على الترتيب 1, 2, 3, 5, 6, 9,18. ثم جد مصفوفة موبيوس.

فكرة تحويل موبيوس العكسي

دعنا نلخص ما تعلمناه من مثال التضمين والإقصاء. أردنا أن نجيب على سؤال يتعلق بالعدّ وحصلنا على معادلتين $N_{\geq}$ و $N_{=}$ لمساعدتنا في ذلك. هاتان الدالتان مرتبطتان عن طريق المعادلتين.

(8.5)

$N_{\geq}(J) = \sum_{I:J\subseteq I} N_{=}(I)$ حيث J تحقق الشرط $J \subseteq \{d_2, d_3, d_5\}$.

يمكن فهم المجموع بأنه على جميع المجموعات I التي تحتوي J كمجموعة جزئية. هذه المعادلات متعلقة بالنظام $N_{\geq} = ZN_{=}$ الموضح سابقاً.

هذا يخبرنا كيف نعبر عن $N_{\geq}$ باستخدام المتغير $N_{=}$، لكن الدالة $N_{=}$، تحتوي الجواب على مسألتنا المتعلقة بالعدّ. قمنا بعكس المعادلة (8.5) للحصول على $N_{=}$ بدلالة $N_{\geq}$. الجواب هو تماماً المبرهنة 3.1.5 وهي:

$$N_{\geq}(J) = \sum_{I:J\subseteq I} (-1)^{|I|-|J|} N_{\geq}(I)$$ حيث J تحقق الشرط $J \subseteq \{d_2, d_3, d_5\}$

بكلمات أخرى، هذه المعادلات هي نفسها تماماً التي تم التعبير عنها عن طريق $N_{=} = Z^{-1} N_{\geq}$.

عند بداية دراستنا للتضمين والإقصاء، كانت دوال العدّ $N_{=}$ و $N_{\geq}$ اهتمامنا الرئيسي. ونرى الآن أنه توجد مجموعة مرتبة جزئياً مخبأة في التعريفات $N_{=}$ و $N_{\geq}$ ، وهي، المجموعات الجزئية لـ $\{d_2, d_3, d_5\}$ والمرتبة بالتضمين. بكلمات أخرى، المجموع الذي يظهر في المعادلة (8.5) هو لجميع العناصر I في تلك المجموعة المرتبة

جزئياً والتي تكون "فوق" المجموعة J. في تحويل موبيوس العكسي قمنا بإظهار المجموعة المرتبة جزئياً المختبئة من الأمام ومن الوسط.

عند هذه المرحلة سوف نتوقف عن الحديث عن مصفوفة زيتا، وبدلاً من ذلك سوف نعمل على دالة زيتا. يوجد عدة فوائد لذلك الأول، التقنية الصعبة للجبر الخطي غير موجودة (كيفية فهرسة الصفوف والأعمدة وتشكيل المصفوفة الصفرية أسفل القطر واختزال الصفوف والمحددات) وهذا يجعل من النظرية أكثر وضوحاً. والثاني، يمكن الحصول على النتائج بسهولة للمجموعات المرتبة جزئياً اللامتناهية.

دالة زيتا لمجموعة مرتبة جزئياً

إذا أعطيت مجموعة مرتبة جزئياً $P = (\mathrm{X}, \leq)$، تكون دالة زيتا لـ P هي الدالة $\xi: \chi \times \chi \rightarrow \mathbb{R}$ والتي تعرّف بـ

$$\xi\ (\chi, y) = \begin{cases} 1 & x \leq y \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

وهي الدالة التي تقوم باستبدال مصفوفة زيتا Z وينطبق على أي مجموعة جزئية محدودة أو لامتناهية. في مثال التضمين والإقصاء الذي نستخدمه، لاحظ أن المعادلة

$$N_{\geq}(J) = \sum_{I: J \subseteq I} N_{=}(I)$$

يمكن كتابتها أيضاً على الشكل

$$N_{\geq}(J) = \sum_{I=\emptyset}^{\{d_2,d_3,d_5\}} \xi:(J,I)\ N_{=}(I)$$

حيث اعتبرنا المجموع على جميع المجموعات الجزئية الممكنة لـ $\{d_2, d_3, d_5\}$. ذلك لأن ξ هي دالة زيتا للمجموعات الجزئية لـ $\{d_2, d_3, d_5\}$ والمرتبة بالتضمين، والتي تحقق $\xi\ (J,I) = 1$ عندما $J \subseteq I$ وتحقق $\xi\ (J,I) = 0$ بخلاف ذلك.

جبر الحدث لمجموعة مرتبة جزئياً

نريد أن نجد معكوس ξ ، وهذا هو هدف دالة موبيوس، لذلك يجب أن نفهم ما هو المعكوس المتعلق بهذا الموضوع. وإذا فكرنا بالمعكوس بطريقة أبسط فهو فقط تعميم لمعكوس المصفوفة.

لتكن $P = (\mathrm{X}, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً. بداية، سوف نحدد عملنا بالدوال $\propto: \mathrm{X} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ والتي تحقق $\propto (\chi, y) = 0$ طالما $\chi \nleq y$. بالإضافة إلى عمليات الجمع والضرب العادي وضرب الدوال، التي سوف نعرفها لاحقاً، هذه المجموعة من الدوال تشكل ما يسمى جبر الحدث لـP.

للدالتين $\propto$ وβ، يكون مجموعهما $\propto + \beta$ معرّفاً كالعادة:

$(\propto + \beta)(\chi, y) = \propto (\chi, y) + \beta(\chi, y)$ وهذه طريقة تعريف جمع المصفوفات نفسها. إذا كانت $c \in \mathbb{R}$ ، عندها يكون الضرب العادي $c \propto$ لا يكون غريباً أيضاً: $(c \propto)(\chi, y) = c. \propto (\chi, y)$.

عملية ضرب الدوال هي العملية الأكثر أهمية لأن دالة موبيوس هي المعكوس الضربي لدالة زيتا. يعرّف حاصل الضرب $\propto \beta$ للدالتين $\propto$ و β كما يلي:

(8.6)

$$(\propto \beta)(\chi, y) = \sum_{z:\chi\leq z\leq y} \propto (\chi, z)\beta(z, y)$$

نلاحظ أن هذا مشابه لضرب المصفوفات في حالة المجموعات المرتبة جزئياً المحدودة. لمصفوفتين A و B أبعادهما $n \times n$ ، يعرّف حاصل ضربهما المتجهي بـ

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

للمجموعات المرتبة جزئياً المحدودة يكون هذا في الحقيقة نفس صيغة المعادلة (8.6)، خاصة عندما ندرك أن المجموع في تلك المعادلة يمكن أخذه على جميع قيم $z \in \mathrm{X}$. ذلك لأن $\propto (\chi, z) = 0$ طالما $\chi \nleq z$ ، و $\beta(z, y) = 0$ طالما $z \nleq y$.

المجموعات المرتبة جزئياً المحدودة محلياً

تكون المجموعة المرتبة جزئياً $P = (\mathrm{X}, \leq)$ المحدودة محلياً، إذا كان لجميع قيم $\chi, y \in \mathrm{X}$ ، تكون المجموعة

$$[\chi, y] = \{z \in \mathrm{X}: \chi \leq z \leq \mathrm{y}\}$$

محدودة. تسمى المجموعة $[\chi, y]$ بشكل طبيعي المسافة من χ إلى y. على سبيل المثال، المجموعة المرتبة جزئياً D_{18} لها

$$[3,18] = \{3,6,9,18\}$$

$$[3,9] = \{3,9\}$$

$$[6,18] = \{6,18\}$$

$$[2,2] = \{2\}$$

وبالطبع، المجموعات المرتبة جزئياً المحدودة هي محدودة محلياً، لكن العديد من المجموعات المرتبة جزئياً غير المتناهية، وهي محدودة محلياً أيضاً، مثل الأعداد الصحيحة الموجبة والمرتبة وفق قابلية القسمة والمجموعات الجزئية للأعداد الصحيحة الموجبة المرتبة بالتضمين.

عملية توسيع مدى المجموعات المرتبة جزئياً المحدودة إلى محدودة محلياً هي عملية مهمة تتطلب اهتماماً وجهداً إضافياً. افتراضنا أن المجموعة المحدودة محلياً يضمن أن المجاميع التي نتعامل معها كما في المعادلة (8.6) تكون محددة وبالتالي متلاقية.

السؤال 346: أعط مثالاً على مجموعة مرتبة جزئياً ليست محدودة محلياً.

دالة موبيوس لمجموعة مرتبة جزئياً

معكوس المصفوفة زيتا Z هي في الأصل المصفوفة M بحيث $MZ = I$، وهي المصفوفة التعريف (Identity Matrix). لإيجاد معكوس دالة زيتا ζ نبحث عن دالة μ

بحيث $\mu\xi$ هي الدالة التعريفية. في هذه الحالة يكون الدالة التعريفية لجبر الحدث يعرف باسم كرونيكر دلتا (Kronecker Delta)، هي الدالة: $\delta: \mathrm{X} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ الذي يعطى كما يلي

$$\delta: (\chi, y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

قارنها بمصفوفة التعريف I.

السؤال 347: افترض أن دالة زيتا لمجموعة مرتبة جزئياً تساوي δ المبينة في الأعلى. كيف تبدو المجموعة المرتبة جزئياً؟

سنقوم الآن بتعريف دالة موبيوس ومن ثم نثبت أنها دالة عكسية لدالة زيتا.

التعريف 8.5.1 إذا أعطيت المجموعة المرتبة جزئياً والمحدودة محلياً= P $(\mathrm{X}, \leq)$، تكون دالة موبيوس لـ P هي الدالة $\mu: \mathrm{X} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ والمعرّفة بالخطوات الاستقرائية التالية:

1) لتكن $\mu\ (\chi, y) := 0$ لجميع قيم $\chi, y \in \mathrm{X}$ بحيث $\chi \nleq y$.

2) لتكن $\mu\ (\chi, \chi) := 1$ لجميع قيم $\chi \in \mathrm{X}$.

3) على فرض أن $\chi < y$ وأن $\mu\ (\chi, z)$ تم تعريفها بالفعل لجميع قيم z التي تحقق $\chi \leq z < y$ ، قم بتعريف

$$\mu\ (\chi, y) := -\sum_{z:\chi \le z < y} \mu\ (\chi, z)$$

دالة موبيوس هي في جبر الحدث الناتج عن 1 #، والمجموع في 3 #، معرّف جيداً لأن المجموعة المرتبة جزئياً هي محدودة محلياً.

المبرهنة 8.5.2: إذا كانت $P = (\mathrm{X}, \le)$ هي مجموعة مرتبة جزئياً محدودة محلياً ولها الدالة زيتا ξ، عندها تكون دالة موبيوس μ هو معكوس ξ. أي، $\mu\ \xi = \delta$ حيث δ هي دالة كرونيكر دلتا.

البرهان: افترض أن $P = (\mathrm{X}, \le)$ هي مجموعة مرتبة جزئياً المحدودة محلياً لها دالة زيتا ξ. لتكن $\chi, y \in \mathrm{X}$. هدفنا هو أن نثبت أن $(\mu\xi)(\chi, y) = \delta(\chi, y)$. عن طريق المعادلة (8.6)،

$$(\mu\ \xi)(\chi, y) = \sum_{z:\chi \le z \le y} \mu\ (\chi, z)\xi(z, y)$$

الحالة (1): إذا كانت $\chi \nleq y$ عندها يكون المجموع فارغاً وبالتالي $(\mu\ \xi)(\chi, y) = 0$. بالإضافة إلى ذلك $\delta(\chi, y) = 0$ لأن كون $\chi \nleq y$ يتضمن $\chi \neq y$. لذلك

$(\mu\ \xi)(\chi, y) = \delta(\chi, y)$.

الحالة (2): إذا كانت $\chi = y$, عندها

$$(\mu\xi)(\chi,\chi) = \sum_{z:\chi\leq z\leq\chi} \mu(\chi,z)\xi(z,\chi) = \mu(\chi,\chi)\xi(\chi,\chi) = 1.1 = 1$$

وأيضاً $\delta(\chi,\chi) = 1$ وبالتالي $(\mu\xi)\ (\chi,\chi) = \delta(\chi,\chi)$.

الحالة (3): أخيراً، إذا كانت $\chi < y$ يكون لدينا

$$(\mu\xi)(\chi,y) = \sum_{z:\chi\leq z\leq y} \mu(\chi,z)\xi(z,y)$$

$$= \sum_{z:\chi\leq z\leq y} \mu(\chi,z)$$

$$= \left(\sum_{z:\chi\leq z<y} \mu(\chi,z)\right) + \mu(\chi,y)$$

$$= -\mu\ (\chi,y) + \mu(\chi,y)$$

$$= 0$$

المعادلات من الثانية إلى الأخيرة ناتجة عن 3 # في التعريف 8.5.1. وأيضاً، $\delta(\chi,y) = 0$ لأن $\chi < y$ يتضمن $\chi \neq y$. وبالتالي $(\mu\xi)\ (\chi,y) = \delta(\chi,y)$.

■

مثال: حساب دالة موبيوس

ما هي دالة موبيوس للترتيب الكلي 5؟

في البداية نكتب دالة زيتا لأي قيم $i,j \in [5]$ لدينا $\zeta(i,j) = 1$ عندما $i \leq j$ ، ولدينا $\zeta(i,j) = 0$ بخلاف ذلك. باستخدام الخطوة 2 # من التعريف 8.5.1، نضع:

$$\mu(1,1) = 1 \qquad \mu(2,2) = 1 \;\; \ldots \;\; \mu(5,5) = 1$$

في الخطوة التالية، استخدم الخطوة 3 # للحصول على

$$\mu(1,2) = -\mu(1,1) = -1$$
$$\mu(1,3) = -\mu(1,1) - \mu(1,2) = -1 - (-1) = 0$$
$$\mu(1,4) = -\mu(1,1) - \mu(1,2) - \mu(1,3) = -1 - (-1) - 0 = 0$$
$$\mu(1,5) = -\mu(1,1) - \mu(1,2) - \mu(1,3) - \mu(1,4) = -1 - (-1) - 0 - 0 = 0$$

ومن ثم جد

$$\mu(2,3) = -\mu(2,2) = -1$$
$$\mu(2,4) = -\mu(2,2) - \mu(2,3) = -1 - (-1) = 0$$
$$\mu(2,5) = -\mu(2,2) - \mu(2,3) - \mu(2,4) = -1 - (-1) - 0 = 0$$

عند الاستمرار في ذلك سوف نجد أن $\mu(i,i) = 1$ لجميع قيم i ، $\mu(i,i+1) = -1$ لقيم $i = 1,2,3,4$، و $\mu(i,j) = 0$ خلاف ذلك.

دالة موبيوس للترتيب الكلي

يمكن تعميم المثال السابق بسهولة لترتيب كلي بأي حجم (التمرين 8). سوف تلعب النتيجة دوراً مهماً في القسم 8.6.

المبرهنة 8.5.3: تعطى دالة موبيوس للترتيب الكلي n كما يلي:

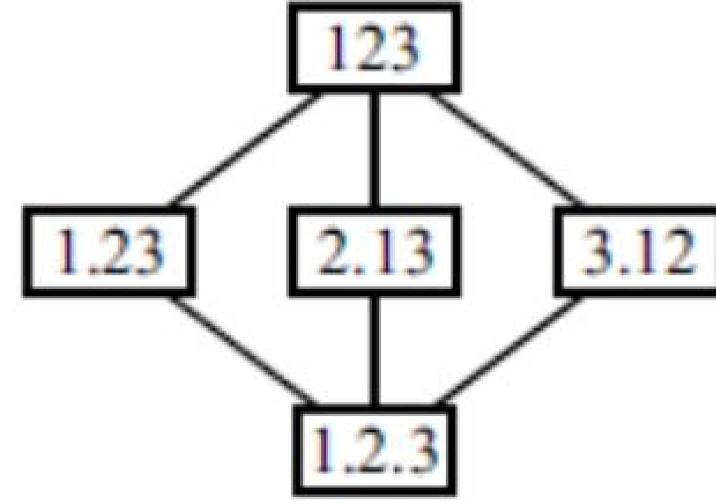
$$\mu(i,j)=\begin{cases}1 & i=j\\ -1 & i+1=j\\ 0 & \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

السؤال 848: لتكن μ دالة موبيوس للمجموعة المرتبة جزئياً D_{16}. جد

$\mu\left(2{,}8\right)$ و $\mu\left(4{,}8\right)$.

مثال: دالة موبيوس لـ Π_3

افترض التقسيم التالي لـ [3] والمرتب بالتصفية:



نحسب دالة موبيوس أولاً بوضع $\mu(P,P)=1$ لجميع التقسيمات P، ومن

ثم

$$\mu(1.2.3,1.23)=-\mu(1.2.3,1.2.3)=-1$$

وبالطريقة نفسها $\mu(1.2.3,2.13)=1$ و $\mu(1.2.3,3.12)=1$. ثم،

$$\begin{aligned}\mu(1.2.3,123)&=-\mu(1.2.3,1.2.3)-\mu(1.2.3,1.23)-\mu(1.2.3,2.13)\\&\quad-\mu(1.2.3,3.12)\\&=-1-(-1)-(-1)-(-1)\end{aligned}$$

=2

وأخيراً $\mu(1.23,123) = -\mu(1.23,1.23) = -1$ وبالطريقة نفسها $\mu(2.13,123) = -1$، و $\mu(3.12,123) = -1$. وبما أننا حسبنا $\mu(P.Q)$ لجميع التقسيمات P و Q التي تحقق $P \preccurlyeq Q$ نكون قد انتهينا.

مبدأ تحويل موبيوس العكسي، النسخة I

نحن الآن مستعدون لوضع النتيجة الرئيسية التي من خلالها سوف ننشئ دالة موبيوس للمجموعة المرتبة جزئياً. لتكن $P = (X, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً محددة محلياً ولتكن $N_=$ و $N_\geq$ دوال تعطي قيماً حقيقية ومعرفة على عناصر المجموعة المرتبة جزئياً. ينص مبدأ تحويل موبيوس العكسي على أنه إذا كان كل من $N_=$ و $N_\geq$ مرتبطين بالمعادلات

$$N_\geq(\chi) = \sum_{y:\chi\leq y} N_=(y) \quad \text{لكل من } \chi \in X$$

عندها يمكننا أن نعكس هذه المعادلات لإيجاد الحل لـ $N_=$. استخدام $N_=$ و $N_\geq$ سوف يعيدنا إلى معناهما بمفهوم التضمين والإقصاء.

المبرهنة 8.5.4 (تحويل موبيوس العكسي، I): افترض أن $P = (X, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً محدودة محلياً دالة موبيوس لها μ. إذا كان كل من $N_=$ و $N_\geq$ دالتين $X \longrightarrow \mathbb{R}$ ومرتبطين بالعلاقات

$$N_{\geq}(\chi) = \sum_{y:\chi\leq y} N_{=}(y) \quad \text{لكل من} \quad \chi \in X \qquad (8.7)$$

وحيث توجد قيمة $u \in X$ بحيث $N_{=}(\chi) = 0$ إلا إذا $\chi \leq u$ ، عندها

$$N_{=}(\chi) = \sum_{y:\chi\leq y} \mu(\chi, y)\ N_{\geq}(y) \qquad (8.8)$$

ملاحظة

الشرط "توجد قيمة $u \in X$ بحيث $N_{=}(\chi) = 0$ إلا إذا $\chi \leq u$" يؤكد على أن المجاميع محدودة في حالة وجود مجموعة مرتبة جزئياً لامتناهية، وسوف تتحقق دائماً عند تطبيق المبرهنة على مجموعة مرتبة جزئياً المحدودة.

البرهان: افترض أن $P = (X, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً محدودة محلياً، وأن كلاً من $N_{=}$ و $N_{\geq}$ مرتبطان بالمعادلة (8.7). لتكن $\chi \in X$. ابدأ بالمجموع في المعادلة (8.8) واكتب $N_{\geq}(y)$ بدلالة $N_{=}$ وفقاً لـ (8.7) لتحصل على

$$\sum_{y:x\leq y} N_{\geq}(y)\,\mu(\chi, y) = \sum_{y:x\leq y}\ \sum_{z:y\leq z} N_{=}(z)\mu(\chi, y).$$

بما أن $\xi(y, z) = 0$ طالما $y \nleq z$ ، استخدم ξ لاستبدال المجموع الداخلي بالمجموعة X الكلية. بعد ذلك، بدل ترتيب المجموع وأعد ترتيب البنود لتحصل على

$$\sum_{y:\chi\leq y}\ \sum_{z:y\leq z} N_{=}(z)\,\mu(\chi, y) = \sum_{y:x\leq y}\ \sum_{z\in X} \xi(y, z)N_{=}(z)\mu(\chi, y)$$

$$= \sum_{z \in X} \sum_{y:\chi \leq y} N_{=}(z)\mu(\chi, y)\xi(y, z).$$

في التعبير الأخير، المعامل $N_{=}(z)$ غير موجود في المجموع الداخلي، وبالتالي ذلك يحدد ذلك المجموع بـ y بما يحقق $\chi \leq y \leq z$. ولا توجد مشكلة في القيام بذلك، لأن $\xi(y, z) = 0$ عندها $y \nleq z$. وهذا يبين أن

$$\sum_{z \in X} \sum_{y:x \leq y} N_{=}(z)\, \mu(\chi, y)\xi(y, z) = \sum_{z \in X} N_{=}(z) \sum_{y:x \leq y} \mu(\chi, y)\xi(y, z)$$

$$= \sum_{z \in X} N_{=}(z) \sum_{y:x \leq y \leq z} \mu(\chi, y)\xi(y, z).$$

المجموع الداخلي في التعبير الأخير يساوي $(\mu\xi)(\chi, z)$، والذي يساوي بدوره $\delta(\chi, z)$ لأن

$\mu\xi = \delta$، وبالتالي

$$\sum_{z \in X} N_{=}(z) \sum_{y:x \leq y \leq z} \mu(\chi, y)\xi(y, z) = \sum_{z \in X} N_{=}(z)\, \delta(\chi, z)$$

$$= N_{=}(\chi)\delta(\chi, \chi)$$

$$= N_{=}(\chi)$$

وهذا يكمل برهنة المعادلة (8.8) والبرهان أيضاً.

مبدأ تحويل موبيوس العكسي النسخة II

في التضمين والإقصاء وفي صيغة تحويل موبيوس العكسي في المبرهنة 8.5.4، قمنا باستخدام التعبير $N \geq (\chi)$ من أجل تذكيرنا بجمع $N_=$ لجميع العناصر في المجموعة المرتبة جزئياً الموجودة على مستوى أو فوق χ. تلك هي النسخة "أكبر من" صيغة تحويل موبيوس العكسي (8.8). وتوجد أيضاً النسخة "أقل من" والتي سوف نوضحها الآن. سوف نستخدم كلتا النسختين في القسم 6.8.

المبرهنة 8.5.5 (تحويل موبيوس العكسي، II): افترض أن $P = (\mathrm{X}, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً محدودة محلياً حيث دالة موبيوس لها μ. إذا كان كل من $N_=$ و $N_\leq$ دالتين $\mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ مرتبطين بالمعادلات

(89.)

$$N_\leq(\chi) = \sum_{y:y\leq x} N_=(y) \quad \text{لكل من} \quad \chi \in \mathrm{X}$$

حيث توجد القيمة $l \in \mathrm{X}$ بحيث $N_=(\chi) = 0$ إلا إذا $l \leq \chi$ ، عندها

(810.)

$$N_=(\chi) = \sum_{y:y\leq x} \mu(y,\chi)\, N_\leq(y) \quad \text{لكل من} \quad \chi \in \mathrm{X}$$

السؤال 349: أثبت المبرهنة عن طريق القيام بالتعديلات اللازمة على إثبات المبرهنة 8.5.4

الملخص

أي مجموعة مرتبة جزئياً (محدودة أو محدودة محلياً) لها دالة زيتا، وأيضاً معكوس دالة زيتا معرّف جيداً تسمى دالة موبيوس. صيغة تحويل موبيوس المعكوس يمكن التفكير بها على أنها تعميم على التضمين والإقصاء، وفي القسم 8.6 سوف نرى كيف يتم تطبيقها على العديد من المسائل التوافقية.

تمارين

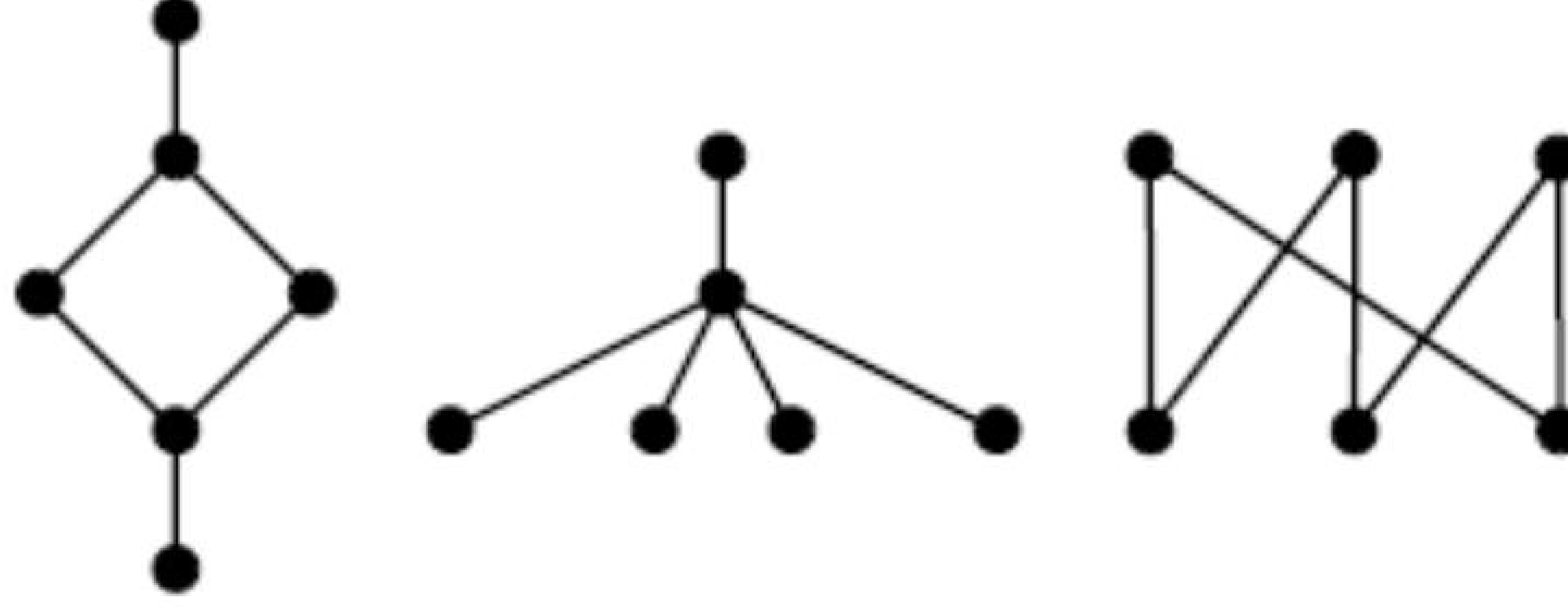
1) حدد مع التوضيح، أياً من العبارات التالية صحيح دائماً لدالة موبيوس لأي مجموعة مرتبة جزئياً.

أ) إذا كانت $\mu(\chi, y) = 0$ عندها $\chi \nleq y$.

ب) إذا كانت $\chi \nleq y$ عندها $\mu(\chi, y) = 0$.

2) جد $\mu(\chi, y)$ في حالة أن y تغطي χ.

3) احسب دالة موبيوس للمجموعات الثلاث المرتبة جزئياً المبينة في الشكل:



4) لتكن μ هي دالة موبيوس لـ Π_4، وأجزاء [4] مرتبة بالتصفية ومخطط هاس لها موضح في الشكل 8.4 في الصفحة 324. جد $\mu(1.2.3.4,1234)$ و $\mu(2.3.14,1234)$.

5) فسر لماذا M هي مصفوفة موبيوس لمجموعة مرتبة جزئياً، وأيضاً لماذا مجموع أعمدة M دائماً يساوي صفراً.

6) بين كيف يمكن أن تستخدم تحويل موبيوس العكسي لحل المعادلات التالية وإيجاد قيمة χ_i بدلالة s_i:

$s_1 = \chi_1$

$s_2 = \chi_1 + \chi_2$

$s_3 = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3$

$s_4 = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4$

$s_5 = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5$

بكلمات أخرى، ما هي $N_=$ و $N_\geq$ ، وما هي المجموعة المرتبة جزئياً ذات العلاقة ودالة موبيوس لها، كيف أوجدت الحل؟

7) افترض أن $P = (X, \leq)$ هي مجموعة مرتبة جزئياً وأن عناصر X قد تم ترميزها وفقاً للامتداد الخطي: $\chi_1 < \chi_2 < \cdots < \chi_n$. أثبت أنه إذا قمنا بترميز الصفوف والأعمدة لمصفوفة Z وفقاً لهذا الامتداد الخطي، سوف يكون لـ Z قيماً تساوي 1 في القطر وقيماً تساوي 0 أسفل القطر.

8) أثبت المبرهنة 8.5.3.

6.8 تحويل موبيوس العكسي، الجزء II

في هذا القسم الأخير سوف نرى كيف نطبق مبدأ تحويل موبيوس العكسي لاشتقاق معادلة التضمين والإقصاء وحل مسألة روليا (Rólya) المتعلقة بالعدّ في حالة التكافؤ. وأيضاً سنرى كيف نستخدمه لحل المسألة المهمة المتعلقة ببُعد المخططات المرمزة المتصلة التي لها عدد من القمم n. هذه الأنواع من المسائل تتطلب معرفة دالة موبيوس لشبكة المجموعة الجزئية، وشبكة قابلية القسمة، وأيضاً الأجزاء المرتبة بالتصفية، بالترتيب. في البداية سوف نستحدث تقنية مفيدة لحساب دالة موبيوس.

حساب دوال موبيوس من خلال حاصل ضرب المجموعة المرتبة جزئياً

بالرغم من أن دالة موبيوس لمجموعة مرتبة جزئياً يمكن إيجاده باستخدام المنهج الاستقرائي في التعريف 8.5.1 ، يوجد منهج آخر لذلك. المنهج الذي

سندرسه يتضمن تعريف حاصل ضرب مجموعتين مرتبتين جزئياً، ومن ثم ربط دالة موبيوس لحاصل الضرب مع دالة موبيوس لكل مجموعة مرتبة جزئياً في عملية الضرب. هذه العلاقة بسيطة وتجعل المنهج عملياً جداً.

إذا أعطيت المجموعتين المرتبتين جزئياً $\boldsymbol{P_1} = (X_1, \leq_1)$ و $\boldsymbol{P_2} = (X_2, \leq_2)$، يتم تعريف حاصل ضربهما بالمجموعة المرتبة جزئياً

$$\boldsymbol{P_1} \times \boldsymbol{P_2} := (X_1 \times X_2 \leq)$$

حيث العلاقة ≤ على الزوج المرتب في $X_1 \times X_2$ معرفة لكل من $\chi_1, y_1 \in X_1$ و $\chi_2, y_2 \in X_2$ عن طريق

$(\chi_1, \chi_2) \leq (y_1, y_2)$ إذا وفقط إذا $\chi_1 \leq_1 y_1$ و $\chi_2 \leq_2 y_2$.

ينتج عن حاصل ضرب مجموعتين مرتبتين جزئياً مجموعة مرتبة جزئياً (التمرين 2) وبالتأكيد خواص الانعكاس، التماثل والتعدي الموجودة في $\boldsymbol{P_1}$ و $\boldsymbol{P_2}$ هي موجودة في ناتج الضرب. ويمكن توسيع هذه الفكرة بسهولة لتصبح على ضرب عدد n من الحدود $\boldsymbol{P_1} \times \boldsymbol{P_2} \times \ldots \times \boldsymbol{P_n}$.

مثال: شبكة المجموعة الجزئية كحاصل ضرب.

لتكن $\boldsymbol{B^1} := (\{0,1\}, \leq)$ مجموعة مرتبة كلياً على الأعداد الصحيحة 0 و 1. عندها $\boldsymbol{B^1} \times \boldsymbol{B^1}$ هي المجموعة المرتبة جزئياً على الأزواج المرتبة في المجموعة

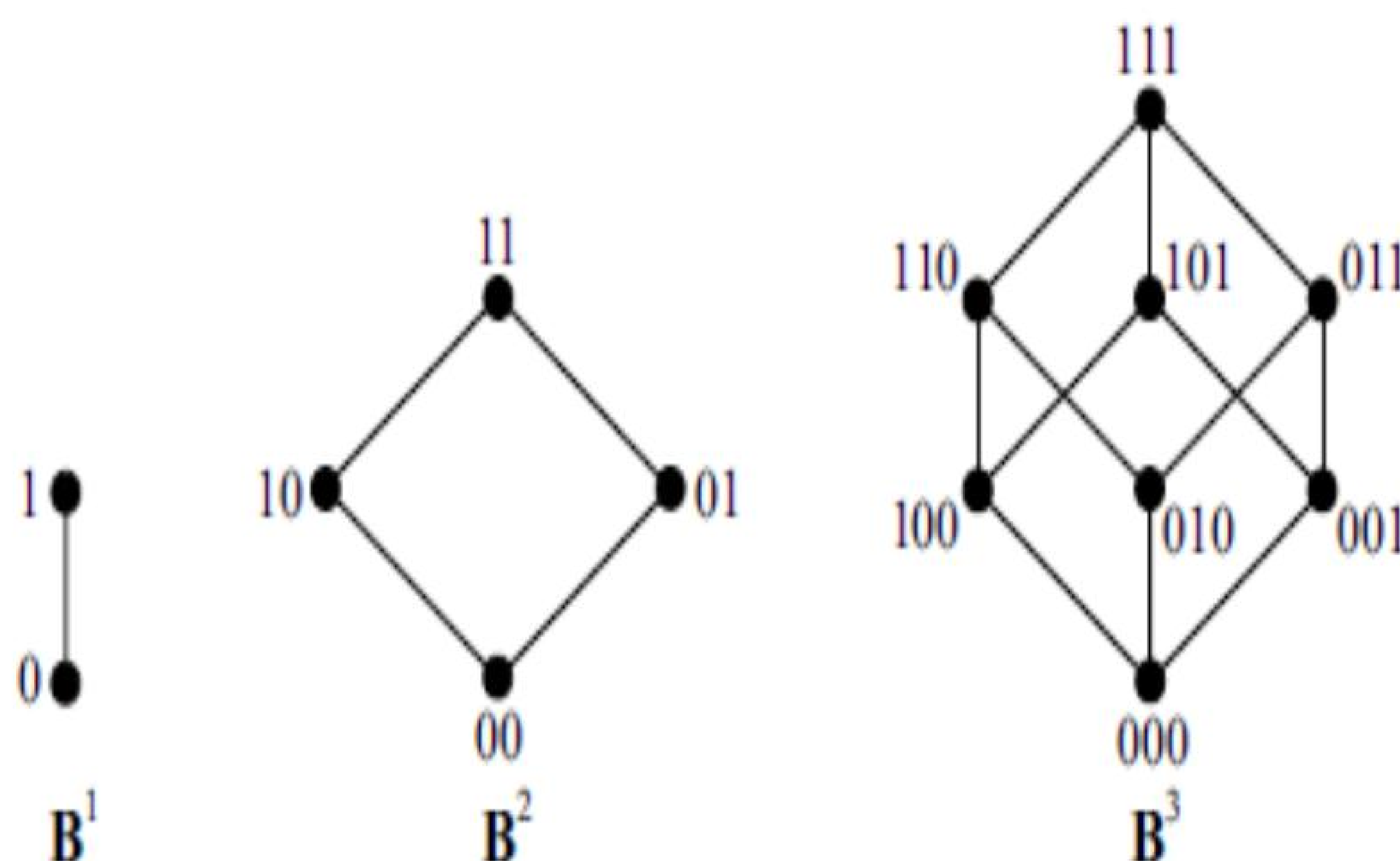
$$\{0,1\} \times \{0,1\} = \{(0,0)(0,1)(1,0)(1,1)\}$$

والتي سوف نختصرها بأرقام ثنائية مكونة من مرتبتين $\{00,01,10,11\}$. لهذا الضرب $\chi_1\chi_2 \le y_1y_2$ طالما $y_1 \le \chi_1$ و $y_2 \le \chi_2$. (من أجل التبسيط، نحن نستخدم الرمز ≤ لكلتا العلاقتين على $\boldsymbol{B^1}$ و $(\boldsymbol{B^1} \times \boldsymbol{B^1})$. على سبيل المثال، في $\boldsymbol{B^1} \times \boldsymbol{B^1}$ لدينا $11 \le 10$ لأن المرتبة الأولى تحقق $1 \le 1$ في $\boldsymbol{B}$ والمرتبة الثانية تحقق $1 \le 0$ في $\boldsymbol{B}$. وفي المقابل، $01 \nleq 10$ في حاصل الضرب.

يتم تعريف الضرب $\boldsymbol{B^1} \times \boldsymbol{B^1} \times \boldsymbol{B^1}$ بالطريقة نفسها:

$$\{000,001,010,100,011,101,110,111\}$$

وهي أعداد ثنائية لها ثلاث مراتب حيث $\chi_1\chi_2\chi_3 \le y_1y_2y_3$ إذا تحققت العلاقة ≤ على هذه المراتب. يكون مخطط هاس لـ $\boldsymbol{B^1}, \boldsymbol{B^2}$ و $\boldsymbol{B^3}$ كما في الشكل التالي:



تبدو هذه الأشكال مألوفة، وبالتأكيد الضرب على عدد n من البنود $\boldsymbol{B^n}$ يكون متماثلاً مع شبكة المجموعة الجزئية $\mathbf{2^2}$ لقيم $n \geq 1$. التقابل العادي بين المجموعات الجزئية والأعداد الثنائية هو ما يوفر التماثل (التمرين 3).

دالة موبيوس لحاصل ضرب

تعطي المبرهنة التالية التفاصيل التي تجعل دالة موبيوس لحاصل الضرب مرتبطاً بدالة موبيوس لكل مجموعة مرتبة جزئياً في عملية الضرب. (انظر التمرين 7 حول البرهان).

المبرهنة 8.6.1: إذا كان كل من $\boldsymbol{P}_1 = (\mathrm{X}_1, \leq_1)$ و $\boldsymbol{P}_2 = (\mathrm{X}_2, \leq_2)$ مجموعات مرتبة جزئياً حيث دالة موبيوس لهما μ_1 و μ_2 ، على التوالي، عندها تكون دالة موبيوس μ لحاصل الضرب $\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2$ يحقق

$$\mu\left((\chi_1, \chi_2), (y_1, y_2)\right) = \mu\,(\chi_1, y_1)\mu(\chi_2, y_2)$$

لقيم $\chi_1, y_1 \in \mathrm{X}_1$ و $\chi_2, y_2 \in \mathrm{X}_2$

على سبيل المثال، بما أن $\boldsymbol{B^1}$ هي ترتيب كلي، دالة موبيوس μ_1 لـ $\boldsymbol{B^1}$ هو

$$\mu_1\,(0,0) = 1$$

$$\mu_1\,(0,1) = -1$$

$$\mu_1\,(1,1) = 1$$

لإيجاد دالة موبيوس μ_2 لـ $\boldsymbol{B^2} = \boldsymbol{B^1} \times \boldsymbol{B^1}$، يمكن حسابها وفقاً للمبرهنة كما يلي:

$$\mu_2\ (00,00) = \mu_1(0,0)\mu_1(0,0) = (1)(1) = 1$$
$$\mu_2\ (00,01) = \mu_1(0,0)\mu_1(0,1) = (1)(-1) = -1$$
$$\mu_2\ (00,10) = \mu_1(0,1)\mu_1(0,0) = (-1)(1) = -1$$
$$\mu_2\ (00,11) = \mu_1(0,1)\mu_1(0,1) = (-1)(-1) = 1$$

وهكذا.

السؤال 350: أكمل حساب μ_2. لماذا من الضروري فقط إيجاد $\mu_2(\chi_1\,\chi_2\,, y_1\,, y_2)$ عندما $\chi_1\,\chi_2\ \leq y_1\,y_2$؟

تطبيق مبدأ تحويل موبيوس العكسي

يمكننا الآن البحث عن تطبيقات على تحويل موبيوس العكسي. أي من هذه التطبيقات يحتاج إلى أمرين:

- المجموعة المرتبة جزئياً ودالة موبيوس التابعة لها.
- دوال عددية $N_=$ و $N_\geq$ (أو $N_\leq$) معرفة على المجموعة المرتبة جزئياً التي تؤدي شكلاً من أشكال العدّ.

في أول تطبيق لنا، سوف تحسب دالة موبيوس لشبكة المجموعة الجزئية ومن ثم نطبق تحويل موبيوس العكسي للحصول على صيغة التضمين والإقصاء. وفي التطبيق

الثاني، سوف نحسب دالة موبيوس لشبكة قابلية القسمة ومن ثم تطبيق تحويل موبيوس العكسي للإجابة على مسألة روليا المتعلقة بالعدّ.

دالة موبيوس لشبكة المجموعة الجزئية

لكل $n \geq 1$، نعلم أن شبكة المجموعة الجزئية $\mathbf{2^n}$ متماثلة مع المجموعة المرتبة جزئياً $\boldsymbol{B^n}$. بما أن $\boldsymbol{B^n}$ هو الضرب الناتج عدد n من الحدود $\boldsymbol{B^1} \times \boldsymbol{B^1} \times \ldots \times \boldsymbol{B^1}$، سوف نستخدم نواتج الضرب لحساب دالة موبيوس لـ $\boldsymbol{B^n}$.

في البداية دعنا نلاحظ أمراً حول μ_1، هي دالة موبيوس لـ $\boldsymbol{B^1}$. بما أنه ترتيب كلي، ينتج عن المبرهنة 8.5.3

$$\mu_1\ (0,0) = 1$$

$$\mu_1\ (0,1) = -1$$

$$\mu_1\ (1,1) = 1$$

ويمكن كتابة ذلك باختصار بالمعادلة $\mu_1(\chi, y) = (-1)^{y-\chi}$ طالما $\chi \leq y$ في $\boldsymbol{B^1}$.

الآن، لتكن μ_n هي دالة موبيوس لـ $\boldsymbol{B^n}$. من المبرهنة 8.6.1 ومن علاقة μ_1 التي حصلنا عليها طالما $\chi_1\,\chi_2\ \ldots.\chi_n \leq y_1 y_2\ \ldots\ y_n$

$$\mu_n(\chi_1\,\chi_2\ \ldots.\chi_n\,, y_1 y_2\ \ldots\ y_n\,) = \mu_1(\chi_1, y_1)\mu_1(\chi_2, y_2) \ldots \mu_1(\chi_n, y_n)$$

$$= (-1)^{y_1-\chi_1} (-1)^{y_2-\chi_2} \dots (-1)^{y_n-\chi_n}$$

$$= (-1)^{y_1+y_2+\cdots y_n-(\chi_1+\chi_2+\cdots+\chi_n)}$$

$$= (-1)^{\Sigma yi - \Sigma \chi i}$$

أي، لعدديين ثنائيين لهما n من المراتب $\chi = \chi_1 \chi_2 \dots . \chi_n$ و $y =$ $y_1 y_2 \dots y_n$ حيث $\chi \leq y$ ، يكون لدينا

$$\mu_n(\chi, y) = (-1)^{\Sigma yi - \Sigma \chi i} = (-1)^{(\#one\ sing\ y)-(\#\ ones\ in\ x)}$$

عندها وباستخدام التشابه الاعتيادي بين الأعداد الثنائية التي عدد مراتبها n وبين المجموعات الجزئية التي لها عدد من المجموعات n سوف يكون لدينا

(811.)

$\mu_n(I,J) = (-1)^{|J|-|I|}$ لكل $I,J \subseteq [n]$ حيث $I \subseteq J$

وهذا يكمل عملية حساب دالة موبيوس لشبكة المجموعة الجزئية $\mathbf{2^n}$

تطبيق: التضمين والإقصاء

سوف نقوم الآن بوضع المبدأ العام للتضمين والإقصاء بشكل مختلف قليلاً عما ورد في البرهنة 3.1.5. تذكر أن 2^P تعبر عن حزمة جميع المجموعات الجزئية لـ P.

المبرهنة 8.6.2: **(التضمين والإقصاء)**: لتكن P مجموعة حجمها n وافترض أن المجموعات الجزئية لـ P مرتبة بالاحتواء. إذا كان كل من $N_=$ و $N_\geq$ دالة تعطي قيماً حقيقية ومعرفة على 2^P ومرتبطة بالمعادلات

$$N_{\geq}(I) = \sum_{J: I \subseteq J} N_{=}(J) \quad \text{لكل قيم} \quad I \in 2^P$$

ومن ثم

$$N_{=}(I) = \sum_{J: I \subseteq J} (-1)^{|J|-|I|} N_{\geq}(J) \quad \text{لكل قيم} \quad I \in 2^P$$

دالة موبيوس لشبكة قابلية القسمة

سوف نشتق الآن صيغة دالة موبيوس لشبكة قابلية القسمة $\boldsymbol{D_n}$. في الحقيقة، اتضح أنه يكفي حساب دالة موبيوس للمجموعة المرتبة جزئياً اللامتناهية $\boldsymbol{D}$ على الأعداد الصحيحة والمرتبة بقابلية القسمة، وليس من الضروري حسابها للقيم المحدودة محلياً. هذه الدالة الذي سوف نحسبها تسمى عدد دالة موبيوس النظري. عند استخدامها في نظرية الأعداد تتم كتابتها كدالة بمتغير واحد $\mu(\chi)$ بدلاً من كتابتها على الشكل $\mu(\chi, y)$، سوف يتضح سبب القيام بهذا عند اشتقاقنا للصيغة. ومن أجل تحضيرنا لذلك أولاً سوف نستخدم ضرب المجموعة المرتبة جزئياً لنصنع ترابطاً جميلاً بين شبكات قابلية القسمة والتحليل إلى العوامل الأولية.

العوامل الأولية وحواصل ضرب المجموعة المرتبة جزئياً

العوامل الأولية لأي عدد صحيح n ، حيث $n \geq 2$ ، يمكن كتابته

$$n = {P_1}^{\alpha 1} {P_2}^{\alpha 2} \dots {P_t}^{\alpha t}$$

حيث البنود P_i هي أعداد أولية متميزة والبنود αi هي أعداد صحيحة موجبة.

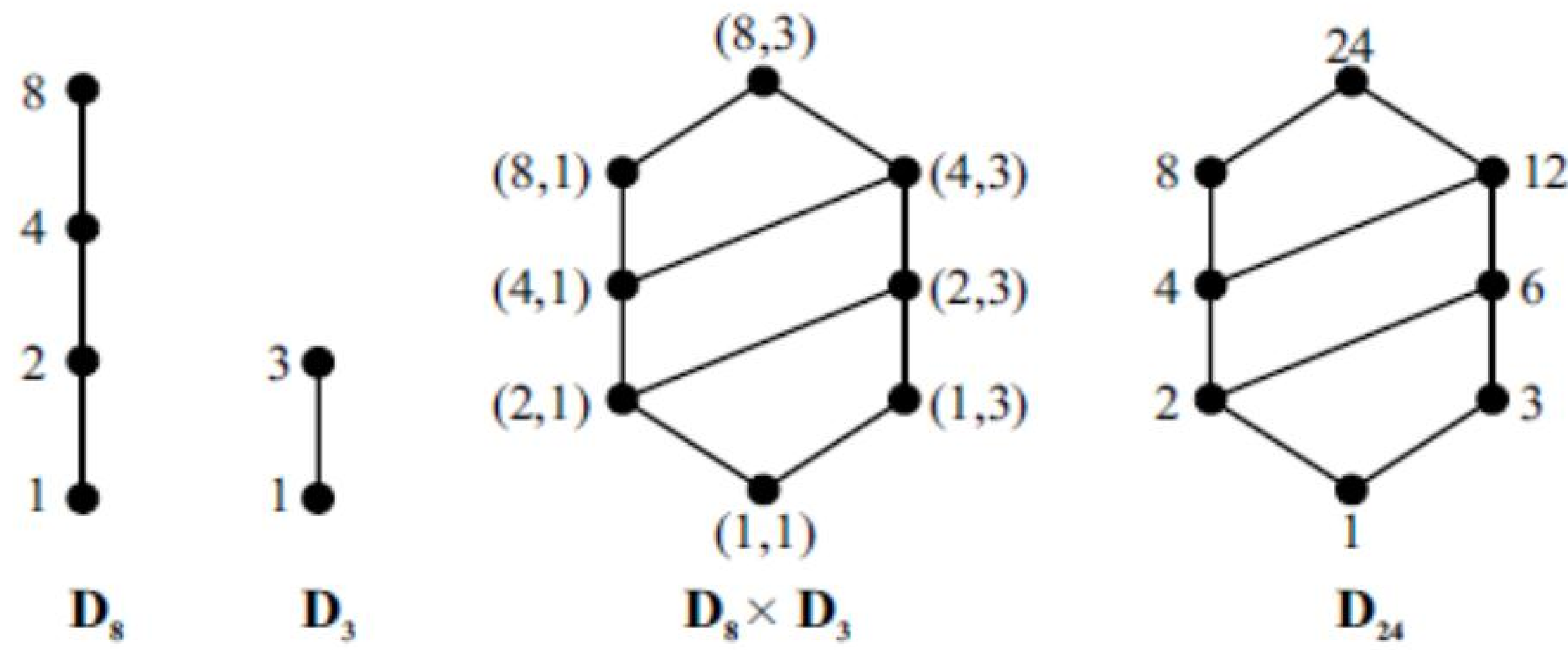
عندما تكون $n = 24$ يكون لدينا $24 = 2^3 . 3^1$ لذلك $t = 2$ ، $P_1 = 2$ ، $\alpha 1 = 3$ ،

$P_2 = 3$، و $\alpha 2 = 1$. ولجميع قيم i، تكون شبكة قابلية القسمة على قواسم $P_i^{\alpha i}$ ترتيباً كلياً. والأهم من ذلك، ضرب عدد بنود t من شبكات قابلية القسمة متماثل مع شبكة قابلة القسمة لقواسم n.

يظهر في الشكل 8.8 توضيحاً لذلك. بما أن كل من 8 و 3 هي أس لعدد أولي واحد، تكون شبكات قابلية القسمة $\boldsymbol{D_8}$ و $\boldsymbol{D_3}$ ترتيباً كلياً. يظهر ضربها في وسط الشكل، ومن الواضح أنه متماثل مع $\boldsymbol{D_{24}}$ الذي يظهر على يمين الشكل، في الحقيقة، يمكن أن نربط كلاً من (a, b) في الضرب مع العدد الصحيح $a.b$ في $\boldsymbol{D_{24}}$. وبهذه الطريقة، $(a, b) \leq (c, d)$ في $\boldsymbol{D_8} \times \boldsymbol{D_3}$ إذا وفقط إذا $a|c$ و $b|d$. وهذا يكافىء $ab|cd$ لأن a و d هما عددان أوليان نسبياً كما العددين c و d.

بشكل عام التحليل إلى العوامل الأولية ينتج من عوامل ضرب المجموعة المرتبة جزئياً كما يلي، إذا كانت

$$n = {P_1}^{\alpha 1} {P_2}^{\alpha 2} \dots {P_t}^{\alpha t}$$



الشكل 8.5: شبكة قابلة القسمة $\boldsymbol{D_{24}}$ الناتجة عن ضرب $\boldsymbol{D_8}$ و $\boldsymbol{D_3}$.

هي العوامل الأولية لـ n، عندها تكون مجموعة القواسم لـ n والمرتبة بالقسمة متماثلة مع حاصل ضرب الترتيبات الكلية $\boldsymbol{D_{p_i}^{\alpha_i}}$، أي،

(8.12)

$$\boldsymbol{D_n \cong D_{P_1}^{\alpha_1} \times D_{P_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times D_{P_t}^{\alpha_t}}$$

بالطبع يجب إثبات ذلك (التمرين 4). هذا امتداد جميل للمبرهنة الأساسية للحساب، مع وجود الترتيبات الكلية تلعب دوراً في الأسس الأولية.

السؤال 351: حلل $\boldsymbol{D_{60}}$ إلى حاصل ضرب الترتيبات الكلية ثم وضح ذلك كما في الشكل 8.8.

عدد دالة موبيوس النظري

التماثل المبين في (8.12) يجعل من الممكن بسهولة حساب دالة موبيوس لـ $\boldsymbol{D_n}$ باستخدام المبرهنة 8.6.1. وهذه طريقة إيجاد دالة موبيوس μ_{24} لـ $\boldsymbol{D_{24}}$ عن طريق استخدام التماثل $\boldsymbol{D_{24} \cong D_8 \times D_3}$.

نكتب المجموعة الأساس لـ $\boldsymbol{D_8}$ بالطريقة $\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3\}$ بدلاً من $\{1, 2, 4, 8\}$. وبالطريقة نفسها، نكتب المجموعة الأساس لـ $\boldsymbol{D_3}$ على الشكل $\{3^0, 3^1\}$. بما أن كلاً من هاتين المجموعتين المرتبتين جزئياً هو ترتيب كلي يمكن كتابة دالة موبيوس لهما.

$$\mu_8(2^i,2^j)=\begin{cases}(-1)^{j-i} & j-i\in\{0,1\}\\ 0 & \text{بخلاف ذلك}\end{cases}$$

و

$$\mu_3\,(3^i,3^j)=\begin{cases}(-1)^{j-i} & j-i\in\{0,1\}\\ 0 & \text{بخلاف ذلك}\end{cases}$$

وذلك وفقاً للمبرهنة 8.5.3.

الآن سوف نعمل على μ_{24} باستخدام المبرهنة 8.6.1. إذا كان كل من a وb قواسماً لـ 24، وكان $a|b$ ، عندها $a=\ 2^{i_1},3^{i_2}$ و $b=\ 2^{j_1},3^{j_2}$. وبالتالي

$$\begin{aligned}\mu_{24}(a,b)&=\mu_{24}\left(2^{i_1}3^{i_2},2^{j_1}3^{j_2}\right)\\&=\mu_8\left(2^{i_1},2^{j_1}\right)\mu_3\left(3^{i_2},3^{j_2}\right)\\&=(-1)^{j_1-i_1}(-1)^{j_2-i_2}\\&=(-1)^{\Sigma(j_k-i_k)}\end{aligned}$$

حيث المعادلة الثانية ما قبل الأخيرة صحيحة عندما $j_k-i_k\in\{0,1\}$ لقيم؛ $k=1,2$، وبخلاف ذلك $\mu_{24}\,(a,b)=0$. لاحظ تالياً أن الأسس j_k-i_k تظهر أيضاً بشكل طبيعي في تحليل عوامل $\frac{\mathrm{b}}{a}$ ، وبالتحديد

$$\frac{\mathrm{b}}{a}=\frac{2^{j_1}\,3^{j_2}}{2^{i_1}\,3^{i_2}}=2^{j_1-i_1}\,3^{j_2-i_2}$$

لذلك، إذا كانت $a|b$ يكون لدينا $j_k-i_k\geq 0$ لقيم $k=1,2$. واعتماداً على الحقيقة إن

$$\mu\ \ (a,b) = \begin{cases} (-1)^{\Sigma(j_k - i_k)} & j_k - i_k \in \{0,1\} \text{ لكل } k = 1,2 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

ينتج أن $\mu_{24}(a,b)$ تعتمد فقط على العوامل الأولية لـ $\frac{b}{a}$. أي،

$$\mu_{24}(a,b) = \begin{cases} 1 & a = b \\ (-1)^k & \frac{b}{a} \text{ تساوي حاصل ضرب عوامل } k \text{المختلفة} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

على سبيل المثال، $\mu_{24}(3,24) = 0$ لأن $\frac{24}{3} = 8$ هو ليس ناتج عن ضرب عومل متميزة أولية. ولكن، $\mu_{24}(2,12) = (-1)^2 = 1$ لأن $\frac{12}{2} = 6 = 2.3$ هو ناتج عن ضرب عوامل $k = 2$ المتميزة الأولية. لاحظ أيضاً أن $\mu_{24}(2,24) =$ $\mu_{24}(1,6) = 1$.

الفكرة التي تم استخدامها لإيجاد μ_{24} يمكن توسعتها ليس فقط على حالات عامة لـ $\boldsymbol{D_n}$ ولكن أيضاً على المجموعة المرتبة جزئياً المنتهية محلياً $\boldsymbol{D}$ للأعداد الموجبة الصحيحة المرتبة بقابلية القسمة. لإيجاد $\mu(a,b)$ عندما $a|b$ في $\boldsymbol{D}$، يكفي أن نجد دالة موبيوس لشبكة قواسم $\frac{b}{a}$. ذلك لأن (1) المسافة الفاصلة $[a,b]$ في $\boldsymbol{D}$ متماثلة مع شبكة القواسم لـ $\frac{b}{a}$، و (2) قيم دالة موبيوس على الفترة $[\chi, y]$ لأي مجموعة مرتبة جزئياً محدودة محلياً تعتمد فقط على هيكلية المجموعة الجزئية المرتبة جزئياً والمعرفة على

هذه المسافة الفاصلة. التالي هو نتيجة واضحة من الطريقة الاستقرائية في التعريف 8.5.1. انظر التمرين (5).

المبرهنة 8.6.3: دالة موبيوس μ لأي شبكة قابلية قسمة محدودة D_n، وأيضاً بالتأكيد للمجموعة D المرتبة جزئياً اللامتناهية للأعداد الموجبة الصحيحة المرتبة بقابلية القسمة يعطي كما يلي:ـ

$$\mu_{24}(a,b) = \begin{cases} 1 & a = b \\ (-1)^k & \dfrac{b}{a} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$ تساوي حاصل ضرب عوامل k المختلفة

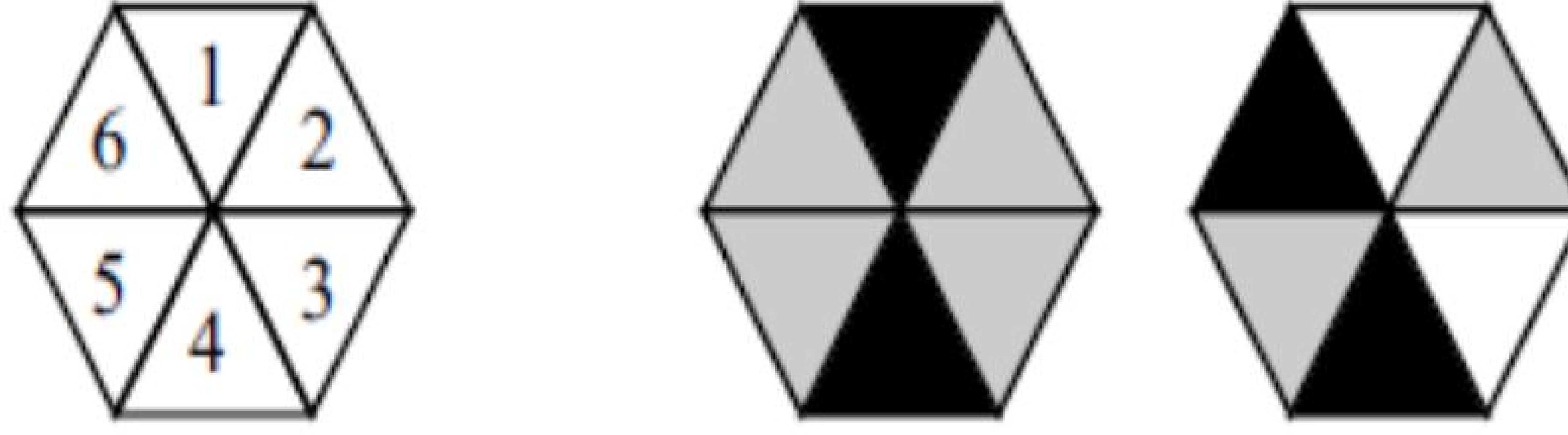
لأن $\mu(a,b)$ تعتمد فقط على القيمة الوحيدة $\frac{b}{a}$ في نظرية الأعداد عادة تكتب كدالة بمتغير واحد: $\mu\left(\frac{b}{a}\right) := \mu(a,b)$ لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة a,b بحيث $b|d$. وهذا يكافىء، $\mu(m) := \mu(1,m)$ لأي عدد صحيح موجب m .

السؤال 352: جد $\mu(30)$ و $\mu(100)$. وأيضاً إذا كانت m عدداً صحيحاً موجباً عندها ما هي $\mu(m^2)$؟

تطبيق: حساب عدد الألوان بشكل دائري

سوف نوضح كيف يمكن استخدام تحويل موبيوس العكسي لمعالجة مسألة روليا. هذه الطريقة غير مباشرة كما هي في استخدام التقنية الموجودة في الفصل (5)، ولكنها توضح مرونة تحويل موبيوس العكسي.

بكم طريقة يمكن أن نلون مغزلاً (بلبلاً) مقسماً إلى 6 مناطق إذا كانت كل منطقة يمكن تلوينها بلون واحد من ثلاثة ألوان؟ يظهر المغزل من دون تلوين ومناطقه مرقمة على يسار الشكل وعلى يمين الشكل يظهر ملوناً بطريقتين مختلفتين باستخدام الألوان الأسود، الرمادي، والأبيض.



بما أن المغزل يمكن أن يدور في المسطح لذلك يمكن اعتبار مجموعة التماثل له هي المجموعة الدائرية C_6.

السؤال 353: استخدم التقنية الموجودة في الفصل (5) لعد المغازل (الجواب هو 130).

دعنا نفكر في هذه المسألة بطريقة مختلفة. إذا كان المغزل غير قابل للدوران عندها يوجد 3^6 طريقة ممكنة مختلفة للتلوين: كل طريقة من التلوين يمكن تحديدها بواسطة قائمة من 6 عناصر، حيث تعبأ بالحروف B, G أو W. طريقتا التلوين المبينتان في الشكل السابق هما القائمتان BGGBGG وWGWBGB. السؤال هو كيف نتعامل مع القوائم ذات ستة العناصر المختلفة التي تبين طريقة تلوين المغزل.

يوضح الشكل 8.9 بعض الأمور. طريقة التلوين المبينة في أعلى الشكل متكافئة مع ثلاث طرق بينما طريقة التلوين في أسفل الشكل متكافئة مع ست طرق مختلفة.



3 قوائم سداسية متكافئة مع هذا التلوين

BGGBGG
GGBGGB
GBGGBG



6 قوائم سداسية متكافئة مع هذا التلوين

BGBWGW	WGWBGB
GBWGWB	GWBGBW
BWGWBG	WBGBWG

الشكل8.9: قوائم الدورة 3 والدورة 6.

يجب أن نقول إن القائمة ذات ستة العناصر في الأعلى لها الدورة 3 بينما التي في الأسفل لها الدورة 6. بشكل عام، إذا كانت هناك قائمة لها أي طول، يكون لها دورة d وينتج عن ذلك أن d هي أصغر عدد موجب من الدوران يتطلب القيام به للحصول على القائمة الأصلية. يقوم الدوران بنقل كل عنصر في القائمة باتجاه اليسار نقلة واحدة (هذا إذا كان الدوران بعكس عقارب الساعة). إذا كان التلوين أحادياً مثل

BBBBBB تكون الدورة 1. لعد المغازل غير المتكافئة، يمكن فقط عد القوائم ذات ستة العناصر غير المتكافئة بطريقة حساب المتكافىء منها نفسها.

الملاحظة المهمة الأولى هي أن دورة أي قائمة يجب أن تكون إما 1 ، 2، أو 6، أي، يجب أن تكون أحد قواسم العدد 6.

سؤال 354: لماذا لا يمكن أن يكون لقائمة ذات ستة عناصر فترة على سبيل المثال تساوي 4؟

لتكن $C(d)$ تشير إلى عدد "القوائم ذات العناصر d الدائرية" ودورتها تساوي d. نعني بذلك قوائم طولها d ودورتها d، حيث تكون القائمتان متكافئتين إذا كان يمكن الحصول على إحداهما من دوران الأخرى. جواب سؤالنا الأساسي هو

$$C(1) + C(2) + C(3) + C(6) = \sum_{d:d|6} C(d)$$

ذلك لأن أي قائمة دائرية ذات ستة عناصر وفترتها تساوي d ، حيث $d|6$، يمكن إنشاؤها عن طريق تحديد أولاً قائمة دائرية عدد عناصرها d ودورتها d ومن ثم تكرار هذه القائمة بعدد مناسب من المرات لإنشاء القائمة ذات ستة العناصر. على سبيل المثال، نعلم أن $C(2) = 3$ لأن القوائم ذات العنصرين وذات الدورة 2 (غير المتكافئة) هي BG, BW و GW. ذلك منسجم مع القوائم الدائرية ذات ستة العناصر ودورة تساوي 2 (غير المتكافئة)، وهي BGBGBG, BWBWBW و GWGWGW.

بشكل عام، لمغزل له n من المناطق بحيث يتم تلوين كل منطقة بلون واحد من k من الألوان الجواب هو

(813.)

$$\sum_{d:d|n} C(d)$$

يجب أن نجد $C(d)$ باستخدام تحويل موبيوس العكسي. (في مثالنا البسيط $C(1), C(2)$ و $C(3)$ يمكن حسابها بسهولة، لكن حساب $C(6)$ يكون أكثر صعوبة). ما نحتاجه الآن هو طريقة لربط $C(d)$ مع مسألة معلومة، وهذه هي المسألة،

$$3^6 = \sum_{d:d|6} d.C(d)$$

سوف نعطي إثباتاً توافقياً. كم عدد القوائم ذات ستة العناصر، حيث العناصر الممكنة هي B, G أو W ؟ أحد الأجوبة هو 3^6. يوجد جواب آخر، وهي الحالات المبينة على دورة القائمة السداسية عندما يتم التعامل معها كقائمة دائرية. إذا كانت الدورة تساوي d ، حيث $d|6$، عندها تختار قائمة دائرية عدد عناصرها d بعدد من الطرق $C(d)$، عندها يوجد d خياراً مختلفاً باستخدام القائمة (الدائرية) التي عدد عناصرها d لبدء القائمة (غير الدائرية) التي عدد عناصرها 6. على سبيل المثال، إذا كانت $d = 3$ واخترنا الألوان BWW، عندها ذلك يرتبط بالقوائم السداسية BWWBWW, WWBWWB و WBWWBW. يوجد $d.C(d)$ لها دورة تساوي d. عن طريق جمع جميع قواسم العدد 6 يكون لدينا الجواب.

بشكل عام نفس المنطق ينطبق على المغزل المقسم إلى عدد n من المناطق حيث يكون لكل منطقة لون واحد من الألوان k. يكون لدينا، ولأي قاسم موجب d لـ n ،

(8.14)

$$k^d = \sum_{e:e|d} e.C(e)$$

من المبرهنة 8.5.5، المجموعة المرتبة جزئياً $\boldsymbol{P}$ هي شبكة قابلية القسمة $\boldsymbol{D_n}$

لذلك المجموعة X هي مجموعة القواسم الموجبة لـ n. الدوال $N_=$ و $N_\leq$ هي

$$N_=(d) := d.C(d)$$
$$N_\leq(d) := k^d$$

ووفقاً للمبرهنة، يمكن المعادلة (8.14) تحويل كالتالي

$$N_=(d) \sum_{e:e|d} \mu(e,d) N_\leq(e) \quad \text{أو} \quad d.C(d) \sum_{e:e|d} \mu(e,d) k^e$$

وعن طريق إيجاد الحل لـ $C(d)$ ينتج

$$C(d) = \frac{1}{d} \sum_{e:e|d} \mu(e,d) k^e$$

الذي يمكن كتابته باستخدام عدد دالة موبيوس النظري كما يلي:

(8.15)

$$C(d) = \frac{1}{d} \sum_{e:e|d} \mu\left(\frac{\mathrm{d}}{e}\right) k^e$$ لجميع القواسم الموجبة d لـ n

لذلك، واعتماداً على المجموع (8.13) يوجد

$$\sum_{d:d|n} \frac{1}{d} \sum_{e:e|d} \mu\left(\frac{\text{d}}{e}\right) k^e \qquad (8.16)$$

طريقة مختلفة لتلوين المغزل الذي له عدد من المناطق n بحيث يتم تلوين كل منطقة بلون واحد من الألوان k.

لإيجاد الحل للمسألة الأساسية ($n = 6$ و$k = 3$), في البداية نجد $C(d)$ للقيم $d = 1, 2, 3, 6$.

لإيجاد $C(6)$، نحسب

$$C(6) = \frac{1}{6} \sum_{e:e|6} \mu\left(\frac{6}{e}\right) 3^e$$

$$= \frac{1}{6}\ (\mu(6)3^1 +\ \mu(3)3^2 +\ \mu(2)3^3 +\ \mu(1)3^6)$$

$$= \frac{1}{6}\Big(\ 1\,.\,3 +\ (-1).\,9 + (-1).\,27 + 1\,.\,729\Big)$$

$$= 116$$

السؤال 355: استخدم الصيغة للتحقق من أن $C(1) = 3$، $C(2) = 3$ و $C(3) = 8$.

وبالتالي يوجد

$$\sum_{d:d|6} C(d) = 3 + 3 + 8 + 116 = 130$$

طريقة مختلفة لتلوين المغزل

تطبيقان لنظرية المخطط

في الخاتمة سوف نذكر باختصار تطبيقين لتحويل موبيوس العكسي في نظرية المخطط. الأولى هي صيغة متعدد الحدود متدرج الألوان لمخطط. هي ليست صيغة عملية لكنها تستخدم لدراسة تلوين المخطط من وجهة نظر مختلفة وأكثر شمولية.

الثانية هي صيغة لعدد المخططات المرمزة المتصلة التي لها n من القمم. في هذه الحالة دالة موبيوس المرتبطة بالموضوع هي الدالة التي لها عدد من التقسيمات $[n]$ مرتبة بالتصفية. لأي تقسيم π ، لتكن $N_=(\pi)$ تساوي عدد المخططات المرمزة التي مجموعة الحواف لها $[n]$ بحيث تكون كتل π تطابق تماماً مجموعة القمم لمكونات المخطط المرتبطة. لتكن $\hat{1}$ تعبر عن العنصر أكبر قيمة لشبكة الجزء، شبكة التقسيم تعني الجزء في $[n]$ في داخل كتلة واحدة. ذلك يعني أن عدد المخططات المرمزة المرتبطة التي لها n من القمم يساوي $N_=(\hat{1})$.

بتعريف $N_\leq(\hat{1}) = \sum_{\pi:\pi\leq\hat{1}} N_=(\pi)$ ، يكون لدينا عن طريق تحويل موبيوس العكسي

$$N_=(\hat{1}) = \sum_{\pi:\pi\leq\hat{1}} \mu(\pi,\hat{1})\, N_\leq(\pi)$$

من السهل إيجاد قمم $N_\leq(\pi)$. على سبيل المثال $N_\leq(\hat{1}) = 2^{\binom{n}{2}}$ لأن ذلك هو فقط عدد المخططات المرمزة التي لها n من القمم.

السؤال 356: افترض أن π هي تقسيم من $[n]$ ولها b_i من الكتل التي حجمها i، لقيم

$i = 1, 2, \dots, n$، فسر لماذا

$$N_{\leq}(\pi) = \prod_{i=1}^{n} 2^{\binom{i}{2} b_i}$$

يتضمن باقي العمل إيجاد دالة موبيوس $\mu(\pi, \hat{1})$. إذا كان للتقسيم π عدد من الكتل k، عندها يمكن إثبات أن

$$\mu(\pi, \hat{1}) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

وأيضاً عدد المخططات المرمزة المرتبطة التي لها n من القمم يساوي

$$N_{=}(\hat{1}) = \sum_{\pi:\pi \leq \hat{1}} (-1)^{k-1}(k-1)! \prod_{i=1}^{n} 2^{\binom{i}{2} b_i} \qquad (8.17)$$

وذلك ولكل تقسيم π في المجموع تكون k هي عدد الكتل و b_i هي عدد الكتل التي حجمها i. هذه الصيغة غير عملية بشكل واقعي للحساب لأن المجموع يكون لجميع التقسيمات الممكنة على $[n]$. على سبيل المثال، عندما تكون $n = 10$ عدد الحدود في المجموع هو عدد بيل العاشر $B(10) = 115,975$. يمكن كتابتها (تمرين 10) كمجموع على جميع التقسيمات للعدد الصحيح n، وعندها يكون الجواب أصغر. عندما $n = 10$، يكون الجواب هو رقم القسم $P(10) = 42$.

الملخص

بالرغم من أن تحويل موبيوس العكسي هو ليس دائماً التقنية المباشرة والأكثر عملية، إلا أنه بالتأكيد جزء مهم من النظرية التي توحد عدة أفكار توافقية والتي من دون هذا التحويل سوف تبدو غير مرتبطة. في كل حالة يتم تطبيق التحويل عليها، تظهر التقنية المجموعة المرتبة جزئياً المختبئة. في حالة التضمين والإقصاء، تكون المجموعة المرتبة جزئياً المختبئة هي شبكة المجموعة الجزئية، وفي قوائم دائرة العدّ، هي شبكة قابلية القسمة، وفي المخططات المرمزة المتصلة هي شبكة التقسيم.

التمارين

1) لتكن μ عدد دوال موبيوس النظرية، وافترض أن k هي عدد صحيح موجب. جد $\mu(5^{k+1}-1)$ و $\mu(k^9+k^5+2k^3)$.

2) أثبت أن حاصل ضرب مجموعتين مرتبتين جزئياً هو مجموعة مرتبة جزئياً.

3) لتكن $n \geq 1$. أثبت أن $\boldsymbol{B^n} \cong \boldsymbol{2^n}$.

4) إذا كانت $n = {p_1}^{\alpha 1}, {p_2}^{\alpha 2}, \dots, {p_t}^{\alpha t}$ هي العوامل الأولية لـ n، أثبت التماثل المبين في (8.12).

5) لتكن $\boldsymbol{D}$ مجموعة مرتبة جزئياً لامتناهية للأعداد الصحيحة الموجبة المرتبة بقابلية القسمة. وليكن a و b عددين صحيحين موجبين بحيث $d|b$. أثبت أن $\boldsymbol{D}$ المحددة بالفترة $[a, b]$ متماثلة مع $\boldsymbol{D}_{\frac{b}{a}}$.

6) لتكن $P = (X, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً لها عنصر أصغر قيمة $\hat{0}$ ولها عنصر أكبر قيمة $\hat{1}$. وافترض أيضاً أنه يوجد عنصر $\hat{\chi} \in X$ مختلف عن $\hat{0}$ و $\hat{1}$، وهو قابل للمقارنة مع كل عنصر. جد $\mu(\hat{0}, \hat{1})$.

7) أثبت المبرهنة 6.18..

8) لأي عدد صحيح موجب n ، لتكن $\phi(n)$ تساوي عدد الأعداد الصحيحة الموجبة في $[n]$ والتي هي أولية نسبية مع n. أي،
$\phi(n) = |\{a \in [n]: \gcd(a, n) = 1\}|$. (هذا هو دالة Euler phi). استخدم تحويل موبيوس العكسي لاشتقاق المتطابقة التعريفية

$$\phi(n) = \sum_{d:d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d.$$

9) استخدم المتطابقة التعريفية في التمرين السابق لإثبات أن المجموع المبين في (8.16) يمكن أيضاً كتابته كما يلي:

$$\frac{1}{n} \sum_{d:d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) k^d.$$

10) أعد كتابة الصيغة (8.17) بحيث يكون المجموع على تقسيمات العدد الصحيح n (تنويه: خد بعين الاعتبار متجهات النوع للتقسيمات). ثم، استخدمها لحساب عدد المخططات المرمزة المتصلة لأربع من القمم ولخمس من القمم.

ملاحظات سريعة

نريد أن نشكر غن كارلو - روتا (Gain-Carlo Rota) (1932-1999) وهو أستاذ دكتور في علم الرياضيات في MIT، على توضيح أهمية تحويل موبيوس العكسي في عمليات التوافيق. بحثه في العام 1964 "نحو تأسيس النظرية التوافقية، نظرية دالة موبيوس" تم الاهتمام به في العام 1988 عن طريق جمعية ليروي ب. ستيل (Leroy P. Steele) الأميركية لعلم الرياضيات ومنحه جائزة على عمله ومساهمته في الأبحاث. ذلك البحث، كما قالت هيئة الجائزة، هو "البحث الوحيد المسؤول عن الثورة التي وحدت التوافيق مع مسار علم الرياضيات الحديث". قام روتا بكتابة تسعة أبحاث أخرى أثرت كذلك في الأبحاث التوافقية.

توجيهات وإجابات لتمارين مختارة

فيما يلي بعض الإجابات النهائية أو التوجيهات لبعض التمارين الواردة في النص. في حال إعطاء إجابة نهائية، ستجد أنها أعطيت في صيغة الرموز القياسية (مثلاً، $\binom{5}{2}$ وليس 10) وذلك لمساعدتك في التحقق من عملك. في معظم الحالات، فإعطاء الإجابة النهائية لوحدها ليس كافياً – بل عليك أن ترفقها بشرح. أعطيت التوجيهات لمساعدتك في البراهين أو المسائل المتعلقة، أو لاقتراح كيف يمكن أن تؤدي الحالات الخاصة إلى حل المسألة الأصلية. استخدم التوجيهات عندما تعتقد أنك غير قادر على إكمال الحل.

القسم 1.1

1. (أ) $\left(\binom{16}{6}\right)$

(ب) $\binom{25}{5}$

(جـ) $(18)_4$

السحب ذو العدد الأقل من التذاكر المتاحة يوفر أفضل فرصة للربح – أي واحد منها؟

2. (أ) 2^{16}

(ب) $\binom{20}{10}$

3. (أ) 3^n

(ب) 8^n

(جـ) 16^n

5. $\left(\binom{4}{15}\right)$

7. يوجد n^4 كلمة سر. إذن حلّ $n^4 \geq 10^9$ لإيجاد قيمة n.

9. (أ) 2^{10}

(ب) 2^{10}

(جـ) $\binom{17}{10}$

11. $\binom{6}{5}$; $\left(\binom{6}{5}\right)$

13. توجيه: عندما تعرف الأرقام الستة التي ستكون في التبديل، كم طريقة يوجد لوضعها بترتيب متزايد؟

15. $\left(\binom{5}{11}\right) = \left(\binom{5}{16-5}\right)$ هي إجابة السؤال الأول.

17. توجيه: يرتبط كلّ حل بالمجموعة المتعددة المكونة من 10 المأخوذة من [3].

18. $\binom{8}{5}$

19. توجيه: كل مستطيل يخصّص بشكل فريد بخطين شبكيين أفقين وخطين شبكيين عموديين.

القسم 2.1

1. (أ) ما هو عدد القوائم المكونة من k عنصر مأخوذة من $[n]$ والتي تتضمن عنصراً واحداً متكرراً على الأقل؟

(جـ) ما هو عدد الأعداد الثنائية المكونة من n خانة والتي تتضمن صفراً واحداً على الأقل و 1 واحداً على الأقل؟

(د) ما هو عدد الأعداد الثلاثية (خاناتها إما 0 أو 1 أو 2) والتي لا يمكن اعتبارها أعداداً ثنائية مكونة من 5 خانات؟

3. إحدى الإجابات $\sum_{k=3}^{20}\binom{20}{k}$ لكنها تتضمن مجموع الـ 18 بنداً. جد إجابة أسهل لحسابه يدوياً.

5. توجيه: وسّع المثال المعطى في النص بتعريف D أولاً لتكون مجموعة كلمات السر المكونة من 8 رموز لا تحتوي أي رقم.

7. $= \left(\binom{n}{k}\right) - \left(\binom{n}{k}\right)$

9. توجيه: يكون حاصل ضرب العناصر عدداً زوجياً تحديداً عندما تحتوي المجموعة الفرعية عنصراً زوجياً واحداً على الأقل.

11. عدّ المتممة: $26^5 - 5 \cdot 26^3 \cdot 5$ (افترض أن A, E, I, O, U هي أحرف العلة فقط).

15. توجيه: ابدأ بالإجابة على السؤال نفسه، لكن للأعداد الصحيحة من 1 حتى 100. ثم انظر كيف ستساعدك هذه الإجابة للإجابة عن السؤال نفسه لكن للأعداد الصحيحة من 1 إلى 1000. ثم استمر على هذا النسق.

16. إجابة السؤال الأول هي $4 \cdot (5)_3$

17. توجيه: قسّم إلى حالات حسب قيمة x_4.

18. (أ) 4

(جـ) $13 \cdot 48$

(د) $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}$

(و) $10 \cdot 4^5 - 4 - 36$

(ك) $\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2} \cdot 44$

القسم 13.

1. إجابة السؤال الأول هي $\sum_{i=1}^{n-1} i$، لكن هل يمكنك كتابة الإجابة بصورة مغلقة (من دون تجميع)؟

3. 10^7 لأنه يوجد 10 خيارات للدالة $f(1)$، ثم 10 خيارات للدالة $f(2)$، وهكذا، حتى نصل إلى 10 خيارات للدالة $f(7)$.

5. توجيه: لتكنf دالةً تأخذ كمدخلات مجموعة فرعية من [n] ومخرجاته عدداً ثنائياً مكوناً من n خانة يتضمن واحدات في مواقع (الخانات) التي ترتبط بعناصر المجموعة الفرعية. أثبت أن هذه الدالة f دالة تناظرية.

8. توجيه: اشرح أولاً سبب كون f^{-1} دالة ولماذا مداها هو B. لبرهان دالة واحد – لواحد، افترض أن $b_1, b_2 \in B$ وأن $f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2)$. طبّق الدالة f على كلا الطرفين وماذا يحدث؟

9. افترض أن S_1 وS_2 مجموعتان جزئيتان تتكونان من k عنصر من المجموعة $[n]$، وأن $h(S_1) = h(S_2)$. وهذا يعني أن $S_1^c = S_2^c$ وذلك يتضمن أن $(S_1^c)^c = (S_2^c)^c$ أو $S_2 = S_1$. ربما كان هذا البرهان أسهل؟

12. تكون الدالة تناظريةً عندما يكون n عدداً فردياً. لماذا لا تكون الدالة تناظريةً عندما يكون n عدداً زوجياً؟

القسم 14.

1. كل صف تكافؤ يحتوي على ثمانية تباديل ولدينا 3 صفوف تكافؤ. يحتوي الصف الواحد على التباديل 1234، 1243، 2143، 2143، 3412، 3421، 4312، 4321.

3. $\varepsilon = \varepsilon^{-1}$. لبرهنة ذلك، برهن أولاً أن $\varepsilon \subseteq \varepsilon^{-1}$ ثم برهن أن $\varepsilon \subseteq \varepsilon^{-1}$

5. يجب أن يكون في الفراغ "إنها علاقة تعريف (Identity) على A".

8. $\frac{10 \cdot 5 \cdot 4! \cdot 4!}{10} = 5 \cdot 4! \cdot 4!$

9. $\frac{10!}{10 \cdot 2}$

11. إجابة السؤال الثاني هي $\binom{n}{2}$. لماذا؟

13. لعلاقة التكافؤ، افترض أن اثنين من التباديل على $[n]$ متكافئان، إذا أعطيت أن أول k مدخلاً لكل تبديل متطابقة.

15. أولاً قم بإجراء العدّ في حالة $n = 4$، إذا كان هذا يساعدك.

القسم 5.1

6.1

3. توجيه: نظّم عناصر $[2n]$ في أزواج كالتالي: $(1,2n), (2,2n-1)$، $(3,2n-2)$ وهكذا. هل ترى كيفية استخدام مبدأ برج الحمام حيث إن هذه الأزواج هي الأبراج؟

6. (أ) توجيه: اختبر المساواة (زوجي/ فردي) في الرتبتين في كل زوج.

7. توجيه: عندما $n = 3$، يكون التسلسل 3,2,1,6,5,4,9,8,7.

9. توجيه: استخدم برهان المبرهنة 1.5.4.

القسم 2.1

1. (أ) كم عدد التباديل من $[n]$ التي لا تزيد في الترتيب من اليسار إلى اليمين؟

(ب) كم عدد القوائم المكونة من 4 عناصر المأخوذة من $[20]$ والتي فيها عنصر واحد مكرر على الأقل؟

(جـ) توجيه: طالع البرهان التوافقي #1 في هذا القسم.

2. $\binom{9}{4} \cdot 15_6$ أو $(11)_6 \cdot \binom{15}{4}$

4. (أ) $9^7 - 9^6$

(ب) $8 \cdot (8)_6$

(جـ) 4^7

6. (أ) $5^5 - 4^5$

(ب) $(n-1)^n$

7. توجيه: استخدم أو وسع العمل في القسم الفرعي "عدّ الدالّات الشاملة".

12. هذا يثبت أنه لعدّ الدوال $[k] \to [n]$، فإن هذا مكافئ لعدّ القوائم المكونة من k المأخوذة من $[n]$.

13. إذا كان F مجموعة مكونة من دوال واحد لواحد $[k] \to [n]$، فإن L مجموعة من تباديل k على $[n]$.

16. (أ) توجيه: في البداية يوجد n طريقة لتحديد موقع العميل 1، تحديداً يوجد أمام أحد صفوف n. ثم يوجد $n + 1$ لتحديد موقع العميل 2:

قبل العميل 1 بصف، بعد العميل 1 بصف، أو أمام أحد الصفوف الباقية $n-1$. استمر

القسم 2.2

1. (أ) كم عدداً ثنائياً مكوّناً من n خانة يحتوي على واحدين على الأكثر؟

(ب) بكم طريقة يمكننا اختيار لجنة مكوّنة من 5 أشخاص من مجموعة مكونة من 10 أشخاص؟

2. توجيه: إذا أعطيت مجموعة من 20 شخصاً، بكم طريقة يمكننا تكوين لجنة من 8 أشخاص، ثم اختيار لجنة فرعية من 5 أشخاص من تلك اللجنة الثمانية، وأخيراً تكوين فريق مهام من 3 أشخاص من اللجنة الفرعية؟

4. (أ) توجيه: كم عدد ثلاثي مكوّن من n خانة يوجد؟ للإجابة الثانية، شرط على عدد الـ 2.

(ه) من المتجر الذي يبيع تشكيلات من الكعك، بكم طريقة يمكننا طلب عدد k من الكعك، بحيث نطلب قطعة واحدة من كل نوع على الأقل؟

(و) توجيه: عدّ المجموعات المتعددة المكونة من k عنصر من $[n]$. شرط على أكبر عنصر يظهر في المجموعة المتعددة.

6. توجيه: استخدم البرهان نفسه الذي استخدم في المبرهنة التوافقية، لكن هنا قم بعدّ كلمات السرّ التي لا تتضمن رموزاً متكررة.

7. (أ) $\left(\binom{4}{1}\right)$ أو 4 فحسب.

(ب) $\left(\binom{2}{8}\right)$

(جـ) $\left(\binom{20}{381}\right) = \left(\binom{20}{401-20}\right)$

(د) $\left(\binom{4}{6}\right) = \left(\binom{4}{12-1-1-2-2}\right)$

8. توجيه: أي بند هو على الشكل $a^i b^j c^k$، حيث i, j, k هي أعداد صحيحة غير سالبة. ماذا يجب أن تكون قيمة $i + j + k$؟

11. توجيه: أولاً عدّ طرق تحديد مجموعة غير مرتبة من الأعداد الصحيحة k المأخوذة من $[n]$.

13. توجيه: حل النظام الخطي. عند نقطة محددة، سيلزمك البحث عن مصفوفة فانديرموند في كتاب الجبر الخطي إن لم تكن قد اطلعت عليها مسبقاً.

القسم 3.2

1. $S(20,3) = 580,606,446$ و $S(20,1) + S(20,2) + S(20,3) = 581,130,734$

3. $S(8,5) \cdot 5! = 126,000$

5. توجيه: أولاً حدد العنصر "المفقود"، ثم حدد دالةً شاملة تتضمن العناصر الأخرى.

7. توجيه: طالع القسم 1.4.

9. توجيه: أي تقسيم على $[n]$ إلى $n-1$ كتلة يتضمن كتلة واحدة تحديداً حجمها 2، أما الكتل الباقية فحجمها 1. لتكن f دالةً تأخذ مثل هذا التقسيم كمدخل ومن ثم يكون المخرج كتلة بحجم 2. برهن أن هذه الدالة f دالة تناظرية.

11. توجيه: بالنسبة إلى الإجابة 2، شرط على عدد العناصر التي ليست موجودة في الكتلة التي تحتوي n.

12. توجيه: طبق المبرهنة 2.3.1 مرتين.

14. توجيه: تتبع ما يفعله البرنامج بمثال، لنقل $S(7,4)$. استخدم مثلث ستيرلينغ من النوع الثاني للتصور.

18. (ب) $\sum_{i=1}^{n} \beta(k,i)$

(جـ) توجيه: استخدم التمرين 16 من القسم 1.2 ومبدأ التكافؤ.

القسم 2.4

1. (أ) $S(40,10) \cdot 10!$

(ب) $\left(\!\binom{10}{40}\!\right)$

جـ) $\sum_{i=1}^{10} S(40, i)$

د) $P(40,10)$

هـ) $(40)_{10}$

و) $\binom{40}{4} \cdot 9^{36}$

5. $P(n, n-2) = 2$ عندما $n \geq 4$ و $P(n, n-2) = 1$ عندما $n = 3$.

6. طبق المبرهنة 2.4.1 مرة للحصول على $P(n, 2) = P(n-1,1) + P(n-2,2) = 1 + P(n-2,2)$. طبق المبرهنة مرة أخرى للحصول على $P(n-2,2)$، وتابع.

8. توجيه: إذا أعطيت تقسيماً على n، أضف 1 إلى كل جزء موجود ومن ثم أضف أجزاء كافية من حجم 1 لجعل إجمالي عدد الأجزاء مساوٍ لـ n. على سبيل المثال: التقسيم 5+1+1 من المجموعة 7 تصبح 6+2+2+1+1+1+1. برهن أن هذه الدالة تناظرية.

11. كم تقسيم لـ n لا يحتوي أجزاءً حجمها 1؟

12. توجيه: يمكنك برهنة متباينة التكافؤ $P(n+2) - P(n+1) \geq P(n+1) - P(n)$

القسم 3.1

1. إجابة السؤال الأول هي2666.

2. توجيه: $\left\lfloor \frac{100}{4.6} \right\rfloor$ لا تساوي عدد الأعداد الصحيحة في $[100]$ التي تقسم على كل من 4 و 6.

4. (أ) توجيه: عرّف P_1 لتكون خاصية أن اللعبة لا تحتوي أي أوراق من نوع البستوني، P_2 لتكون خاصية عدم وجود أي أوراق من نوع الأسباتي... إلخ. الإجابة هي $\binom{52}{13} - \binom{4}{1}\binom{39}{13} + \binom{4}{2}\binom{26}{13} -$ $\binom{4}{3}\binom{13}{13}$.

(ب) توجيه: عدد الجولات التي لا تتضمن بستوني يساوي $N = (P_1)$.

5. (أ) $(6-j)!\,(6-j)!\,(-1)^j \binom{6}{j} \sum_{j=0}^{6}$

6. $D_n = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$

7. (ب) استخدم مبرهنة (Series Remainder Term) من التفاضل والتكامل.

8. لتكن P_i خاصية أن يتلقى المستقبل i ستة أشياء أو أكثر. الإجابة هي: $N = (\theta)$ وتساوي

$$\left(\binom{10}{20}\right) - \binom{10}{1}\left(\binom{10}{14}\right) + \binom{10}{2}\left(\binom{10}{8}\right) + \binom{10}{3}\left(\binom{10}{2}\right)$$

14. توجيه: كم عدد المجموعات الفرعية الصفرية في $[n]$ الممكنة؟ لتكن P_i خاصية أن يكون العنصر i في المجموعة الفرعية، لكل $i \in [n]$.

17. توجيه: يوجد $\binom{16}{10}$ مساراً من A إلى B.

القسم 32.

1. (أ) خطوة استقرائية: افترض أن k عدد صحيح، $k \geq 0$ وأن $3^k - 1$ يقبل القسمة على 2. إذن $3^{k+1} - 1 = 3(3^k) - 1 = 3(3^k) - 3 + 2 = 3(3^k - 1) + 2$. كل بند يقسم على 2، إذن $3^{k+1} - 1$ يقسم على 2.

5. الصيغة هي: $(-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$.

6. الصيغة هي: $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

9. (أ) توجيه: ابدأ الاستقراء عند $n = 3$. استخدم البرهان المعطى في النص.

(ب) توجيه: حاول برهنة أن $L_n \leq b^n$ واشتق أصغر قيمة لـ b التي يمكنك استخدامها في برهان الخطوة الاستقرائية. عند نقطة معينة عليك أن تحل المعادلة $b + 1 = b^2$.

12. هذه المبرهنة الأساسية في الحساب.

القسم **33**.

1. $\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)}$

2. (أ) معامل x^{14} في $(x + x^2)^{10}$

(جـ) معامل x^{75} في $(x + x^2)^{10}$

(ه) معامل x^{15} في $\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^8\right)^3$

3. (أ) $\left(\binom{23}{60}\right)$

(جـ) $\left(\binom{8}{2}\right)$

(د) $\left(\binom{3}{23}\right)$

6. جد معامل x^{15} في $\frac{(1+x)^5}{(1-x)^3}$، ويساوي

$\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\left(\binom{3}{15-k}\right)$

9. (أ) كتابة $\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x}$ يعطينا $A = -1$ و$B = 2$.

معامل x^k هو $2^{k+1} - 1$

القسم 4.3

1. توجيه: جد معامل x^{12} في $(x+x^2+x^3+x^4)^6$. الإجابة النهائية $\left(\!\binom{6}{2}\!\right)-\binom{6}{1}\left(\!\binom{6}{6}\!\right)$.

3. $\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\left(\!\binom{m}{k-j}\!\right)$

5. $\frac{a}{b}(-\frac{c}{b})^k$

8. معامل $\frac{x^n}{n!}$ في e^{3x} يساوي 3^n، وهذا يساوي عدد كلمات السر المكوّنة من n حرف باستخدام الأحرف A, B, C.

9. $c_n = 2^n - 2$

القسم 35.

1. (أ) $a_n = 2^n - 1$ لـ $n \geq 0$

(جـ) $c_n = (n+1)3^n$ لـ $n \geq 0$

(د) $d_n = (n+1)2^n$ لـ $n \geq 0$

2. $a_n = (2-n)n!$

5. (أ) $g_1 = 1, g_2 = 2, g_5 = 10$

القسم 6.3

1. $a_{30} = -257{,}363{,}915{,}118{,}311$

2. (أ) $a_n = 4(2^n) - 1$ لـ $n \geq 0$

(جـ) توجيه: $r_1, r_2 = 1 \pm i$

6. إجابتك النهائية يجب أن تكون $t_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1 + \sqrt{3})^{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}}(1 - \sqrt{3})^{n+1}$ لـ $n \geq 0$

القسم 1.4

1. (أ) $\binom{16}{10,4,2}$

(**ب**) توجيه: أولاً حدد تسلسلاً من 12 خانة، بحيث يحتوي 10 رموز W ورامزي T. ثم حدد طريقة لإدخال رموز L الأربعة، بحيث لا تكون متجاورة.

3. $\frac{105!}{(2!)^{42}\cdot 42!\cdot (3!)^{7}\cdot 7!}\binom{120}{105}$

5. $\binom{31}{12,9,10}$

8. سؤال: من مجموعة الأشخاص n كم طريقة يوجد لتكوين لجنة مكونة من m شخص ومن ثم إنشاء لجنة عمل من أي حجم من المجموعة المتبقية من الأشخاص $n - m$؟

10. توافقياً: لتكن $n \geq 2$. إذا أعطيت مجموعة من الأشخاص n، بكم طريقة يمكننا اختيار لجنة غير فارغة من أي حجم وتخصيص شخص واحد كرئيس وشخص آخر كنائب للرئيس؟ غير توافقي: خذ مشتقتين لـ $(1+x)^n$.

11. لابدّ أن يكون حدسك أن المجموعة تساوي 4^n

13. يساوي $(-8)^n \binom{1/2}{n}$ لكن بسّطه باستخدم التقنية المبينة في هذا القسم.

15. التكرار هو $a_1 = 1$ و $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$ لـ $n \geq 2$.

القسم 42.

2. صيغة واحدة هي $F_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} F_{2k}$، كما يوجد صيغة أخرى لـ F_{2n}.

3. توجيه: يمكنك كتابة الخطأ باستخدام عدد فيبوناتشي.

4. توجيه: برهن بالاستقراء على n.

6. (أ) تحقق من الحالة الأساس لـ $n = 2$ و $n = 3$. الآن افترض أن n عدد صحيح، $n \geq 3$ وأنه يتحقق لكل قيم k التي تحقق المتباينة $2 \leq k \leq n$. نحتاج لبرهنة

$3F_{n+1} = F_{n+3} - F_{n-1}$. باستخدام تكرار فيبوناتشي نحصل على $3F_{n+1} = 3(F_n + F_{n-1}) = 3F_n + 3F_{n-1}$. طبّق فرضية الاستقراء على كل بند ثم بسّط.

11. توجيه: شرط على ما إذا كان السوار مفتوحاً أو مغلقاً.

القسم 3.4

1. $3x^4 - 30x^3 + 69x^2 - 38x - 17$

4. (أ) في أي تبديل على $[n]$ الذي يتضمن $n - 1$ دورة، ستكون هناك دورة ثنائية واحدة وباقي الدورات تكون أحادية. يوجد $\binom{n}{2}$ طريقة لتحديد الدورة الثنائية، إذن $c(n, n-1) = \binom{n}{2}$.

(ب) تبديل على $[n]$ يتضمن دورة واحدة فقط، مكافئ لإجلاس n شخص دائرياً حول الطاولة، كما درسنا في القسم 4.1. يوجد $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

5. استخدم متغيرات منوعة: $\frac{dy}{y} = f(x)dx$. كامل الطرفين للحصول على $y = F(x) + C$، حيث F مشتقة عكسية لـ f. حلّ y يعطينا $y = e^{F(x)+C}$.

8. توجيه: استخدم نظرية ذات الحدين أولاً على $(1 + x)^n$. ثم عوّض

$$x^k = \sum_{j=0}^{k} S(k, j)(x)_j$$

ثم اعكس ترتيب المجموع.

11. توجيه: الإجابة هي $B(n-1)$.

12. $x^4 = \binom{x}{1} + 14\binom{x}{2} + 36\binom{x}{3} + 24\binom{x}{4}$

13. $\Delta\big(f(n)+g(n)\big) = f(n+1) + g(n+1) - \big(f(n)+g(n)\big) = \big(f(n+1)-f(n)\big) + \big(g(n+1) - g(n)\big) = \Delta f(n) + \Delta g(n)$

القسم 4.4

1. يوجد k جزء حجم كل منها 2 والبقية (إن وجدت) هي أجزاء بحجم 1.

2. الفكرة هي $z_i - z_{i+1}$ يساوي عدد الأجزاء ذات الحجم i في التقارن، لـ $i = 1,2,\dots,k$ (عرّف $Z_{k+1} \coloneqq 0$).

4. الحل هو $A = C = \frac{1}{4}$ و $B = \frac{1}{2}$. وعليه فإن $P\left(n, \text{جزئين على الأكثر}\right)$ يساوي معامل x^n في $\frac{1/4}{1+x} + \frac{1/4}{(1-x)^2} + \frac{1/4}{1-x}$ من هنا يجب أن تحصل على

$$P\left(n, \text{جزأين على الأكثر}\right) = \frac{2n+3+(-1)^n}{4}$$

ثم استخدم $P(n,2) = P\left(n-2, \text{جزأين على الأكثر}\right)$

7. (أ) بما أن $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{f(n)} = 1$، بالتالي فإن $f\sim f$. أيضاً، إذا كان $f\sim g$ فإن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{f(n)}{g(n)}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}} = \frac{1}{1} = 1$$

وعليه يكون $g\sim f$. الآن برهن خاصية التعدي.

9. (ب) توجيه: برهن بالاستقراء.

القسم 5.2

1. أربعة.

3. (أ) $\pi^{-1} = (1\ 5\ 3)(2)(4\ 6)$ و $\tau^{-1} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$

(ب) $\pi \circ \tau = (1\ 4\ 5\ 6)(2\ 3)$ و $\pi \circ \tau = (1\ 2)(3\ 4\ 5\ 6)$

(جـ) $\pi^{-1} o\ (\tau\ o\ \pi^2) = (1\ 6\ 3\ 4)(2\ 5)$

(د) $\pi^{-2} = (1\ 3\ 5)(2)(4)(6)$

و $\pi^{-3} = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$

4. توجيه: لا يوجد لكل عنصر في $(\mathbb{R},\cdot)$ معكوس.

5. حذف اليسار: افترض أن $a, b, c \in G$ وأن $a * b = a * c$. اضرب الطرف الأيسر بـ a^{-1} للحصول على $a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$. استخدم التجميع لكتابة $(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$، وهذا يعني أيضاً أن $e * b = e * c$، إذن $b = c$.

6. توجيه: برهن بالتناقض

7. توجيه: أعد الاطلاع على برهان مبرهنة 5.2.4.

9. زمرة التماثل هي الزمرة الزوجية D_4.

الحركة	ضرب الدوائر المنفصلة
I	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)
R_1	(1 3 9 7)(2 6 8 4)(5)
R_2	(1 9)(2 8)(3 7)(4 6)(5)
R_3	(1 7 9 3)(2 4 8 6)(5)
F_1	(1)(2 4)(3 7)(5)(6 8)(9)
F_2	(1 3)(2)(4 6)(5)(7 9)(8)
F_3	(1 9)(2 6)(3)(4 8)(5)(7)
F_4	(1 7)(2 8)(3 9)(4)(5)(6)

14. (أ) واحد لواحد: افترض أن $h_1a, h_2a \in H_a$. فإن $f(h_1a) = f(h_2a)$ يعني أن

$h_1b - h_2b$، وحذف اليسار يعني أن $h_1 = h_2$. ضرب الطرف الأيمن بـ a يبين أن $h_1a = h_2a$.

القسم 5.3

1. (ب) تباديل المعرِّف فقط.

2. $\frac{1}{8}(k^9 + 4k^6 + k^5 + 2k^3)$

3. (ب) لتكن a الحافة بين 1 و2، وb الحافة بين 2 و3... إلخ.

$\text{fix}_{D_4}(\pi)$	ضرب الدوائر المنفصلة	الحركة π
2^9	$(1)(2)(3)(4)(a)(b)(c)(d)$	I
2^2	$(1\ 2\ 3\ 4)(a\ b\ c\ d)$	R_1
2^4	$(1\ 3)(2\ 4)(a\ c)(b\ d)$	R_2
2^2	$(1\ 4\ 3\ 2)(a\ d\ c\ b)$	R_3
2^5	$(1)(2\ 4)(3)(a\ d)(b\ c)$	F_1
2^5	$(1\ 3)(2)(4)(a\ b)(c\ d)$	F_2
2^5	$(1\ 2)(3\ 4)(a)(b\ d)(c)$	$F_{1,2}$
2^5	$(1\ 4)(2\ 3)(a\ c)(b)(d)$	$F_{2,3}$

الإجابة: $\frac{1}{8}\left(2^9 + 4(2^5) + 2^4 + 2(2^2)\right) = 83$

7. (أ) الزمرة الدائرية C_5.

(ب) $5!$

(د) $\frac{5!}{5} = \frac{1}{5}\left(5! + 0 + 0 + 0 + 0\right)$، كما أحرزنا في القسم 1.4.

8. زمرة التماثل حجمها 2. الإجابة $\frac{1}{2}\left(2^8 + 2^4\right) = 136$.

القسم 4.5

1. الآن حجم زمرة التماثل 2 فقط وتتكون من المعرِّف وإحدى عمليات القلب. الإجابة هي

$$\frac{1}{2}\left(k^8 + k^4\right)$$

3. إجابة السؤال الأول هي $18 = \frac{1}{2}\left(2^7 + 7 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^1\right)$.

إجابة السؤال الثاني هي

$$\frac{1}{14}\left(\binom{7}{3} + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 3\right) = 4$$

7. زمرة التماثل هي C_3. الإجابة هي $= \frac{1}{3}\left(3^{10} + 2 \cdot 3^4\right)$ 19,737.

9. زمرة التماثل هي D_3. الإجابة هي $\frac{1}{6}\left(4^6 3^6 + 2 \cdot 4^2 3^2 + 3 \cdot 4^4 3^4\right) = 508,080$.

11. بالنسبة إلى الشبكة 4×4 الإجابة هي $\frac{1}{4}\left(2^{16} + 2^8 + 2 \cdot 2^4\right) = 16,456$

13. أحد المدارات يحتوي 00000 و11111. مدار آخر يحتوي 00001، 00010، 00100، 01000، 10000، 11110، 11101، 11011، 10111، 01111. مدار ثالث يحتوي على 00011، 00110، 01100، 11000، 10001، 11100، 11001، 10011، 00111، 01110. الرابع يحتوي 00101، 01010، 10100، 01001، 10010، 11010، 10101، 01011، 10110، 01101.

القسم 6.5

1. بالنسبة إلى S_3، الإجابة $\frac{1}{6}\left(z_1^3 + 3z_1z_2 + 2z_3\right)$.

2. بالنسبة إلى C_3-، الإجابة $\frac{1}{4}\left(z_1^4 + z_2^2 + 2z_4\right)$.

3. $\frac{1}{p}\left(z_1^p + (p-1)z_p\right)$.

6. مؤشر الدورة هو $\frac{1}{14}\left(z_1^7 + 6z_7 + 7z_1z_2^3\right)$. بتعويض $z_1 \leftarrow a+b+c+d, z_2 \leftarrow a^2+b^2+c^2+d^2$ في مؤشر الدورة. البنود التي نريدها هي $48ab^2c^2d^2 + 48a^2bc^2d^2 + 48a^2b^2cd^2 + 48a^2b^2c^2d$. الإجابة هي $4.48 = 192$.

9. مؤشر الدورة هو $\frac{1}{3}\left(z_1^{10} + 2z_1z_3^3\right)$. عوّض $z_1 \leftarrow r+g+w$ و $z_3 \leftarrow r^3+g^3+w^3$

أضف المعاملات إلى البنود التي على هيئة g^iw^j أو rg^iw^j. الإجابة هي 2064.

القسم 1.6

1. $\binom{\binom{n}{2}}{m}$.

3. توجيه: جرّب البرهان بالتناقض.

5. ليس مماثلاً لـ $K_{3,3}$. لماذا؟

7. توجيه: اعتبر أطول مسار في G

9. (أ) $k2^{k-1} = (Q_k)$.

10. (أ) توجيه: عدّ الحواف في K_n. بالنسبة إلى الإجابة الثانية، جزّئ الرؤوس إلى مجموعة من k عنصر ومجموعة مكونة من $(n-k)$ عنصر، ثمّ عدّ الحواف ضمن المجموعة المكونة من العناصر k، وبيّن المجموعة المكونة من العناصر k والمجموعة المكونة من العناصر $(n-k)$ وضمن المجموعة المكونة من العناصر $(n-k)$.

11. برهنّا هذا في القسم 5.1.

12. (أ) $B^{8}_{5,5} = 1235$

(ج) 36

15. توجيه: A هي مصفوفة مجاورة لـ K_n لذا عدّ $i-j$ في K_n

القسم 62.

1. توجيه: كل مكوّن في غابة هو شجرة، إذا استخدم صيغة شجرة – حافة لكل عنصر.

2. توجيه: تتضمن إحدى طرق البرهنة حذف قمة بدرجة Δ وتحليل ما يتبقى.

4. توجيه: قسّم أشجار الامتداد إلى نوعين، تلك التي تحتوي e وتلك التي لا تحتوي e.

5. (أ) $\tau(C_5) = 5$

(ب) $\tau(K_4) = 16$

(جـ) توجيه: $\tau(K_n - e) = \tau(K_n) - \tau(K_n \cdot e)$

6. بالنسبة إلى K_4، المصفوفة M هي

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ومعامله المساعد (1،1) هو

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 16$$

8. (ب): توجيه: المجموع المطلوب هو: $\sum_{k=1}^{n-1}(n, k)$.

القسم 3.6

1. $\chi(T)$ غالباً ما تكون 2 على الدوام. متى لا تكون 2؟

3. توجيه: احصل على لوحة ألوان فيها $\delta + 1$ لون وابدأ بتلوين قمة واحدة كل مرة. لماذا لن تواجه مشاكل؟

5. مخطط بيترسون له $\chi = 3$ لكنه لمخطط غروتش $\chi > 3$

7. $\chi(G) = 4, e(G) = 9, n(G) = 6$

9. (أ) $p(K_{1,n}, k) = k(k-1)^{n-1}$

(ب) $p(K_{2,n}, k) = k(k-1)^{n-2} + k(k-1)(k-2)^{n-2}$

(توجيه: أي تلوين ملائم إما أن يكون له قمم في مجموعة تجزئة ذات قمتين ملونة بنفس اللون أو ملونة بطريقة مختلفة).

(جـ) توجيه:

$p(C_3 \cup P_4 \cup K_5, k) = p(C_3, k).p(P_4, k).p(K_5, k)$.

11. توجيه: $p(K_n - e, k) = p(K_n, k) + p(K_n \cdot e, k)$.

13. توجيه: $p(K_n, k) = (k)_n$.

15. استخدم الاستقراء وطريقة شبيهة لإثبات خصائص $CP_1 - CP_3$ المعطاة في هذا القسم.

القسم 4.6

1. (أ) صحيح

(د) خطأ

2. توجيه: عمّم الحجّة المستخدمة في هذا القسم لبرهان أن $9 \to (3,4)$.

4. توجيه: اتّبع الطريقة المقترحة في هذا القسم. ستستخدم أيضاً معرّف باسكال.

5. توجيه: ارسم C_{13} ورمّز قممه 0-12 باتجاه عقارب الساعة حول الشكل. صل كل قمة بقمتين إضافيتين: أي بالقمتين اللتين تقعان على مسافة 5 و8 باتجاه عقارب الساعة من تلك القمة. (إذن القمة 0 تكون مجاورة للقمتين 1 و13، وأيضاً للقمتين 5 و8. القمة 1 مجاورة لـ 2 و0، وأيضاً للقمتين 6 و9). يمثّل هذا المخطط الحواف الحمراء. في حين أن الحواف الأخرى زرقاء.

6. (أ) $R(K_3 - e, K_b) = 2b - 1$

(جـ) $R(C_4, C_4) = 6$

(د) $R(K_3 - C_4) = 7$

القسم 7.1

1. (أ) $k = \frac{vr}{b}$ و $\lambda = \frac{r(vr-b)}{b(v-1)}$

(ب) $r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1}$ و $b = \frac{\lambda v(v-1_{-}}{k(k-1)}$

3. خذ جميع المجموعات الفرعية $(n-1)$ من المجموعة $[n]$

5. $b = \binom{n}{k}$ ، $v = n$ ، k ، $r = \binom{n-1}{k-1}$ ، $\lambda = \binom{n-2}{k-2}$

7. توجيه: استخدم مبدأ التكافؤ لعدّ المجموعات الفرعية. لاحظ أن $\lambda = \binom{v}{2}$ يساوي عدد الطرق لاختيار زوج من التنويعات أولاً، ومن ثم اختيار مجموعة فرعية ينتمي لها زوج التنويعات.

10. توجيه: $\{0,1,2,6,9\}$

11. توجيه: استخدم $\{0,1,2,4\}$ كإحدى المجموعات الفرعية الأساسية.

14. توجيه: جد معاملات التصميم المتمّم

17. (أ) عندما تبني تصميماً دورياً، يجب أن يكون عدد المجموعات الفرعية من مضاعفات عدد التنويعات. لماذا؟

(ب) يلزمك $b = cv$ من الفرع أ. الأسئلة الباقية تتبع من هنا.

(جـ) الشروط الأساسية الضرورية إضافة لتلك التي وردت في الفرع ب لا تلغي وجودها.

القسم 2.7

1. تحتاج $b = \frac{r(5r+1)}{6}$ و$v = 5r + 1$. تخصيص قيمة $r = 4$ يُنتج المتغيرات التي تطابق الشروط الضرورية كافة حتى الآن، كما تحققها $r = 6$ و$r = 7$. (متباينة فيشر في القسم 7.3 تحد من إمكانية كون $r = 4$).

3. توجيه: إذا وجد هذا التصميم، إذن فإن تصميمه المتمم سيكون ممكناً أيضاً.

5. توجيه: حلّ b وv في سياق k ثم ضع المتغيرات في الصيغة المعطاة.

7. توجيه: هو متبقي تصميم متماثل معين.

9. توجيه: إذا كان $\mathcal{D}$ تصميماً تماثلياً، فإن $\mathcal{D}^T$ هو تصميم BIBD. استخدم حقيقة أن التصاميم التماثلية مترابطة.

10. (ب) توجيه: استخدم مبرهنة BRC. يجب أن تجد أنها تختصر $k = 7,8,10$

11. توجيه: جد المتغيرات واستخدم مبرهنة BRC.

القسم 73.

1. ثمة نظام واحد فقط. ما هو؟

2. توجيه: استخدم طريقة البناء في المبرهنة 7.3.3

3. إذا كان مثل هذا التصميم ممكناً، فإن عناصره تكون $(2r, 6, r, 3, \frac{2r}{5})$. حدّد قيم r التي يمكن الأخذ بها، ثم استخدم بعض النتائج من القسم 1.7.

7. (أ) يوجد 5 من النوع الأول و10 من النوع الثاني و15 من النوع الثالث.

8. نعم، جميع الشروط الضرورية في هذه المبرهنات منطبقة لذا فهي لا تلغي إمكانية وجودها.

القسم 4.7

1. حدثت 10 أخطاء

3. الإجابة عن السؤالين هي $\binom{8}{3} + \binom{8}{2} + \binom{8}{1} + \binom{8}{0}$.

4. توجيه: $wt(v \oplus w)$ يساوي عدد المواقع التي تختلف فيها كلمتان. ناقش أن الطرف الأيمن للمتطابقة يحسبه أيضاً، لاحظ أيضاً أن $(v * w)_i = 1$ إذا وفقط إذا كان v و w كلاهما يحتوي 1 في الموقع ذي الترتيب i.

7. تحتاج على الأقل $65536 = 2^{16}$ كلمة شيفرة، إذن فإن $16 \geq 1 - m - 2^m$ إذا وفقط إذا كانت $m \geq 5$. يجب أن تستخدم شيفرة هامينغ $(3, 2^{26}, 3)$. كل كلمة شيفرة طولها 31 بت. نسبة كلمات الشيفرة التي تحتاجها تتناسب مع عدد كلمات الشيفرة المتاحة في هذه الشيفرة وتساوي $2^{16}/2^{26} \approx 0.1\%$

8. (أ) الوزن الأقل لتجميع خطي غير صفري يساوي 1، إذن المسافة الأقل تساوي 1. هذه الشيفرة لا تصحح أي أخطاء.

10. توجيه: أولاً اشرح تتضمن $|C| > 2$ أنه يجب أن توجد كلمتا شيفرة تتوافقان في موقع واحد على الأقل. بعد ذلك ما الذي يتضمنه بالنسبة إلى أقل مسافة؟

القسم 5.7

2. توجيه: سيلزمك استخدام حقيقة أن المصفوفة الفرعية A_{11} المبيّنة في (7.9) هي مصفوفة الحدوث للتصميم المتماثل (11٬6٬3) وأن التصاميم المتماثلة مترابطة. تعامل مع الحالة عندما يُدخل الصف الأخير بشكل منفصل.

3. توجيه: أعد مراجعة برهان حد حزم الكرة في القسم 4.7.

القسم 1.8

2. الارتفاع $n + 1 = \binom{2^n}{}$ وعدد السلاسل ذات الحجم الأقصى يساوي $n!$.

3. D_n هو الترتيب الإجمالي إذا وفقط إذا كانت n عدداً أولياً.

5. (ب) الارتفاع $2 = \widehat{(P)}$ + الارتفاع (P)، والعرض $(\hat{P})$ = العرض (P)

7. توجيه: الإجابة هي 3^n. فكّك الزوج المرتب إلى حالات حسب حجم عنصرها الأول. أي، عدّ جميع (I,J) عندما $|I| = 0$، ثم عدّ جميع (I,J) عندما $|I| = 1$.

9. مضاد التماثل: افترض أن $P_1 = \{B_1, \dots, B_r\}$ وأن $P_2 =$ $\{C_1, \dots, C_s\}$ تقسيمان للمجموعة $[n]$، وأن $P_1 \preccurlyeq P_2$ و$P_2 \preccurlyeq P_1$ افترض أن أي مجموعة فرعية $B_i \in P_1$. بما أن $P_1 \preccurlyeq P_2$ فإنه يوجد بعض المجموعات الفرعية $C_j \in P_2$ بحيث $B_i \subseteq C_j$. أيضاً بأن $P_2 \preccurlyeq P_1$، فإنه يوجد بعض المجموعات الفرعية $B_k \in P_1$ بحيث $C_j \subseteq B_k$. وهذا يعني أن $B_i \subseteq C_j \subseteq B_k$، أو أن $B_i \subseteq B_k$. لكن P_1 تقسيم للمجموعة $[n]$، إذن $B_i = B_k$ وهذا يعني أن $B_i = C_j$. وهذا يثبت أن أي مجموعة فرعية في P_1 هي مجموعة فرعية في P_2. يبيّن النقاش أن أي مجموعة فرعية في P_2 هي مجموعة فرعية في P_1. وعليه فإن $P_1 = P_2$.

أيضاً Π_n شبكة

10. (أ) ليسا بالضرورة منفصلين.

(ب) توجيه: أثبت بالتناقض.

13. هذا خاطئ.

القسم 8.2

1. $X = \{2,3,4,6,16,18,24\}$ هي مجموعة تحقق المطلوب.

2. توجيه: يوجد 16 شبكة.

5. توجيه: اكتب $D_p^k = \{p^0, p^1, \dots, p^k\}$. عرّف $\phi: D_p^k \to [k+1]$ بـ $\phi(p^i) = i + 1$ لكل i يتحقق $o \le i \le k$. أثبت أنّ هذه المعادلة متناظرة ومن ثم أثبت أنّ p^i / p^j إذا وإذا فقط كانت $i + 1 \le j + 1$

7. (أ) إنعكاسية: لتكن $x \in \mathbb{B}^n$. بما أن $x_i \leq x_i$ لكل قيم $i \in [n]$، يتبع ذلك أن $x \leq x$.

مضاد تماثل: لتكن $x, y \in \mathbb{B}^n$ ولنفترض أن $x \leq y$ و $y \leq x$. وهذا يعني أن $x_i \leq y_i$ وأن $y_i \leq x_i$ لجميع قيم $i \in [n]$. وعليه فإن $x_i = y_i$ لجميع قيم $i \in [n]$، إذن $x = y$.

متعدي: متروكة لك.

(ب) $(\mathbb{B}^n, \leq) \cong 2^n$.

القسم 8.3

1. الارتفاع (10) =10 والعرض (10)=1؛ الارتفاع (Π_4)=4 والعرض$(\Pi_4) = 7$. بالنسبة إلى Π_4 استخدم الشكل 8.4 لإعطاء غطاء مضاد السلسلة حجمه 4 وغطاء سلسلة حجمه 7.

2. بالنسبة إلى المجموعة الأولى المرتبة بطريقة جزئية، ارسم صفاً من ثمانية عناصر ثم أضف عنصراً تاسعاً فوق هذا الصف. صل العنصر التاسع بكل عنصر من العناصر الثمانية التي تقع أسفله. بالنسبة إلى المجموعة الثانية، استخدم ترتيباً إجمالياً لكن بـ "Y" في الأعلى و"Y" مقلوبة في الأسفل. أما المجموعة الرابعة، المجموعة {1,2,3,12,18} مرتبة بعمليات القسمة.

3. ارتفاع المجموعة المرتبة بطريقة جزئية على اليسار 5 وعرضها 3.

القسم 4.8

1. ارسم مخطط هاس. كل امتداد خطي يجب أن يكون له $b \leq c \leq d \leq e$ و$a \leq c \leq d \leq e$

إذن هذه المجموعة المرتبة بطريقة جزئية لها امتدادان خطيان فقط هما: $b \leq a \leq c \leq d \leq e$ و$a \leq b \leq c \leq d \leq e$.

2. توجيه: ارسم مخطط هاس للحالات $n = 4, n = 3$

3. $(\Pi_3) = 2$

5. لتكن $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ امتداداً خطياً نتج عن الخوارزمية. بهدف التناقض، افترض أن $x_i \leq x_j$ في P لكن $x_j < x_i$ في الامتداد الخطي. وهذا يعني أنه في وقت إضافة x_j إلى الامتداد الخطي، (1) لم يكن قد تم حذف كل من x_j وx_i من المجموعة المرتبة جزئياً بعد، (2) x_j هي العنصر الأقل. لكن $x_i \leq x_j$ في P وهذا يعني أن x_j ليس الأقل.

6. توجيه: استخدمت العبارة لبيان أن أي منجِز من S_4 يتطلب أربعة امتدادات خطية على الأقل لتمتد لغاية S_n. لإيجاد منجز، وسع النمط المبين في الشكل 8.6.

9. (أ) عليك أن تضع كل عنصر يقع تحت x' أسفل كل عنصر يقع فوق y'. بمعنى، أضف كل زوج مرتب (w, z) حيث $w \leq x'$ و $y' \leq z$.

(جـ) إذا كان P' ترتيباً إجمالياً، فإن امتداده الخطي من P له $x' \leq y'$، كما هو مطلوب. إن لم تكن ترتيباً إجمالياً، لتكن x'' و y'' عنصرين غير قابلين للتمديد في P'. كرّر الإجراء حتى تحصل على ترتيب إجمالي.

12. (أ) يمكن أن تمثّل الـ 5 بخمسة صناديق صلبة.

(ب) توجيه: رتّب الامتدادات الخطية (لغاية 4) على المحاور x وy الموجبة والسالبة بطريقة معينة. كيف يمكنك إذن بناء صندوق لكل عنصر؟

القسم 5.8

1. (أ) خطأ

(ب) صح

3. بالنسبة إلى المجموعة المرمّزة المرتبة بطريقة جزئية على اليسار، رمّز العنصر الأقل1، والعنصر الأعلى منه بـ 2، ثم 3 ثم 4 على اليمين واليسار، ثم 5 ثم رمّز العنصر الأعلى بـ 6. مصفوفة موبيوس هي

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. $\mu(1.2.3.4,1234) = -6$

5. المجموعة الضمنية المرتبة بطريقة جزئية هي ترتيب إجمالي 5 ودالة موبيوس لها معطى في المبرهنة 8.5.3. بعد تطبيق تحويل موبيوس العكسي، الحل يكون

$x_1 = s_1$

و $x_2 = s_2 - s_1$

و $x_3 = s_3 - s_2$ و $x_4 = s_4 - s_3$ و $x_5 = s_5 - s_4$.

القسم 6.8

1. توجيه: أولاً برهن أن كلاً من $5^{k+1} - 1$ و $k^9 + k^5 + 2k^3$ تقبل القسمة على 4.

3. هذا التمرين 7 نفسه من القسم 2.8.

5. توجيه: الفكرة هي أنك إذا قسمت كل عدد صحيح في الفترة $[a, b]$ على a، فإن الفترة $[a, b]$ في D تبدو كالفترة $[1, \frac{b}{a}]$ في D. التماثلية تساوي $\emptyset: [a, b] \to D_{\frac{b}{a}}$ بإعطاء $\emptyset(x) = \frac{x}{a}$.

قائمة الرموز

يبين الجدول التالي معظم الرموز المستخدمة في الكتاب:

$[1^{p1}2^{p2}\dots n^{pn}]$	K_n
2^A	$K_{r,s}$
2^n	L_n
$a \equiv b(mod\ n)$	$\mu(x,y)$
$A \times B$	$[n]$
$\{a_k\}_{k\geq 0}$	n
$B(n)$	$n!$
$\mathbb{B}^n$	$N \geq (\cdot), N = (\cdot)$
(b,v,r,k,λ)	$n \longrightarrow (a,b)$
C^A	$n(G)$
C_n	n^k
$\mathbf{C_n}$	$(n)_k$
$co(f)$	$\binom{n}{k}$
$\mathcal{D}^c$	$\left(\binom{n}{k}\right)$
$\delta(G)$	$\binom{n}{t_1,t_2,\dots,t_k}$

$orb_G(f)$

$p(G,k)$

$P(n)$

$P(n,k)$

P_n

Π_{n}

$\mathbf{P} \cong \mathbf{Q}$

$\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q}$

$\mathbf{P} = (\mathrm{X}, \leq)$

$\boldsymbol{P}[Y] = (Y, R[Y])$

$R(a,b)$

$\mathrm{rng}(f)$

$s(n,k)$

$S(n,k)$

$\mathbf{S}_{\mathrm{n}}$

$x < y$

$x||y$

$x \vee y$

$x \wedge y$

$[x,y]$

$\xi(x,y)$

$Z(z_1, z_2, \dots, z_m)$

$\Delta(G)$

$d_G(v), d(v)$

$\dim(\mathbf{P})$

$\Delta^k f(n)$

$\mathbf{D}_{\mathrm{n}}$

$dom(f)$

$\delta(x,y)$

$e(G)$

$f: A \to B$

$\mathrm{fix}_G(\pi)$

F_n

$[\![f(x)]\!]_{x^k}$

$[\![f(x)]\!]_{\frac{x^k}{k!}}$

$G \cong H$

$h(\mathbf{v}, \mathbf{w})$

$S_r(\mathrm{v})$

$stab_G(f)$

$S(t,k,v)$

$\mathrm{STS}(v)$

$t - (v,k,\lambda)$

$u \sim v$

(v,k,λ)

$X^{(G)}$

الثبت التعريفي

أعداد فيبوناتشي (Fibonacci Numbers): أعداد فيبوناتشي (أو متتالية فيبوناتشي) هي الأعداد التي تتضمنها المتتالية التالية:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ \ldots.$$

العددان الأولان في المتتالية هما 0 و1، ويلاحظ بأن كلّ عدد هو نتاج مجموع العددين السابقين له. ثمة تطبيقات عديدة لمتتالية فيبوناتشي منها التبليط.

تباديل (Permutation): التباديل هي عدد التشكيلات الممكنة لمجموعة جزئية من العناصر المنتقاة من مجموعة كلية من العناصر مع مراعاة أهمية تسلسل العناصر في تشكيلات المجموعة الجزئية. يرمز لعدد التباديل p(n,k) ويعني مجموع

الطرق التي يمكن بها انتقاء عناصر مجموعة مع مراعاة الترتيب، حيث n عدد عناصر المجموعة التي يراد ترتيبها، وk كيفية أخذ العناصر.

توافقيات (Combinatorics): أحد فروع الرياضيات، يهتم بدراسة التراكيب المنفصلة القابلة للعد. يتضمن هذا الحساب عدّ تركيبات أشياء ذات حجم ونوع معلومين، وتحديد متى يمكن مطابقة معايير معينة، وبناء وتحليل الأشياء التي تتوافق مع المعايير (كما في التصاميم التوافقية)، ودراسة التراكيب التوافقية التي تنشأ في سياق جبري، وتطبيق التقنيات الجبرية على المسائل التوافقية.

دالة مولدة (Generating Function): الاقتران المولد، هو متسلسلة قوى بمتغيّر واحد، تتضمن معاملاته معلومات عن متتالية من الأعداد a_n. ظهر مفهوم الاقتران المولد للمرة الأولى عام 1730 حيث قدمه العالم أبراهام دو هوافر، وكان يهدف لحل مسألة تكرار خطي عامة.

شيفرة تصحيح الخطأ (Error-Correcting Code): في الاتصالات ونظرية المعلومات ونظرية التشفير، شيفرة تصحيح الخطأ هي تقنية تستخدم للسيطرة على

الأخطاء في نقل البيانات عبر قنوات الاتصالات المشوشة. تكمن الفكرة الأساسية في تشفير الرسالة المرسلة باستخدام شيفرة تصحيح الخطأ. ويشار إلى أن العالم الرياضي الأميركي ريتشارد هامينغ كان رائداً في هذا المجال في أربعينيات القرن العشرين، إذ وضع ما يعرف بشيفرة هامينغ لتصحيح الخطأ في الخمسينيات.

مبدأ الاحتواء – الاستثناء (Inclusion-Exclusion): مبدأ الاحتواء – الاستثناء هو تقنية عدّ تعمّم الطريقة الشائعة للحصول على عدد العناصر الموجودة في اتحاد مجموعتين محدودتين. ويتم التعبير عنه بالرموز $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ ، حيث A وB مجموعتان محدودتان.

مبدأ برج الحمام (Pigeonhole Principle): ينص مبدأ برج الحمام، في الرياضيات، على أنه إذا وضعت عناصر عددها n في مستوعبات عددها m حيث n>m، فإن إحدى المستوعبات على الأقل يجب أن تحتوي أكثر من عنصر واحد.

على سبيل المثال، لو كان لدينا 10 حمامات، و9 حُجر مخصصة للحمام، لأن n=10 وm=9 وn>10 فإنه سيتم وضع حمامتين في إحدى الحجر.

نظرية التجزئة (Partition Theory): في نظرية الأعداد والتوافقيات، تجزئة العدد الصحيح الموجب n هي طريقة لكتابة n كمجموع للأعداد الموجبة. على سبيل المثال، يمكن تجزئة العدد 4 بالطرق المختلفة التالية: 4، 3+1، 2+2، 2+1+1، 1+1+1+1.

نظرية الزمر (Group Theory): تدرس هذه النظرية التراكيب الجبرية المعروفة بالزمر وخواصها. مفهوم الزمرة أساسي في الجبر التجريدي. يمكن التعامل مع التراكيب الجبرية المعروفة الأخرى كالحلقات والفضاء المتجهي كزمر ذات عمليات ومسلمات إضافية. لنظرية الزمر ثلاثة جذور تاريخية هي نظرية الأعداد ونظرية المعادلات الجبرية والهندسة الرياضية.

نظرية المخططات (Graph Theory): تدرس هذه النظرية المخططات والتي هي عبارة عن تراكيب رياضية تستخدم لنمذجة العلاقات بين الأشياء. يتكون المخطط، في هذا السياق، من قمم أو عقد أو نقاط تربطها حواف أو منحنيات أو خطوط مستقيمة.

ثبت المصطلحات

إثبات التوافيق	Combinatorial Proof
استقراء رياضي	Mathematical Induction
أعداد ستيرلينغ	Stirling Numbers
تحليل كسري جزئي	Partial Fraction Decomposition (PFD)
تحويل موبيوس العكسي	Möbius Inversion
تضمين وإقصاء	Inclusion-Exclusion
تكافؤ مقارب	Asymptotic Equivalence
تناظر/ تقابل	Bijection
توزيع	Distribution

Function	دالة
Bijective Function	دالة تقابلية
Onto Function	دالة شاملة
One to One Function	دالة واحد – لواحد
Real Number	عدد حقيقي
Integer	عدد صحيح
Equivalence Relation	علاقة تكافؤ
Identity Relation	علاقة تماثلية
Surjective	غامر
Inductive Hypothesis	فرضية الاستقراء
Overcount	فوق العد
Divisors	قواسم
Pigeonhole Principle	مبدأ برج الحمام

Sum Principle	مبدأ الجمع
Product Principle	مبدأ الضرب
Erdős–Szekeres Theorem	مبرهنة إيردوس–سيكريس
Pólya Enumeration Theorem	مبرهنة بوليا للتعداد
Product Principle	مبرهنة الترميز
Binomial Theorem	مبرهنة ذات الحدين
Injective	متباين
Inequality	متباينة
Palindromes	متسلسلة متناظرة
Geometric Series	متسلسلة هندسية
Codomain	مجال مقابل
Partial Sum	مجموع جزئي
Universe	مجموعة إحصائية

Subset	مجموعة جزئية
Venn Diagram	مخطط ڤن
Complex Conjugate	مرافق مركب
Hat-Check Problem	مسألة اختبار القبعات
Multiples	مضاعفات
Congruence Distribution	نمط التطابق

المراجع

مراجع عامة للتوافقيات ونظرية المخططات:

Bogart, K. P. (1990). *Introductory Combinatorics,* Harcourt Brace Jovanovich (Academic Press), San Diego.

Brualdi, R. A. (2004). *Introductory Combinatorics,* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Chartrand, G. and Zhang, P. (2005). Introduction *to Graph Theory,* McGraw-Hill, Boston.

Erickson, M. J. (1996). *Introduction to Combinatorics,* John Wiley & Sons, New York.

Hall, M. J. (1986). *Combinatorial Theory,* John Wiley & Sons, New York.

Van Lint, J. H. and Wilson, R. M. (1992). *A Course in Combinatorics,* Cambridge University Press, Cambridge, England.

Roberts, F. S. and Tesman, B. (2004). *Applied Combinatorics,* Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Stanley, R. P. (1986). *Enumerative Combinatorics: Volume I,* Wadsworth Brooks/ Cole, Monterey, CA.

Tucker, A. (2006). *Applied Combinatorics,* John Wiley & Sons, New York.

West, D. B. (2001). *Introduction to Graph Theory,* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

مراجع أخرى:

Anderson, I. (2002). *Combinatorics of Finite Sets,* Dover Publications, Mineola, NY.

Andrews, G. E. and Eriksson, K. (2004). *Integer Partitions,* Cambridge University Press, Cambridge.

Appel, K. and Haken, W. (1977). "Every planar map is four-colorable," *Illinois Journal of Mathematics,* 21, 429-567.

Benjamin, A. T. and Quinn, J. (2003). *Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof,* Dolciani Mathematical Expositions 27, Mathematical Association of America.

Bhattacharya, K. N. (1944). "A new balanced incomplete block design," *Science and Culture,* 9, 508.

Birkhoff, G. D. and Lewis, D. C. (1946). "Chromatic polynomials," *Transactions of the American Mathematical Society,* 60, 355-451.

Brigham, R. C., Caron, R. M., Chinn, P. Z., and Grimaldi, R. P. (1996). "A tiling scheme for Fibonacci numbers," *Journal of Recreational Mathematics,* 28, 10-17.

Cayley, A. (1889). "A theorem on trees," *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics,* 23, 376-378.

Carmen, T. H., Leiserson, C. E., and Rivest, R. L. (1990). *Introduction to Algorithms,* The MIT Press, Cambridge, MA.

Dilworth, R. P. (1950). "A decomposition theorem for partially ordered sets," *Annals of Mathematics,* 2, 161-166.

Dunham, W. (1999). *Euler: The Master of Us All,* Dolciani Mathematical Expositions **22,** The Mathematical Association of America.

Dushnik, B. and Miller, E. W. (1941). "Partially ordered sets," *American Journal of Mathematics,* **63,** 600-610.

Erdös, P. and Szekeres, G. (1935). "A combinatorial problem in geometry," *Compositio Mathematica,* **2,** 463-470.

Fisher, R. A. (1940). An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks. *Annals of Eugenics,* **10,** 52-75.

Golay, M. **J.** E. (1949). "Notes on digital coding," *Proceedings of the IEEE,* 37,657.

Graham, R. L., Rothschild, B. L., and Spencer, **J.** H. (1980). *Ramsey Theory,* John Wiley & Sons, New York.

Katz, V. J. (1996). "Combinatorics and induction in medieval Hebrew and Islamic mathematics," in *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*(R. Calinger, ed.), MAA Notes **40,** Mathematical Association of America.

Kirkman, T. (1847). "On a problem in combinations," *Cambridge and Dublin Mathematical Journal,* **2,** 191-204.

Lam, C. (1991). "The search for a finite projective plane of order 10," *American Mathematical Monthly,* 98,305-318.

Lubell, D. (1966). "A short proof of Sperner's lemma," *Journal of Combinatorial Theory,* **1,** 299.

MacWilliams, F. J. and Sloane, N. J. A. (1978). *The Theory of Error-Correcting Codes,* North-Holland, Amsterdam.

McKay, B. D. and Radziszowski, S. P. (1995). *R(4,* 5) = 25," *Journal of Graph Theory,* **19,** 309-322.

Mirsky, L. (1971). "A dual of Dilworth's decomposition theorem," *American Mathematical Monthly,* 78,876-877.

Moon, J. W. (1967). "Various proofs of Cayley's formula for counting trees," in A *Seminar on Graph Theory* (F. Harary and L. W. Beineke, eds.), Holt, Rinehart & Winston, New York.

Neumann, P.M. (1979). "A lemma that is not Burnside's," *The Mathematical Scientist,* **4,** 133-141.

Niven, I. (1969). "Formal power series," *The American Mathematical Monthly,* **76,** 871-889.

Petkovšek, M., Wilf, H. S., and Zeilberger, D. (1996). *A = B,* A K Peters, Ltd., Wellesley, MA.

Pless, V. (1968). "On the uniqueness of the Golay codes," *Journal of Combinatorial Theory,* 5, 215-228.

Pless, V. (1982) *Introduction to the Theory of Error-Correcting Codes,* John Wiley & Sons, New York.

Pólya, G. (1937). "Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und Chemische Verbindungen," *Acta Mathematica,* 68, 145-254.

Pólya, G. (1956). "On picture-writing," *American Mathematical Monthly,* 63, 689-697.

Pólya, G. and Read, R. C. (1987). *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds,* Springer-Verlag, New York.

Prüfer, H. (1918). "Neuer Beweis eines Satzes tiber Permutationen," *Archiv der Math. und Phys.,* 27, 142-144.

Radziszowski, S. P. (1994). "Small Ramsey numbers," *The Electronic Journal of Combinatorics,* 1. *[Dynamic Survey DSI* Revision #11: August 1, 2006]

Redfield, J. H. (1927). 'The theory of group-reduced distributions," *American Journal of Mathematics,* 49, 433-455.

Robertson, N., Sanders, D.P., Seymour, P. D., and Thomas, R. (1996). "A new proof of the four-color theorem," *Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society,* 2, 17-25.

Rota, G.-C. (1964). "On the foundations of combinatorial theory I. Theory of Möbius functions," *Zeitschriftfur Wahrscheinlichkeitstheorie,* 2, 340-368.

Thompson, T. M. (1983). *From Error-Correcting Codes through Sphere Packings to Simple Groups,* The Carus Mathematical Monographs 21, Mathematical Association of America.

Tietavainen, A. (1973). "On the nonexistence of perfect codes over finite fields," *SIAM Journal on Applied Mathematics,* 24, 88-96.

Trotter, W. T. (1992). *Combinatorics and Partially Ordered Sets: Dimension Theory,* The Johns Hopkins University Press, Baltimore.

الفهرس

-ج-

-ح-

-د-

-ن-